淺談對稱

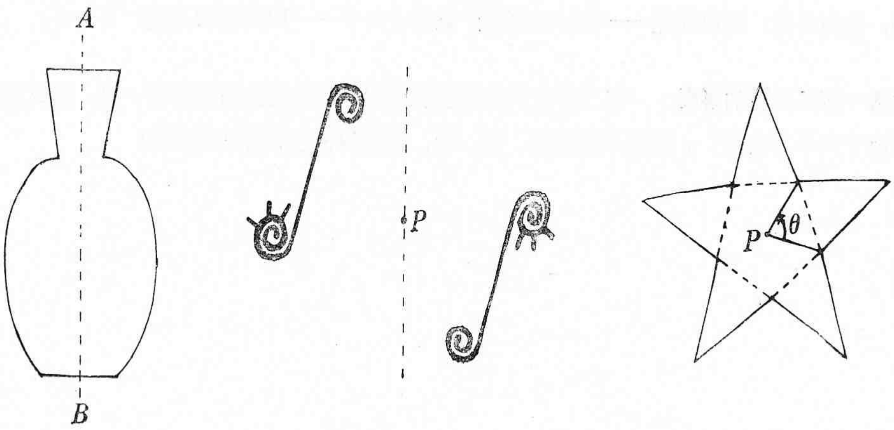
魏慶榮

本文作者原任教於臺大數學系，去年八月赴美留學，現就讀於哥倫比亞大學數理統計系。

§1. 什麼是對稱?

我們常聽人說，“自然是對稱的”，像天上的飛禽，地下的走獸，高聳入雲的樹木，脈絡分明的綠葉，總覺得勻稱可愛，這又有什麼奧秘呢? 其實人為的產品，像桌上的玻璃杯子，身上穿的棉質襯衣，路上跑的汽車，水上浮的輪船，天空飛的航機，那樣不也均衡相稱? 藝術家總愛說，這是“對稱美”然而，什麼是對稱呢?

我們畫幾個簡單的圖看看吧。



(一) (二) (三)

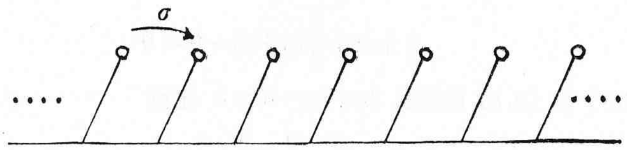
在圖(一)如果把與 $\overleftrightarrow{AB}$ 等距的點互調，我們發現圖形不變。在圖(二)虛線分開的兩部分，如果把與 P 等距的點互調，我們也發現圖形不變。在圖(三)，以 P 點為心，左轉 θ 角，圖形也一樣不變。因此有位教授叫 H. Weyl (魏爾) 就說: “要是能夠在某物上有種操作，而且操作後該物看來不變。那我們就說，該物是對稱的。”

§2. 運動羣

我們用數學的語言來講解魏爾的意思。設 S 表示該物，$\sigma: S \longrightarrow S$，魏爾認為要是 $\sigma(S)=S$，那麼我們就可以說 S 對 σ 而言是對稱的〔註一〕。在 §1 裏，我們所謂的互調，左轉 θ 角，都可以代表這裏的 σ。

〔註一〕 這裏我們並沒把“看來不變”這句話用數學語言譯得很好，這句話牽涉到 S 的結構，而在 σ 變化下，這個結構不變。

從這個定義，我們發現，$\sigma^2(S)=S, \sigma^3(S)=S, \cdots\cdots$。要是 σ 是一對一的話，那麼 $\sigma^{-1}(S)=S, \sigma^{-2}(S)=S, \cdots\cdots$。換句話說，$S$ 在 $G=\{\sigma^n|n=0,\pm1,\pm2,\ \cdots\cdots\}$〔註二〕裏任一元素作用下，依然不變。這個$G$，有些人叫它**運動羣**。$G$有時含無限個元素，譬如



是個**平移**的對稱圖形，它所代表的G就是無限的了。

但是G並非總是無限的，例如在圖(三)中，我們發現$\sigma^5=\sigma^0$, $\sigma^4=\sigma^{-1}$, 因此$G=\{\sigma^0,\sigma^1,\sigma^2,\sigma^3,\sigma^4\}$，而在圖(二)和圖(一)中，$\sigma_2=\sigma^0$，因此 $G=\{\sigma^0,\sigma\}$。

§3. 尋找另一半

有了**運動羣**的觀念後，如何將一個圖形**補足**成一個**對稱**圖形的問題就有辦法解決了。這個問題是這樣子的: 設 S_1 是V的子集，$\sigma: V\longrightarrow V$，問 S_1 如何在 V 中取些元素，使得取成後的集合對σ是對稱的?

