淺談「四色問題」

曹亮吉

困擾數學界一個多世紀的「四色臆測」終於去夏被證明成立了。在這過程中，計算機的配合使用實居功厥偉。

本文原載於科學月刊65年12月及66年1月號，作者曾以此題多處演講（包括本所）。現本刊徵得原作者及「科月」同意轉載於此，以廣傳播。登載前作者並做了若干訂正。

曹先生於去年返回國內，現任教於臺大數學系。

——編者按

一、緒言

去年夏天，全世界的數學家們起了一陣騷動，因爲百多年來懸疑未決的四色問題被美國伊利諾大學的兩位數學家阿倍爾（K. Appel）及哈根（W. Haken）解決了。

在彩色的地圖上或中學生的地理作業簿裏，我們總是習慣地把相鄰的兩區（兩國、兩省或兩縣等）塗以不相同的兩種顏色。雖然世界上有一百多個國家，但根據經驗，我們知道只要幾種顏色就夠了。那麼最少要幾種呢？四色問題就是針對這個問題而給的一個臆測。它說：任意分區地圖，無論是在平面上的或在球面上的，只要用四種顏色就夠了。

這個臆測在一百多年前就被提出來，中間經過無數數學家的努力，到了去年才算有了嚴格的證明。

以下，我們要談談這個問題的來龍去脈、解決這個問題所遭到的困難、以及最後解決這些困難的經過情形。

附帶地，我們也要談到二色定理、三色定理及五色定理。

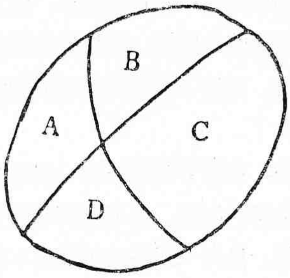
在附錄一裏我們提供了兩個很好玩的四色問題遊戲。在附錄二，我們臚列了四色問題的編年史。在附錄三裏，我們證明了**歐拉定理。它是簡化着色問題的最主要工具**。在附錄四，我們談了一些其他曲面上的着色問題。最後，我們列了一些寫作本文的參考資料。

二、規定

爲了嚴格地談四色問題，我們假定分區地圖要滿足下面的兩個條件。

⑴任何一個地區都必須是連結的。連結的意義是說從地區內的任一點出發，都可以不出邊界，走到該地區內的任何其他的一點。所以最近一次印巴戰爭之前的情形就不符合我們的規定，因爲你從東巴基斯坦走到西巴基斯坦總要向印度借道。但是像梵蒂岡從意大利的內陸挖去了一塊則無所謂，因爲意大利還是連結的。

(2)如果兩區只有有限點相交則不算相鄰。圖一中 A 與 B,D 相鄰，但 C 與不相鄰。

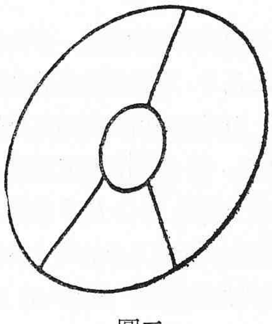


圖一

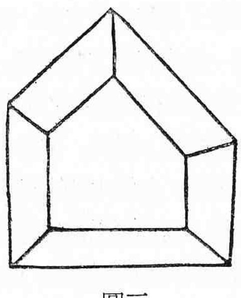
以下，凡是討論如何照規定着色（相鄰兩區要用不同的顏色）的問題，一律稱做著色問題。分區地圖就簡稱做分區圖。

三、初步討論

由圖二，很明顯地，有些分區圖確實是要用四種顏色才夠，因爲在這個例子中，任何一區都和其他三區相鄰。同理，如果我們能造出一分區圖，其中有五區，每區都和其他四區相鄰，則非用五種顏色不可。但事實上不難證明這樣的分區圖並不存在。但這種分區圖的不存在並不表示證明了五色定理——即五種顏色就夠了。這一點是剛入門的人必須小心的地方，因爲有許多人號稱證明了五色定理只是因爲他們證明了那樣的分區圖並不存在。圖三是個好例子。雖然每區只有三個鄰區，但這一地區圖卻要用四種顏色才夠。

