2.對紙摺二次曲線圖形之一得

楊 樹 文

本文作者畢業於臺大數學研究所，現正在美留學。

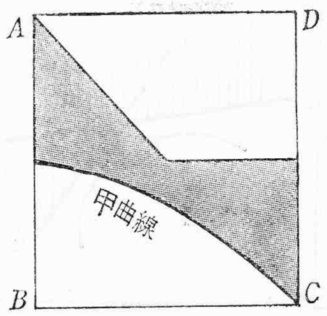
前　言

讀了數學傳播季刊第一期中的「師大附中科展兩件作品評註」，對我國中學生的好學深思，印象良深。尤其是第一件作品「紙摺二次曲線圖形」引起了我的興趣，希望能找出一個方法，利用比較直觀淺易的道理，來解決這個問題；換句話說，即不用包絡曲線的理論，而希望用一高中學生能夠瞭解的方法描述。

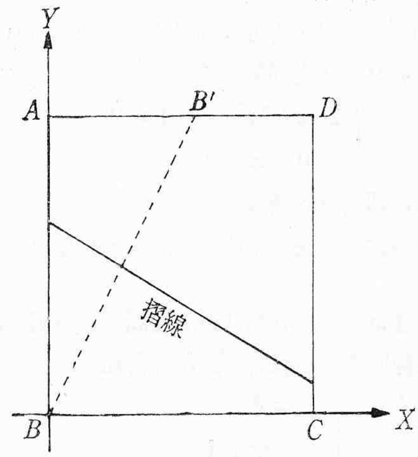
本　文

我們重新對「拋物線摺法」作一描述。

斜摺正方形 $ABCD$ 的一隻角，使角頂 B 落在 AD 上，所得到的摺痕爲一線段，稱之爲摺線；當 B 的落點 B' 在 AD 上變動時，所有的這些摺線在正方形上造成一塊區域（即下圖的黑色部分），而這個區域的下緣所成的曲線，很像



拋物線。而我們的問題就是想證明這條曲線確是拋物線。我們姑且稱這條曲線爲“甲曲線”。

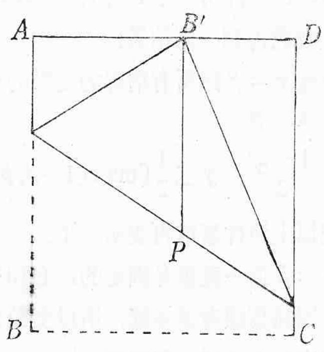


首先我們固定一個坐標系在正方形 $ABCD$ 上，以 B 爲原點，BC 爲 X 軸，BA 爲 Y 軸，而正方形之邊長爲單位長，即得 A,B,C,D 之坐標如下：

$$A(0,1),\ B(0,0),\ C(1,0),\ D(1,1)$$

利用這個坐標系，我們可以把這些摺線的方程式寫出來。因爲 B' 在 AD 上，故可設 B' 之坐標爲 $(\alpha,1)$，$0\leq\alpha\leq 1$.

性質 1：若 $P(x,y)$ 在摺線上，則 P 與 B 的距離等於 P 與 B' 的距離。



證明：當摺疊角頂 B 至 B' 時，BP 線恰與 $B'P$ 線重合，

$\therefore$ BP 與 $B'P$ 等長。　#

由性質1，得知摺線即 BB' 之垂直平分線，因此

$P(x,y)$ 適合 $x^2+y^2=(x-\alpha)^2+(y-1)^2$

即 $2\alpha x+2y-\alpha^2-1=0$

因為摺線在正方形中，即 $0\leq x\leq 1$，$0\leq y\leq 1$.

但當 $0\leq x\leq 1$ 時

$$y=-\alpha x+\frac{\alpha^2+1}{2}\geq -\alpha+\frac{\alpha^2+1}{2}=\frac{(\alpha-1)^2}{2}\geq 0$$

$$y=-\alpha x+\frac{\alpha^2+1}{2}\leq\frac{\alpha^2+1}{2}\leq 1 \quad (\because \alpha\leq 1)$$

∴ 僅須 $0\leq x\leq 1$ 之條件

因此，我們可以用以下的方程式很清楚地描述所有的這些摺線，即當 α 在0與1之間變動時

$$\begin{cases} 2\alpha x+2y-\alpha^2-1=0 \\ 0\leq x\leq 1 \end{cases}$$

所表的線段，即所有的摺線。

有了這個式子要求"甲曲線"的點的坐標已非難事。

方法1，考慮 $x=\beta$（β 為0與1之間的一個值），這一條直線與所有摺線的交點，即得點

$$\begin{cases} x=\beta \\ y=\dfrac{\alpha^2+1}{2}-\alpha\beta \end{cases}$$

為直線 $x=\beta$ 與直線 $2\alpha x+2y-\alpha^2-1=0$ 的交點。

當 β 固定，而讓 α 在0與1之間變動時，讓我們看看 $y=\dfrac{\alpha^2+1}{2}-\alpha\beta$ 存在的範圍。

因 $y=\dfrac{\alpha^2+1}{2}-\alpha\beta=\dfrac{1}{2}(\alpha-\beta)^2+\dfrac{1-\beta^2}{2}$

