面積問題

汪治平　解

本解答由問題原作者雄中汪治平同學提供，編輯部並於文末附了一些評註。

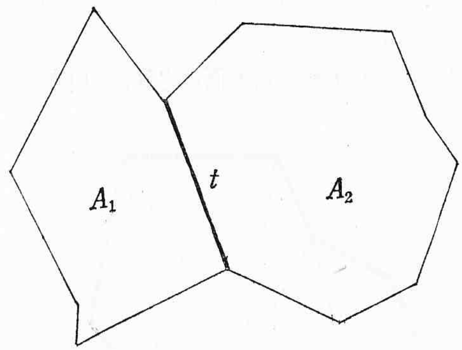
以格子點爲頂點的多邊形封閉區域，若其邊界點數爲 p ，內部點爲 n ，則其面積爲

$$A=n+\frac{p}{2}-1$$

證明如下:

輔助定理: 設封閉區域 A_1, A_2 均滿足“面積$=n+p/2-1$”之公式，且 A_1, A_2 有一公共邊，則由 A_1, A_2 聯集所成的封閉區域 A_3 必滿足“面積$=n+p/2-1$”。

證明: 假設公共邊上有 t 個格子點（所謂格子點卽坐標平面上 x 和 y 坐標皆爲整數之點），如下圖:



則 $\quad p_3=p_1+p_2-2t+2 \qquad n_3=n+n_2+t\,_1-2$

$$n_3+\frac{p^3}{2}-1=n_1+n_2+\frac{p_1+p_2}{2}+t-t-2+1-1$$

$$=\left(n_1+\frac{p_1}{2}-1\right)+\left(n_2+\frac{p_2}{2}-1\right)=A_3\text{ 的面積。}$$

今以矩形，直角三角形及任意三角形分別討論之。

(1) 設封閉區域為矩形且各邊均與坐標軸垂直或平行，令其長寬各為 h, k.

則 $\qquad n=(h-1)(k-1) \qquad p=2(h+k)$

$$n+\frac{p}{2}-1=hk-h-k+h+k+1-1=hk.=\text{它的面積。}$$

故滿足(1)的矩形對公式成立。

(2) 設直角三角形直角的兩鄰邊分別為 h, k，且與坐標軸平行或垂直，且令斜邊上有 t 個格子點。

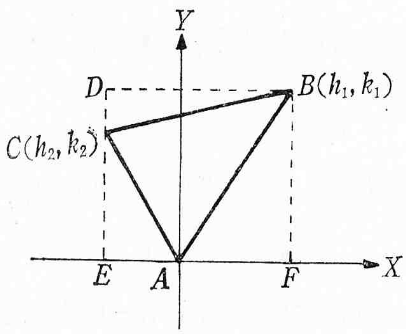
則
$$p=h+k+t-1$$
$$n=\frac{(h-1)(k-1)-t+2}{2}$$

$$n+\frac{p}{2}-1=\frac{(n-1)(k-1)+h+k-1+t-t+2}{2}-1=\frac{1}{2}h\cdot k=\text{它的面積。}$$

故滿足(2)的直角三角形對公式成立。

(3) 現在我們來證公式對任意三角均成立。

設三角 ABC，令 A 為原點，則可令 $B(h_1, k_1), C(h_2, k_2)$，h, k 均為整數，則我們可以作一個外接矩形。



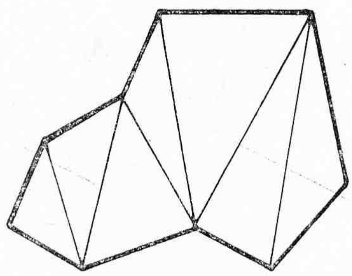
由(1)知矩形 $DEFB$ 滿足公式，由(2)知 $\triangle AEC$ 滿足公式。

再回頭看輔助定理的證明過程，得知五邊形 $CAFBD$ 滿足公式。

同理四邊形 $CABD$ 滿足公式，層層推演下去得 $\triangle ABC$ 滿足公式。

故任意三角形均滿足公式。

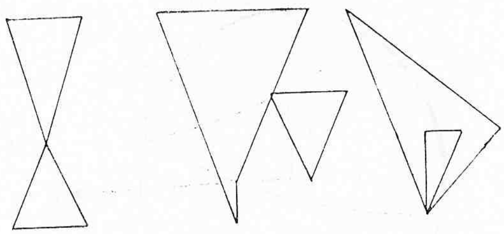
但任意 n 邊形封閉區域可表為 k 個三角形面積之和，如下圖：



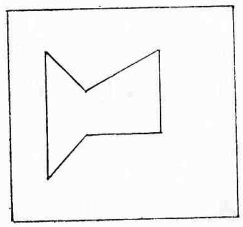
由輔助定理知：**任一封閉區域均滿足該公式。**

〔**編者註**〕考慮以下兩種特殊情況之封閉區域：

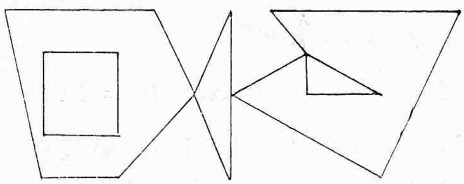
⑴ 封閉區域有一邊界點至少為三個邊的交點，如下圖：



⑵ 封閉區域有兩相異之邊界點，無法以邊界使此兩點相連，如下圖之中空形封閉區域：



或是⑴，⑵兩種特殊情況兼而有之的封閉區域，如下圖：



本解之面積公式 $A=n+p/2-1$ 對於上述之特殊封閉區域，均無法適用。事實上，這類特殊封閉區域的面積，若僅以邊界及內部的格子點數為已知條件，實難找出一個一般法則。