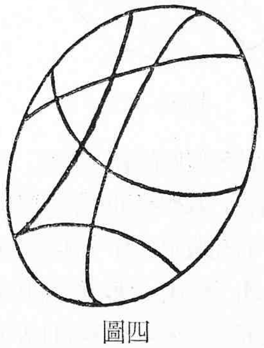


圖二

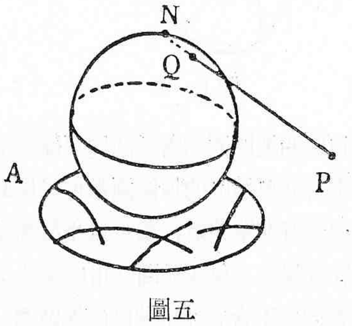


圖三

另外一點值得注意的是，如果我們證明了平面上的四色定理，我們也就證明了球面上的四色定理；反之亦然。理由如下：如圖四，把最外圈的外邊部分也當做一個區（不管它原來是不是一個區）。拿一個球擺在這張地區圖上。假設球面的最高點是 N，則對平面上的任何一點 P，我們可以引直線 NP，交球面於 Q 點（圖五）。在 P 到 Q 這種對應下，本來在地區圖上相鄰的



圖四

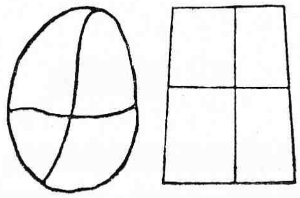


圖五

兩區其在球面上的對應區也相鄰；不相鄰的還是對應到不相鄰的（雖然A區的無窮部分都對應到N點附近，但這並不影響區與區間的相鄰或不相鄰的關係，因爲N點是在A的對應區的內部。）如此，我們在球面上得到了一張相對應的地區圖。如果假定四色定理在球面上成立，則四種顏色在這球面上的對應地區圖上就夠用了。把着了色的對應地區圖對應回到平面上的地區圖，則原來的平面地區圖也只要用四種顏色就夠了。

反之，若從球面上的地區圖出發，我們可選某區的一個內點做N點，而得到一張對應的平面地區圖。同前理，如果假定平面上的四色定理，則可證明球面上的四色定理。

平面到球面的對應當然不只一種。任何一種保持相鄰與不相鄰的對應都可以用來證明平面上的和球面上的四色問題是等價的。同樣道理，就着色問題而言，地區圖的每一區的形狀或其邊界的形狀並不重要；要緊的是相鄰的關係。如圖六的兩地區圖是等價的。



圖六

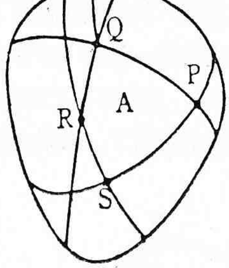
所以着色問題是拓撲學的一個問題。這是解決任何着色問題的基本關鍵。

四、正規圖

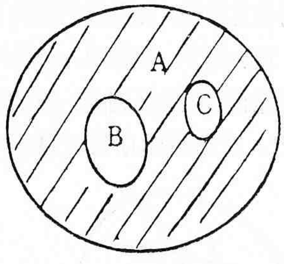
在第三節裏我們做了些簡化的工作。現在我們要介紹正規圖以便做更進一步的簡化工作。

首先，我們固定一些名詞好方便說明。如圖七，P, Q, R, S 等這些邊界的交點就稱爲點，PQ, QR, RS, SP 等這些在相鄰兩點之間的邊界就稱爲邊，而這些邊所圍成的部分就叫做區。若有n邊會於一點，則稱該爲n邊點，如圖七的 P 點是四邊點，而 Q 點則爲五邊點。若有n邊圍成一區則稱該區爲n邊區，如圖七的A是四邊區。A區邊界上的點 P, Q, R, S 稱爲A的頂點。

在介紹正規圖之前，我們要引進單連和非單連這兩個觀念。像圖八中的A（斜線部分）那樣有洞（卽 B 和C）的區叫做非單連區。反之沒有洞的區就叫做單連區，如圖八的 B 和C。



圖七

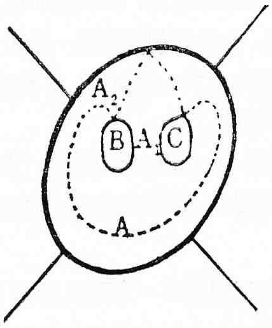


圖八

含有非單連區的地區圖的着色問題可歸於不含非單連區的地區圖的着色問題。其原因如下：

假設所有不含非單連區的地區圖都可以用M種顏色來着色，我們要用歸納法證明任何一張地區圖，無論有或沒有非單連區，都可以用M種顏色來着色。首先假定只有一個非單連區，如圖九的A區（先不管虛線）。現在如圖九用虛線把 A 分成兩區 A_1 和 A_2，使地區圖上虛線的內部和外部各成一張新的、不含有非單連區的地區圖。用M種顏色把這兩張地區圖各自着色（因爲它們

