

# 「基礎數學」課程（最低）標準大綱

賴東昇 整理

## 1. 數與集合

要注意：在這裏我們並不是要講實數的理論，或是集合的理論，目的是溫習在國中所學過的數的知識及集合的符號而已，二者可合併來講，不必一定要把它們分開。

- 1° 利用數線(或數軸)說明自然數，整數，有理數，無理數，實數的概念，絕對值及一維的(即數線上的)坐標的概念。
- 2° 介紹集合的符號，及數的集合，如  $N \subset Z \subset Q \subset R$  等包含關係，及各文字  $N, Z, Q, R$  之意義。關於集合的符號以下列為限：  
 $A \in A, A \subset B, A \supset B, A = B$   
 $A \cap B, A \cup B, B - A$  (但  $A \subset B$ )  
 $A_1 \cap \dots \cap A_n, A_1 \cup \dots \cup A_n$   
 (以有限次為限)。  
 並兼及交換律、結合律及分配律等之說明。
- 3° 數的大小關係，並溫習在國中所學過的基本恒等式(如  $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$  等)以及基本不等式(如  $a^2 + b^2 \geq 2ab$  等)，也談到直角三角形之商高定理。
- 4° 小數，有限小數與無限小數。對於有限小數須要將  $0.125 = \frac{1}{10} + \frac{2}{10^2} + \frac{5}{10^3}$  的意義講清楚；對於無限小數，則須要指出循環小數為有理數，非循環小數為無理數，順便可複習開方法(開立方則可不必要)。

## 2. 一次及二次方程式

在這一章，溫習國中所學過的一次及二次方程式的解法。再度強調未知數原理，以及虛數的概念。

- 1° 算術四則問題與方程式。從實際應用問題着手，引入未知數，依照題意列出方程式這一個步驟須要加強，並述及一元一次方程式之解法，以及解的討論(負根情形)。
- 2° 二元一次聯立方程式及其解法。在此可引進二階行列式，介紹聯立方程式的行列式解法(當然，代入法，消去法為聯立方程式之基本解法)。
- 3° 二次方程式之解法。先只限於實根之情形，解應用問題時，應注意根之討論(如增根，無解之情形)。
- 4° 虛根，虛數，複數平面(只講複數  $a + bi$  與平面上的點的對應)，複數之加減乘除，絕對值(不講幅角)。
- 5° 二次方程式之一般解。判別式，根與係數的關係。

## 3. 平面幾何與坐標

在國中，學生已略知平面坐標系，故在此章，將經驗綜合幾何與解析(坐標)幾何融合在一起討論。

- 1° 複習基本概念。點，直線，方向，角，三角形，正方形，矩形，平行四邊形，梯形，正多邊形，圓，平行線，分角線，垂線等等。

- 2° 三角形之全等與相似, 基本的全等定理。相似定理, 三角形內角和定理, 商高定理等的複習。
- 3° 平面坐標。須要強調點與坐標間之對應, 並提起距離公式, 中點公式, 定比分點公式等。
- 4° 直線方程式, 直線之斜率, 二直線之平行, 垂直之討論, 二直線之交點與聯立一次方程式之解。
- 5° 圓之方程式, 中心與半徑, 圓與直線之交點, 二元二次方程式及其解法, 圓之切線。

#### 4. 一次函數 (線性函數)

利用前面講過的素材, 二元一次聯立方程式, 直線方程式來引進一次函數的概念, 函數的定義不採流行的映射的形式, 而採用古典的變量與變量間的關係, 進而討論一次不等式及其圖解。

- 1° 觀察成比例的二量  $(x, y)$  可舉實際例子來講  $y = ax$  的關係, 函數觀念須要詳細說明。
- 2° 再利用直線方程式, 觀察二量  $(x, y)$  從而得到一般的一次函數  $y = ax + b$  並強調其圖形, 斜率之意義 (即函數值之變化率)。
- 3°  $ax + by + c = 0$ ,  $ax + by + c > 0$ ,  $ax + by + c < 0$  之討論, 及其圖解, 不等式所代表之領域 (半平面)。
- 4° 二元一次聯立不等式之解 (這裏可用二領域之交集來說明其解的領域) 如果可能的話, 包括簡單的線性規劃原理, 並舉例說明。

#### 5. 二次函數

一次函數講完後, 按下去再講二次函數, 爲了介紹函數概念, 這樣可收到打鐵趁熱之效。

- 1° 二次函數之定義。配方法。
- 2° 二次函數之圖形。在此地順便介紹拋物線之頂點, 軸等概念。
- 3° 利用配方法及觀察圖形 (拋物線) 來討論二次函數的最大值, 最小值。
- 4° 二次函數  $y = ax^2 + bx + c$  與二次方程式  $ax^2 + bx + c = 0$  之根的關係。
- 5° 二次函數  $y = ax^2 + bx + c$  與二次不等式  $ax^2 + bx + c > 0$  (或  $< 0$ ) 間的關係。
- 6° 正定符號 (或負定符號) 之說明及討論。

#### 6. 多項式與有理式

使用文字符號以後, 總須要有一機會來做有系統的整理工作, 此章的用意在此, 所以在敘述方面難免有「形式化」的地方。

- 1° 多項式之定義及基本運算, 比較係數原理。
- 2° 因式, 倍式, 餘式定理, 除法定理 (Euclidean algorithm), 最大公約式與輾轉相除法, 綜合除法, 二項定理之特例  $(x+1)^n$  之展開。
- 3° 多項式函數及其零點, 一般代數方程式及代數基本定理, 實係數方程式之虛根成對的事實要提到。
- 4° 有理式及其運算。
- 5° 分項分式。

