瓦斯球塔上的爬梯

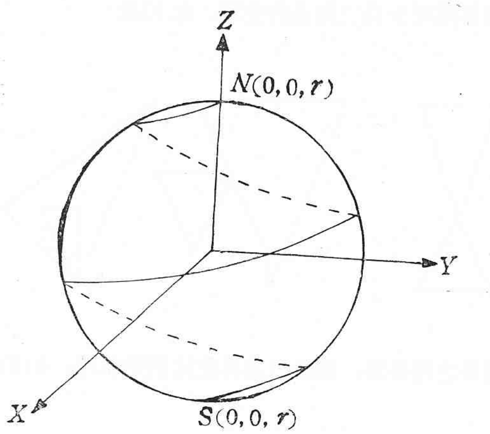
張鎮華　解

本題解答由本所同仁張鎮華先生提供

設球半徑為 r，以南北極方向為 z 軸，球心為原點，可建立一座標系如圖一：
梯子可視為由 S 至 N 的一條曲線：

$$\Gamma(t)=(x(t),y(t),z(t)),\quad t\in[0,1]$$

$$\Gamma(0)=S=(0,0,r),\ \Gamma(1)=N=(0,0,r)$$



圖一

所謂「梯子時時以 θ 度斜角沿球面盤旋而上」的「斜角」有各種解釋，最自然的有兩種: (一)曲線上任一點的切線與 xy 平面的夾角，(二)曲線上任一點的切線與該點所在緯圈的夾角。分別討論如下。

(一) 斜角表示切線與 xy 平面夾角

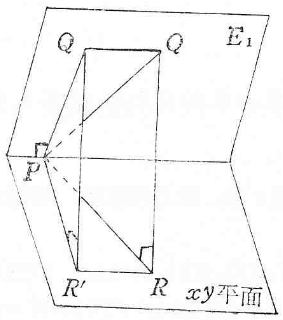
如果有這樣的曲線（梯子）存在的話，其長度可用公式 $L=\int_0^1\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2}\,dt$ 求得。曲線上任意點 $\Gamma(t)$ 的切向量 $\Gamma'(t)=(x'(t),y'(t),z'(t))$ 和 xy 平面夾定角 θ，也就是和 Z 軸夾定角 $\pi/2-\theta$，由 $\Gamma'(t)$ 和 Z 軸正向單位向量 $(0,0,1)$ 內積（或用餘弦定理）可得 $z'(t)=(x'(t),\ y'(t),\ z'(t))\cdot(0,\ 0,\ 1)=\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2}\cos(\pi/2-\theta)$ 即 $\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2}=\csc\theta z'(t)$。因此梯長

$$L=\int_0^1\csc\theta z'(t)dt=\csc\theta z(t)\Big|_0^1=2r\csc\theta$$

當 $r=15$ 公尺，$\theta=30°$ 時，梯長正如乙生所求 $L=60$ 公尺。

或者用更直覺的看法，想像一動點以等速 v 由 S 沿曲線 Γ 移動到 N，所花時間爲 L/v。在這同時，動點在球直徑 $\overline{SN}$ 上的「投影」亦以等速 $v\sin\theta$ 由 S 移動到 N（因爲梯子和 Z 軸夾定角 $\pi/2-\theta$），費時亦爲 L/v，但球的直徑長 $2r$，故 $L/v=2r/v\sin\theta$，求得 $L=2r\csc\theta$.

不管用投影的方法，或者將梯子拉直，甚至用公式求長，所得的結果都是一樣。但這是我們先假設梯子存在才求得的結果，事實上這樣的梯子根本不存在。一個簡單的看法是這樣的，曲線 $\Gamma(t)$ 上各點的切向量 $\Gamma'(t)$ 知 xy 平面的夾角是一連續函數 $f(t)$，$t\in[0,1]$，在南北極時，這夾角到達 $0°$，即是 $f(0)=f(1)=0$，所以由函數的連續性，在南北極附近可以找到梯子的一段，其夾角都小過定角 θ，造成矛盾。



圖二

另一種想法，梯子在緯度爲 w° 的點 P 作球的切平面 E_1，其和 xy 平面夾角爲$(90-w)^\circ$，梯子切向量 $\overrightarrow{PQ}$ 和 xy 平面夾角爲$\angle QPR$，兩平面的夾角$\angle Q'PR'=(90-w)^\circ$，如圖二所示。

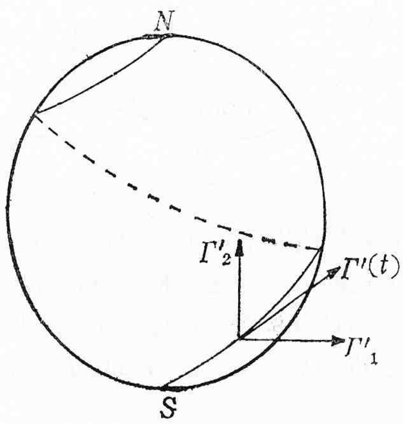
其中 $\overline{QQ'}\perp\overline{PQ'}$，$R'$ 與 R 分別爲 Q' 與 Q 之垂足，則由圖知，$Q'QRR'$ 爲平行四邊形，因此 $\overline{Q'R'}=\overline{QR}$，又因 $\overline{PR}>\overline{PR'}$ 且觀察兩直角三角形 $PQ'R'$ 與 PQR 則知 $\overline{PR}$ 對應之角 $\angle PQR$ 大於 $\overline{PR'}$ 對應之角 $\angle PQ'R'$，因此 $\angle QPR<\angle Q'PR'$。如果要求梯子和 xy 平面夾角 θ 一定要 $\theta\leq 90-w$，i.e. $w\leq 90-\theta$，也就是梯子最多可由南緯 $90-\theta$ 度，做到北緯 $90-\theta$ 度。