故 $\dfrac{1-\beta^2}{2}\leq y\leq\dfrac{1}{2}[\max(1-\beta,\beta)]^2+\dfrac{1-\beta^2}{2}$

($\max(1-\beta,\beta)$，表 $1-\beta,\beta$ 中較大的一值)

於是，我們得到一個結果：

直線 $x=\beta$ 與所有摺線的交點的集合為一線段

$$\begin{cases} x=\beta \\ \dfrac{1-\beta^2}{2}\leq y\leq\dfrac{1}{2}[\max(1-\beta,\beta)]^2+\dfrac{1-\beta^2}{2} \end{cases}$$

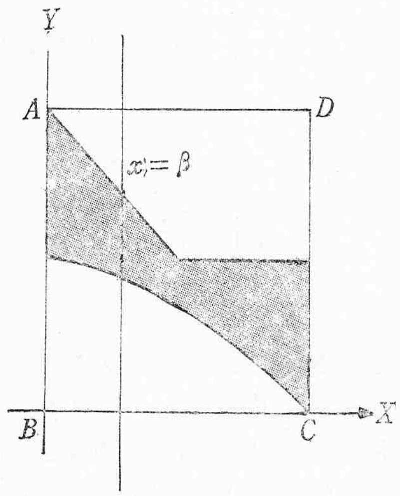
讓我把以上這件事情再說明一下：

$x=\beta$ 這一直線是固定的，它和每一摺線有一交點，因為摺線有很多條，所以交點也有很多個，而這些交點造成了一個線段。

$$\begin{cases} x=\beta \\ \dfrac{1-\beta^2}{2}\leq y\leq\dfrac{1}{2}[\max(1-\beta,\beta)]^2+\dfrac{1-\beta^2}{2} \end{cases}$$

而這個線段事實上也就是直線 $x=\beta$ 與所有摺線所造成的區域的相合的部分。

因此這個線段（垂直的線段）的最低點 $\left(\beta,(1-\beta^2)/2\right)$ 即為甲曲線上的點。



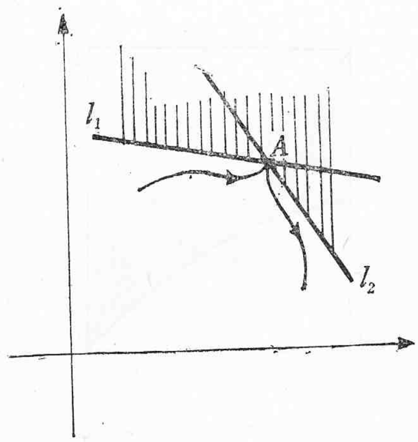
而由圖形上可以看出所有甲曲線上的點都是這種點。

故甲曲線上點的坐標為 $(\beta,(1-\beta^2)/2)$，而其方程式為 $2y+x^2=1$，乃知甲曲線確為一拋物線。

方法2：這個方法遷涉較多，或許較有意思。

性質2：若甲曲線為圓滑曲線，則任何二不同摺線的交點不能落在甲曲線上。

證明：因為甲曲線為所有摺線所形成的區域的下緣，故任一摺線上方的點不可能在甲曲線上。若二摺線 l_1, l_2 相交於 A 點，而 A 點又落在甲曲線上。



由於甲曲線不能通過 l_1 或 l_2 的上方即甲曲

線通過 A 點時只能由右圖中沒有斜線的部分通過，因此甲曲線在 A 點所成的角度（即進入 A 點和走出 A 點的夾角）必小於 180°，即甲曲線在 A 點成爲折線的狀態但是圓滑的曲線不可能爲折線的。由此造成矛盾。故 A 點不可能在甲曲線上。#

由性質 2 我們得到了一些點是不可能落在甲曲線上。現在我們固定一條摺線

$$\begin{cases} 2\alpha x+2\alpha y-{}^2-1=0 \\ 0\leq x\leq 1 \end{cases} \text{（即固定}\alpha\text{值）}$$

而利用"性質 2"看是否能知道這一條摺線上有一些點是不會在甲曲線上的?