#### 7. 三角函數

從複習國中的教材開始, 漸次引入一般角的概念, 始有三角函數觀念之確立。特別的, 我們有必要指出其週期。當然也需要強調三角在測量上的應用價值。

- 1° 銳角的三角比, 及基本恒等式  $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$  等 (商高定理), 餘弦與正射影。
- 2° 一般角的度量。正弦, 餘弦, 正切函數之定義, 週期及其圖形等。

- 3° 三角形上之應用。包括正弦定理，餘弦定理，面積定理。
- 4° 簡易測量問題及三角函數表之利用。

## 8. 平面上的向量

把向量分為二維，三維來講，可能不很好。不過，在這裏，我們的目的是「在基本的三角函數後，引進向量的內積，繼而講述三角函數的和角公式」。所以我們先講平面上的向量，因為這樣已足夠用了，且從介紹向量的方面來說，這樣也恰好告一段落。

- 1° 向量及其基本運算(加，減，係數積)。
- 2° 自然基底，及向量之分量。
- 3° 內積，商高定理，餘弦定律之複習，內積之分量表示，Cauchy 不等式。
- 4° 直線之參數式表示，參數之意義。
- 5° 點與直線間之距離。

## 9. 三角函數之和角公式

利用向量的內積，導出和角公式後，順便介紹一些三角上常用之恒等式，當然在這裏，要避免傳統式的三角恒等式的證明（繁雜，無味的），但是也得提供最起碼的三角恒等式的知識與技巧，同時我們也介紹定理，以示和角公式在複數上的應用。

- 1° 和角公式（正弦，餘弦，正切）。
- 2° 倍角公式，半角公式等。
- 3° 波動之合成，即
- $$a\sin\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\theta + \lambda)$$
- 藉助圖形來說明，可易收效。
- 4° 複數之極式表示，De Moivre 定理，及 $n$ 之 $n$ 次方根。
- 5° 和，差與積互化公式。

## 10. 圓錐曲線

此章是關於圓錐曲線的初步介紹，僅限於標準式之討論，最多也是將拋物線之頂點，或者是橢圓（雙曲線）之中心經過平移到一般的點 $(p, q)$ 為止，但不涉及坐標變換！）如以 $y - q = a(x - p)^2$  或  $(x - p)^2/a^2 \pm (y - q)^2/b^2 = 1$  為限。

- 1° 拋物線，焦點，準線等。
- 2° 橢圓，焦點及其特性。
- 3° 雙曲線及其特性。
- 4° 圓錐截痕。此節可能涉及到空間，立體觀念，但為說明圓錐曲線之來源，以及對於圓錐曲線之統一觀點，這種說明似乎有其必要。

## 11. 數列與級數

- 1° 等差，等比數列及其求和公式（順便介紹 $\Sigma$ 符號），算術平均，幾何平均。
- 2° 一般有限項級數之表示法，及其求和問題（如 $\Sigma n, \Sigma n^2, \Sigma n^3$ 等級數），順便介紹數學歸納法。
- 3° 數列及其極限。收斂發散之討論。
- 4° 無窮等比級數（循環小數可化為分數之說明）。

## 12. 指數函數與對數函數

- 1° 指數定律。指數定義之推廣。
- 2° 指數函數及其基本性質，其圖形。
- 3° 對數函數及其基本性質，其圖形。
- 4° 對數之計算及對數表之用法。

## 114 數學傳播 [資料類]

### 13. 排列, 組合

- 1° 排列 (以基本的排列問題為原則, 避免繁雜的問題)。
- 2° 組合 (同上)。
- 3° 二項定理, 二項係數。
- 4° 多項定理, 多項係數。

### 14. 機率

- 1° 古典機率泛義。
- 2° 獨立事件與相關事件。
- 3° 條件機率, Bayes 定理。
- 4° 隨機變數。
- 5° 期望值。
- 6° 變異數。

### 15. 記述統計

- 1° 統計隨機抽樣涵義, 隨機數表的使用。
- 2° 次數分配的表示法。
- 3° 位置量數 (樣本平均數, 中位數, 眾數)
- 4° 離散量數 (偏差, 標準偏差)
- 5° 相關係數。

### 16. 矩陣

此章僅限於介紹矩陣及基本運算為止, 以列表, 記帳等實用為其目的, 尤以二階三階為主。

- 1° 矩陣之意義 (包括列陣, 行陣, 方陣)。
- 2° 矩陣之加減法, 係數積及其應用。
- 3° 矩陣之乘法及其應用。
- 4° 逆方陣。
- 5° 聯立一次方程式之矩陣表示法。

### 17. 向量與空間幾何

- 1° 空間坐標。空間的向量及其基本運算。向量的分量, 距離公式, 內積。
- 2° 直線, 平面之方程式 (包括參數式), 球面之方程式及其切平面。
- 3° 線性獨立及線性相關及其應用。
- 4° 外積, 平行六面體之體積, 三階行列式及其幾何意義。

以上是大家經過幾次討論後, 所得到的適合於高一, 二年級的數學課程大綱。當然這是所謂的最低的要求標準, 為了這最低要求標準, 被刪去的教材也不少, 其中, 在數學上算是基本的, 重要的, 有用的教材也有, 例如:

- 1° 線性映射, 固有值。
- 2° 隨機變數, 機率變數。
- 3° 微積分初步。

等是, 刪去後, 覺得有一點可惜, 不過為了減輕學生負擔, 這是不得已的。