都不含非單連區）。我們可以假設 A_1 和 A_2 的顏色一樣（譬如，如果用的是 $C_1, C_2, \cdots, C_M$ M 種顏色，而 A_1 是用 C_1 這種顏色，A_2 用 C_2 這種顏色，則把虛線外部重新着色，使原來着 C_2 色的改着 C_1 色，原來 C_3 色的改着 C_2 色，……，原來 C_M 色的改着 C_{M-1} 色，原來 C_1 色的改着 C_M 色，則新的着色方法也符合規定，而且 A_1 和 A_2 同爲 C_1 色。）將兩張着過色的地區圖合併，抹去虛線，我們就得到用 M 種顏色着色的原地區圖。

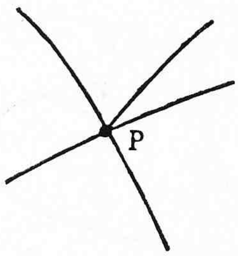


圖九

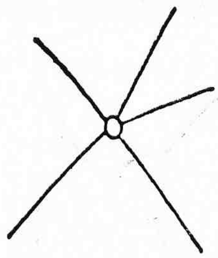
如果原圖有 n 個非單連區，而 A 是其中的一個，則虛線所分成的兩張新地區圖所含非單連區的個數必各少於 n，而使得我們可以用歸納法完成着色的工作。

此後，我們假定地區圖都不含有非單連區。如上所述，這種假定並無損於一般問題的研究。

下面，我們要把點的情形也簡化，使我們的問題都歸於只含三邊點的地區圖。把任何非三邊點（如圖十中的 P）放大成一個小圈圈，如圖十一的樣子。則新的地區圖只含有三邊點了。如果新圖可以用 M 種顏色着色，則把圓圈縮小成 P 點後就得到着了 M 種顏色的原地區圖。



圖十



圖十一

經此討論以後，我們可以假定任一地區圖只含有三邊點，而每區都是單連的。這樣的地區圖叫做正規圖 (regular map)。

五、歷史簡介兼談五色定理

是誰首先提出四色問題的? 沒人知道。但最先有記錄可尋的是一八五二年十月廿三日，英國數學家摩根 (A. de Morgan) 給愛爾蘭數學家漢米頓 (W. Hamilton) 的一封信。他說有個學生跟他提起地圖着色的問題。學生說四色就夠了，但摩根找不到任何的證明。（這個學生後經查出名字叫做 F. Guthrie）四色問題在當時並沒有立即引起大家的注意。直到二十六年後的一八七八年，英國數學家凱利 (A. Cayley)，在他深知四色問題並不簡單之後，在倫敦數學會上提出來才引起熱烈的討論。次年，康沛 (A. Kempe) 宣布證明了四色定理，並且把論文登在美國的一份數學雜誌上。

本以爲就此塵埃落定的四色問題想不到在十一年後又再度引起大家的興趣。原來，在一八九

○年，希悟 (P. Heawood) 發表論文指出康沛在論證上的一個漏洞，因此四色定理再度成爲四色問題。希悟同時修改了康沛的方法，證明了五色定理，即五種顏色就夠了。而且他還討論其他曲面，如輪胎面等的着色問題（附錄四）。

爲了研究着色問題，康沛引進了可約性 (reducibility) 的觀念。我們舉一個例子來說明。若正規圖含有一個三邊區，如圖十二的A。將A縮成一點，得到新的正規圖。如果這個新圖可以用四種顏色着色，則原圖也可以用四種顏色着色，因爲將A塗上和其相鄰三區不同的顏色就好了。

通常對一個有n個區的正規圖，如果我們能找到一個正規圖，其區數少於n，而且如果假設新圖可以用M種顏色着色（假設的內容不一定要真），那麼由此可以推出原圖也可以用M種顏色着色，則稱原地區圖是 M 色可約的。

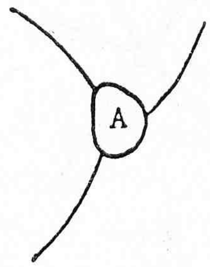
如果正規圖含有某個固定的圖象 (configuration)（如上例中的三邊區）就一定M色可約的，則該固定的圖象稱爲M色可約圖象（因此三邊區是四色可約圖象）M色可約圖象當然是M色可約的。