我們不準備談一般狀況，只談 $G=\{\sigma^0,\sigma\}$ 的情形。在這種情形下〔註三〕，$S=S_1\subset\sigma(S_1)$ 就是個對稱圖形，〔$\sigma(S)=\sigma(S_1)\cup\sigma^2(S_1)=\sigma(S_1)\cup S_1$〕。換句話說，現在變成**尋找另一半** $\sigma(S_1)$ 的問題了。

§4. 曲線的對稱圖形

現在把討論的範圍，約束在平面E上，$\sigma: E\longrightarrow E$，而且 $\sigma^2=\sigma^0$。我們要問，要是 S_1 由方程式 $f(x,y)=0$ 所描述，那麼它的另一半 $\sigma(S_1)$ 可由方程式描述嗎? 這個問題有個正面答案: 設 $\sigma((x,y))=(u(x,y),v(x,y))$，**那麼** $g(x,y)=f(u(x,y),v(x,y))=0$ **便是描述** $\sigma(S_1)$ **的方程式**。

理由是這樣子的: 設 $(x_1,y_1)\in\sigma(S_1)$。那麼就有個 $(x,y)\in S_1$，使得 $\sigma((x,y))=(x_1,y_1)$ 由於 $\sigma^{-1}=\sigma$， $\therefore\ \sigma(x_1,y_1)=(x,y)$，由定義知 $\sigma(x_1,y_1)=(u(x_1,y_1),\ v(x_1,y_1))$，但是 $f(x,y)=0$ $\therefore\ f(u(x_1,y_1),\ v(x_1,y_1))=g(x_1,y_1)=0$。反過來，假如 $g(x_1,y_1)=0$，依定義 $f(u(x_1,y_1),v(x_1,y_1))=0$ $\therefore\ ((u(x_1,y_1),v(x_1,y_1))\in S_1$，且 $(x_1,y_1)=\sigma^2((x_1,y_1))=\sigma(u(x_1,y_1),v(x_1,y_1))\in\sigma(S_1)$

§5. 鏡像與孔像

我們把§4. 的論證落實到實例上:

例 1. 鏡像

如圖(一)的對稱，有人稱爲**軸對稱**，因爲這種對稱類似於鏡裏鏡外的物象，因此這種求對稱圖形的題目，我們叫它做求**鏡像**。

〔註二〕σ° 代表**等同函數**，即 $\sigma^\circ(s)=s$, $\forall s\in S$

〔註三〕在一般狀況下，$S=\bigcup_{n\in Z}\sigma^n(S_1)$ 爲對稱圖形（Z表整數羣）。

題目　求$x^2+xy+4x+3=0$ 對 $2x+3y-6=0$ 的鏡像。

(一) 設 $\sigma(x,y)=(u,v)=(u(x,y),v(x,y))$

那麼 $\left(\dfrac{u+x}{2},\ \dfrac{y+v}{2}\right)$ 在 $2x+3y-6=0$ 上，

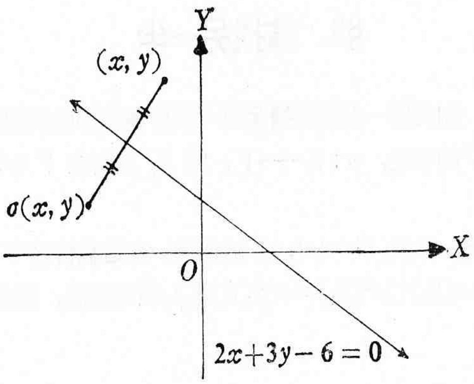
即
$$u+x+\frac{3}{2}(y+v)-6=0 \qquad (甲)$$

又過 (x,y) 和 (u,v) 的線與 $2x+3y-6=0$ 垂直

因此
$$\frac{y-v}{x-u}=\frac{3}{2} \qquad (乙)$$

即
$$3x-3u=2y-2v$$

由（甲）、（乙）解得　$u=\dfrac{1}{13}[5x-12y+24]$, $v=-\dfrac{1}{13}[36-12x-5y]$



(二) 故鏡像爲 $u(x,y)^2+u(x,y)+4u(x,y)+3=0$

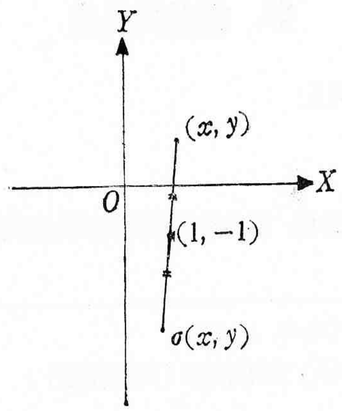
即
$$\frac{1}{169}[5x-12y+24]^2+\frac{1}{169}[5x-12y+24]\cdot[36-12x-5y]$$
$$+\frac{4}{13}[5x-12y+24]+3=0$$

化簡就得我們的要求。

例 2. 孔像

如圖(二)的對稱，有人稱之爲**心對稱**，因爲這種對稱類似**針孔現象**，因此這種求對稱圖形的題目，我們叫它做求**孔像**。

題目　求 $4x+3y-7=0$ 對 $(1,-1)$ 的孔像。



(一) 設 $\sigma(x,y)=(u,v)=(u(x,y),v(x,y))$

則 $$\frac{x+u}{2}=1,\quad \frac{y+v}{2}=-1$$

得 $$u=2-x,\quad v=-y-2$$

(二) 所以孔像是 $$4\cdot(2-x)+3(-y-2)-7=0$$

化簡得 $$8x+3y+5=0$$

§6. 討 論

一般求對稱圖形，常以取點方式求得，例如求直線的鏡像，則取直線上兩點，然後求對應點，再由對應點決定對稱的直線。這種取點方法有**根本的弱點**；

（甲）對一般的二次曲線需要取五點，（因爲五點才能決定一般的二次曲線），更高次的曲線要取的點則更多了，不如我們的辦法有了個澈底的解決。

（乙）取點方法，有個根本的假設，那就是對稱圖形和原圖形是屬於同一類的，直線對直線，橢圓對橢圓，這是需要經過證明的，而且對一般的 σ 並不見得正確。

一般歐氏空面，對 σ 我們要求它是剛體運動，即保持距離的運動，在這種狀況下，取點方法的基本假設是正確的，如§5. 所講的兩種對稱都是剛體運動。