㈡ **斜角表示切線與緯圈夾角**

不管曲線的條件如何，長度公式還是可用

$$L=\int_1^1||\Gamma'(t)||dt=\int_0^1\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2}dt$$

只是曲線 $\Gamma(t)$ 的式子有所改變罷了。



圖三

如圖三，考慮曲線上一點 $P=\Gamma(t)=(x(t),y(t),z(t))$，

過P點曲線的切向量 $\Gamma'(t)=(x'(t),y'(t),z'(t))$，

過P點緯圈的切向量 $\Gamma_1'(t)=(y(t),-x(t),0)$，

過P點經圈的切向量 $\Gamma_2'(t)=\left(x(t),y(t),-\dfrac{x(t)^2+y(t)^2}{z(t)}\right)$.

由於 $\Gamma'(t)$ 和 $\Gamma_1'(t)$ 恆夾定角θ，$\Gamma'(t)$ 和 $\Gamma_2'(t)$ 夾定角 $\pi/2-\theta$，利用內積可以得下列微分方程組:

$$(甲)\quad\begin{cases}x^2+y^2+z^2=r^2\\ x'y-xy'=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\sqrt{x^2+y^2}\cos\theta\\ x'x+y'y-z'\dfrac{x^2+y^2}{z}=\sqrt{'^2+y'^2+z'^2}\cdot r\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{z^2}}\sin\theta\end{cases}$$

將第一式微分減去第三式，整理後可得:

$$\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2}=\csc\theta\frac{rz'(t)}{\sqrt{r^2-z(t)^2}}$$

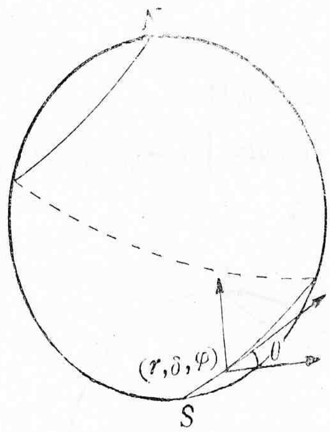
代入公式

$$L=\int_0^1\csc\theta\frac{rz'(t)}{\sqrt{r^2-z(t)^2}}dt$$

$$=\int_{z(0)=-r}^{z(1)=r}\csc\theta\frac{dz}{\sqrt{r^2-z^2}}=\csc\theta\cdot\sin^{-1}\frac{z}{r}\Big|_{-r}^{r}=\pi r\csc\theta$$

同樣可以用「投影」的方法，將梯上等速運動的動點投影到經圈上（因爲曲線和緯圈夾定角 θ，和經圈夾定角 $\pi/2-\theta$），可以算出梯長是經圈的 $\csc\theta$ 倍，但經圈卽是半個大圓，其長爲 πr，故梯長 $\pi r\csc\theta$ 亦可簡單算出。

眞正去解微分方程組（甲）（可將參數 $t\in[0,1]$ 改爲以梯長 $s\in[0,L]$ 爲參數，則可化簡（甲），便於解），可以知道曲線確存在。



圖四

或者利用球面座標 (r,δ,φ)，如圖四，此時 $(x,y,z)=(r\cos\varphi\sin\delta, r\cos\varphi\cos\delta, r\sin\varphi)$。考慮梯上沿梯以等速運動的點，在經緯方向的分速度亦爲等速，爲方便計，我們假定時間從 $-\pi/2$ 到 $\pi/2$，則 $\varphi\in[-\pi/2,\pi/2]$ 恰可用來做爲時間參數。此時經圈方向之分速爲爲 r 單位，緯圈方向之分速爲 $r\cot\theta$ 單位，在 $d\varphi$ 時間，緯圈走 $r\cot\theta\, d\varphi$ 長，此時緯圈半徑爲 $r\cos\varphi$，故 $d\delta=r\cot\theta d\varphi/r\cos\varphi$，則

$$\delta=\int d\delta=\int\frac{\cot\theta d\varphi}{\cos\varphi}=\cot\theta\cdot ln\left|\tan\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$$

所以

$$(\text{乙})\quad \begin{cases} x=r\cos\varphi\sin\left(\cot\theta\cdot ln\left|\tan\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|\right)\\ y=r\cos\varphi\cos\left(\cot\theta\cdot ln\left|\tan\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|\right)\\ z=r\sin\varphi, \qquad \varphi\in\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$

由實際驗算可知此曲線合於所求。

〔註〕（乙）式中 x 和 y 均含有一項 $\delta=\cot\theta\ln|\tan(\varphi/2+\pi/4)|$，當 φ 越近 $\pm\pi/2$ 時（也就是梯子上的點接近 N 和 S 時），此項趨近無窮大，這表示實際上梯子繞了「無窮多圈」的意思。當做數學式子這並無妨，但眞正的梯子卻不可如此。或者，實用上，在靠近球頂的一段梯子可直接用大圓方向卽可。而且，事實上，梯子也不能由 S 爬起，根據編輯部實際到瓦斯公司觀察的結果，南半球的梯子是一些直接從赤道垂直到地面的梯子（不在球面上）。