有一點要注意的是，M色可約正規圖不一定可以用M種顏色來着色。（請讀者試着舉例說明，以便眞正瞭解M色可約的意義。）

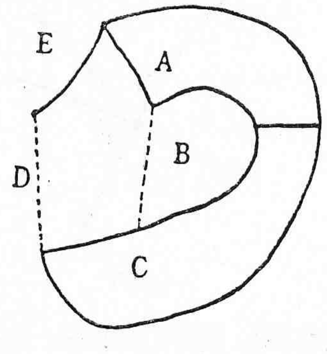
引進可約性的目的是要便於對區的數目做歸納法而得到一些着色定理。

以下我們來看希悟如何用可約性的觀念證明五色定理。很顯然地，仿照前面的例子的論證，任何一個含有一邊區、二邊區、三邊區或四邊區這些圖象的地區圖是五色可約的，也就是說這些圖象都是五色可約圖象。

希悟更證明了五邊區也是五色可約圖象。其證明如下：若A, B, C, D, E（圖十三）是五邊區的五個相鄰區。如果A和C相鄰，則B和D一定不相鄰。所以五區中必有兩個不相鄰，就假定是B和D兩區吧。假如抹去了虛線的新正規圖是可以用五種顏色來着色的，則把五邊區的顏色換成與A, C, D, E四區都不同的顏色，則我們得到了用五種顏色着了色的原圖。



圖十二



圖十三

如果假定了下述的引理，則我們就已經證明了五色定理。

引理：任意正規圖都含有至少一個邊數小於六的區。

我們將在下一節證明這個引理。現在我們用引理來證明五色定理如下：

假設五色定理不成立，則在所有不能用五種顏色着色的正規圖中找一個區數最小的正規圖G。設其區數爲n。前面說過，一邊區、二邊區、三邊區、四邊區和五邊區都是五色可約圖象。現在根據引理G，含有其中的一種圖象，所以G是可約的。但是根據假定，任何區數小於n的正規圖都可以用五種顏色來着色，因此，根據可約性，G又變成可以用五種顏色來着色，是爲矛盾。所以五色定理得證。

回頭來看四色問題。同前理，我們可以證明一邊區、二邊區、三邊區和四邊區都是四色可約圖象，但五邊區就不能用這種方法證明爲四色可約圖象了。所以我們不能用同樣的辦法來證明四

色定理。

當年康沛證明四邊區是四色可約圖象時是用了一種不同的論證方法。他以爲他的方法也可以用來證明五邊區也是四色可約圖象，也就因此證明了四色定理。可是毛病就在這裏。希悟指出康沛的方法不能用到五邊區上。而康沛以後的一百年間也沒有人能把他的方法修正成功，使得「五邊區爲四色可約圖象」這個命題有一個簡單的證明。

根據引理，任何一個正規圖必含有一邊區、二邊區、三邊區、四邊區及五邊區這組圖象的一個成員。這組圖象就是所謂的不可避圖象組（unavoidable set of configurations)的一個例子。一般而言，若任一正規圖必含有某組圖象的一個成員，則該組圖象就叫做不可避圖象組。

五色定理的證明就在於我們找到了一不可避圖象組，而其成員都是五色可約圖象。而四色問題當時失敗了，就是因爲不能找到這樣的一不可避（四色可約）圖象組。

要找一組不可避圖象其實很容易，譬如所有的正規圖全體就是了。問題是我們要的是其成員都是四色可約圖象！所以大家的目標是找成員個數少的不可避圖象組，這樣才有辦法驗證這些成員是否都是四色可約圖象。

在希悟之後的六十年（直到一九五〇年），大家在找四色可約圖象方面有很大的進展，但是在找不可避圖象組方面卻毫無進展，更遑論兩者兼俱了。因此四色問題一直成爲懸案。

在這期間，經多人的努力後（主要是在找可約圖象），溫（Winn)在一九四〇年證明了任何區數小於 36 的地區圖一定可以用四色來着色。

大家想想區數爲 36 的正規圖該有多少種？根據研究人員的經驗，絕對超過 10^{36}種！所以要找四色可約圖象已經非常困難，若要一一驗證一個區數爲 36 的正規圖是否含有某已知的四色可約圖象更談何容易。卽，不可避可約圖象組難找。）

