最小三角形問題

（徵答對象：職業、年齡不拘）

張 鎭 華

本問題提供者爲本所同仁

朋友齊君的問題：給定一個具有單位面積的正方形，對其內任何九個不全在一直線上的點，必可找到其中三點 A, B, C，此三點不共直線，且其所成三角形的面積 $\mathrm{area}(\triangle ABC) \leq 1/8$。

事實上，利用放大縮小的概念，不難將正方形改爲一般的距形，這樣的做法，且有助於證明。首先，對給定的矩形 $\square PQRS$，我們可以定義：

$$S(n,\square PQRS)=\{T:T\text{ 是 }\square PQRS\text{ 內 }n\text{ 個點所成的集合，而且 }T\text{ 中至少有三點不共直線。}\}$$

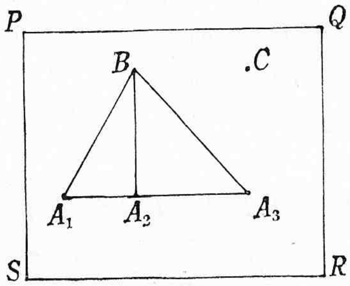
於是我們的問題可以改爲：將任一 $T\in S(n,\square PQRS)$，存在不共直線的三點 $A,B,C\in T$ 使得 $\text{area}(\triangle ABC)\leq x_n\cdot\text{area}(\square PQRS)$。爲了證明 $n=9$ 的情況，我們先得證明 $n=3$ 及 $n=5$，其中的 $x_3=1/2, x_5=1/4, x_9=1/8$.

【證明】

㈠ $n=3$，就是證明矩形內三角形面積≤矩形面積之半。

㈡ $n=5$，分兩種情況討論：

(1) T 內有三點 A_1,A_2,A_3 共線，如下圖：

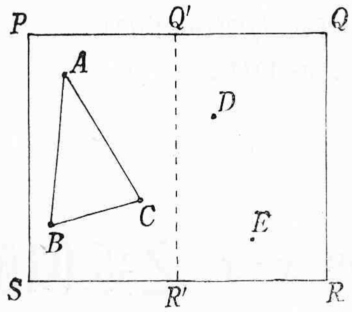


找一點 B 和此三點不共線，由 $n=3$ 可知 $\text{area}(\triangle BA_1A_3)\leq\text{area}(\square PQRS)/2$.

取 $\triangle BA_1A_2$ 和 $\triangle BA_2A_3$ 中面積較小者（設爲 $\triangle BA_iA_{i+1}$），

則 $\text{area}(\triangle BA_iA_{i+1})\leq\text{area}(\triangle BA_1A_3)/2\leq\text{area}(\square PQRS)/4$.

(2) T 內任三點不共線，如下圖：



將矩形平分爲二等面積矩形，$\square PQ'R'S$ 和 $\square Q'QRR'$，其中至少有一矩形含有 T 的 3 個點，設爲 $\square PQ'R'S$，則此不共線三點 A,B,C 所成三角形的面積

$$\text{area}(\triangle ABC)\leq\text{area}(\square PQ'R'S)/2\leq\text{area}(\square PQRS)/4\text{。}$$

㈢ $n=9$，和㈡相似也可以分成兩種情況討論：

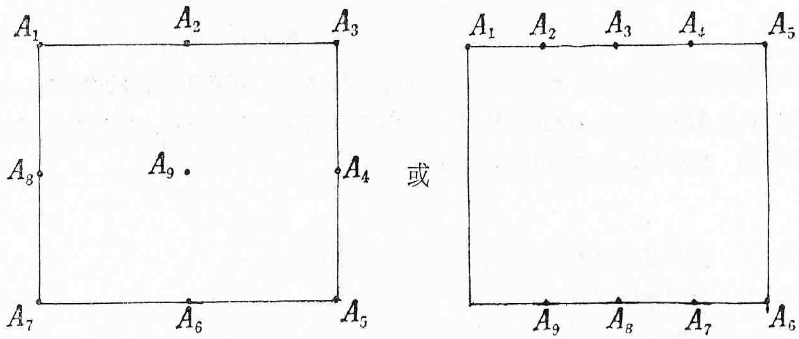
(1) T 內有 5 點共線。

(2) T 內任 5 點不共線，此時可以將矩形分成兩半證明。

到此，我們不難將 n 推廣到一般，證明 $x_n=1/2[(n-1)/2]$〔註〕，或卽 $x_{2m+1}=x_{2m+2}=1/2m$，上述命題成立。

〔註〕"[ ]"表高斯記號。

當然，你會問，這樣的 x_n 是否已經是最小? 於是，求這樣的 x_n 中的最小值 ρ_n 亦成一大問題。如果將九點排成下圖，就可以發現 $n=9$ 時，選 $x_9=1/8$ 的確是不能再小的了。



另有一方法也可以表示 ρ_n; 對既定的 $S(n,\square PQRS)$ 中的 T，

定義 $\rho(T)=\min\{\text{area}(\triangle ABC)/\text{area}(\square PQRS): A,B,C$ 爲 T 中不共線三點$\}$

$\rho_n=\sup\{\rho(T): T\in S(n,\square PQRS)\}$

此值和矩形 $\square PQRS$ 形狀無關。

同樣的方法，如果定義:

$\bar{S}(n,\square PQRS)=\{T: T$ 是 $\square PQRS$ 內 n 個點所成的集合，而且 T 中任三點不共直線。$\}$

$\bar{\rho}_n=\sup\{\rho(T): T\in\bar{S}(n,\square PQRS)\}$

此值亦和矩形 $\square PQRS$ 形狀無關。

很容易可以知道 $\bar{\rho}_3=\rho_3$，$\bar{\rho}_4=\rho_5$，但緊接著下來的 $\bar{\rho}_n$ 則很難求，甚至 $\bar{\rho}_5$!

問題:

(1) 矩形內任意三角形面積≤矩形面積之半。

(2) 將任意 $n\geq 3$，$T\in S(n,\ \square PQRS)$，證明存在不共直線三點 $A,B,C\in T$，使其面積 $\text{area}(\triangle ABC)\leq\text{area}(\square PQRS)/2[(n-1)/2]$。

(3) 對任意 $n\geq 3$，$\rho_n=1/2[n-1)/2]$.

(4) 對任意 $n\geq 3$，$\bar{\rho}_n=??$