因此我們看所有其他的摺線

$$\begin{cases} 2\bar{\alpha}x+2y-\bar{\alpha}^2-1=0 \\ 0\leq x\leq 1 \end{cases} \qquad \text{（即 } 0\leq\bar{\alpha}\leq 1,\ \bar{\alpha}\neq\alpha\text{）}$$

和這一條摺線有那些交點?

計算即得交點爲

$$x=\frac{\alpha+\bar{\alpha}}{2},\qquad y=\frac{-\alpha\bar{\alpha}+1}{2}$$

而 $\bar{\alpha}$ 在 0 與 1 之間變動，但不等於 α，即上式中所代表的點不可能在甲曲線上。但這條摺線

$$\begin{cases} 2\alpha x+2y-\alpha^2-1=0 \\ 0\leq x\leq 1 \end{cases}$$

至少尚有一點

$$x=\alpha,\quad y=\frac{-\alpha^2+1}{2}$$

不在上述交點之列，即有可能甲曲線上。

事實上，由方法 1，得知

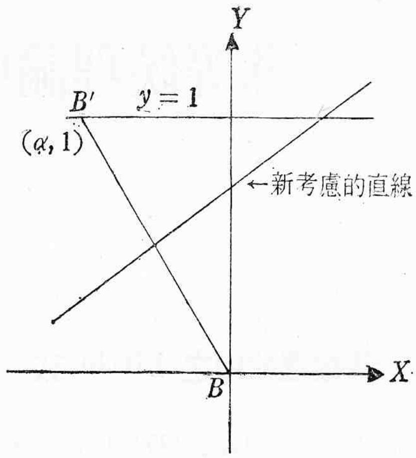
$$\begin{cases} x=\alpha \\ y=\dfrac{-\alpha^2+1}{2} \end{cases}$$

α 變動時剛好是甲曲線。

以上看法，方法 2 並無單獨算出甲曲線的能力。要是我們放棄原來摺線的考慮，而以 B, B' 在整個平面上的垂直平分線代替摺線（原來考慮的摺線只爲 BB' 的垂直平分線的一段），而 B' 是在整個 $y=1$ 的直線上變動，而不只是在 AD 上而已。換句話說，現在甲曲線是當 α 在實數中變動，所有直線 $2\alpha x+2y-\alpha^2-1=0$ 所形成的區域的下緣。

而當固定 α，直線 $2\alpha x+2y-\alpha^2-1=0$ 與另一直線 $2\bar{\alpha}x+2y-\bar{\alpha}^2-1=0$，$\bar{\alpha}\neq\alpha$ 的交點爲

$$x=\frac{\alpha+\bar{\alpha}}{2},\quad y=\frac{-\alpha\bar{\alpha}+1}{2}$$



故在直線 $2\alpha x+2y-\alpha^2-1=0$ 只有

$$x=\alpha,\quad y=\frac{-\alpha^2+1}{2}$$

不可能爲"與其他直線 $2\bar{\alpha}x+2y-\bar{\alpha}^2-1=0$，$(\bar{\alpha}\neq\alpha)$ 的交點"。

故如果甲曲線是圓滑的曲線，則直線 $2\alpha x+2y-\alpha^2-1$ $0=$ 上只有點

$$x=\alpha,\quad y=\frac{-\alpha^2+1}{2}$$

可能在甲曲線上，亦即甲曲線爲拋物線

$$\begin{cases} x=\alpha \\ y=\dfrac{-\alpha^2+1}{2} \end{cases} \quad (\alpha\text{ 變動})$$

中的一部分。

但甲曲線是一完整連續不斷的曲線，故甲曲線即爲此拋物線

$$\begin{cases} x=\alpha \\ y=\dfrac{-\alpha^2+1}{2} \end{cases} \quad (\alpha\text{ 變動})$$

附註: 1. 在方法 2 中，我們須用到"甲曲線是圓滑，無折角"此點似乎可由實驗知悉。而這方法亦可用到"橢圓的摺法"不過計算較複雜，有興趣的人不妨試試。

2. 方法 1 的"變形"亦可試用以"橢圓的摺法"。

3. 方法 2 只是理論 較複雜但 計算事實上較方法 1 簡單。

4. 在「紙摺拋物線」和「紙摺橢圓」之中，均有一特性即，所要摺出的圖形在摺線的一邊，原摺線不可能和所摺出的圖形相交（頂多相切）出所以對任意二相交摺線將平面切成四塊時，所摺出的圖形，只能落在其中的一塊因此若二摺線相交之點落在圖形上則此圖形必不圓滑。此即證明了性質 2 以及何以能摺出一圓滑曲線的摺法。