隨着一九五〇年代計算機的漸漸發展，不少數學家寫了各種程式，請計算機幫助尋找四色可約圖象及驗證正規圖的可約性。但是由於上述的天文數字 10^{36}，進展還是不大。

再說得清楚些：首先大家沒有經驗知道該選那一類的不可避圖象組，使得其成員可能都是四色可約圖象，再者就是有了這樣的一組不可避圖象，我們也不能期望它的個數是小到使我們可以用計算機來試其可約性。

在這同時，德國數學家赫希（H. Heesch）除了用計算機來試很多正規圖的可約性之外還提出一套放電（discharging）理論（後文會較詳細地談到；放電只是比擬，與電學無關。）來尋找不可避圖象組，總算在四色問題的研究方面打了一劑強心針。有一次赫希在德國基爾（Kiel）大學的討論會上談他的方法，那時還是學生的哈根也在坐。他聽得津津有味，從此決定了鑽研四色問題的志向。

經過十幾年的努力，哈根在這方面並沒有長足的進展。雖然他簡化了放電理論，而且對一圖象是否四色可約的判斷力也增加了，但對四色問題的展望卻是很悲觀的。

一九七二年五月，哈根在伊利諾大學（他從一九六二年就受聘於該校）的一個討論會上談到四色問題非靠計算機不可，也談到計算機可能會遭遇到的種種困難，最後又表示雖然知道困難所在，但實際上也不知道怎樣克服這些困難云云。此時聽衆之一的邏輯學家阿倍爾舉手說他相信計算機可以解決問題，而且志願與哈根合作。

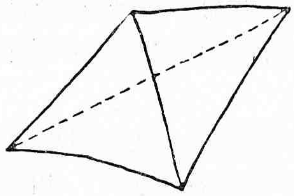
從此以後，哈根更進一步改良放電理論，而阿倍爾則配合放電理論幫着寫各式各樣的程式用計算機幫着找一些成員可能都是四色可約的不可避圖象組。經過四年的努力，他們終於發明了一套解決各種困能的方法。去年六月，一切就緒了，他們用了 1,500 小時計算機時間終於找到了一不可避圖象組，其成員（成員數小於 2000）都是四色可約圖象（而且每個圖象的區數都小於 15），因此證明了四色定理。

六、正規圖公式

爲了證明第五節所提到的引理，我們必須對一正規圖的點數、邊數及區數之間的關係做個徹底的瞭解，而瞭解這個關係的工具則是拓撲學上容易懂但非常有深度的歐拉 (Euler) 定理。

歐拉定理是這樣的：設在球面上有一地區圖，其每一區都是單連的。假設一共有F個區，E個邊和V個點，則我們恒有 $F-E+V=2$。

舉個例來說明這個公式吧。我們可以把一長方體看做球上的一個地區圖，我們有 $F=6$，$E=12$，$V=8$ 而 $F-E+V=6-12+8=2$。再看四面體（圖十四），$F=4$，$E=6$，$V=4$ 而 $F-E+V=4-6+4=2$。



圖十四

在第三節我們說過平面和球面的着色問題是等價的。我們可以只考慮球面上的着色問題。這時歐拉定理就很有用了。其實平面上一樣有歐拉定理（要稍加修改），而且也能用來討論着色問題。關於歐拉定理的證明及其在平面上或其他曲面上的推廣，請看附錄三及附錄四。

現在來考慮球面上的一個地區圖。我們假定它是正規的。設這個正規圖裏 n 邊區的個數爲 A_n，則

(1)
$$\sum A_n=F$$

我們現在來數邊數。把每一區的邊都算一次則有 $\sum nA_n$ 邊，但在球面上，這樣子會把同一邊算兩次（因爲每一邊都是某兩鄰區的共同邊），所以得

(2)
$$\sum nA_n=2E$$

現在再來數點數。把每一邊兩端的點各算一次，則有 $2E$ 點，但是這樣算，每一點都重複了三次（因爲每一點都假定是三邊點），所以有

(3)
$$2E=3V$$

將(1)，(2)，(3)代入歐拉公式，得

$$12=6F-6E+6V=6\sum A_n-3\sum nA_n+2\sum nA_n=\sum(6-n)A_n,$$ 即

(4)
$$5A_1+4A_2+3A_3+2A_4+A_5=12+A_7+2A_8+3A_9+\cdots$$

這就是正規圖公式。

用這個公式，很快地，我們就有了第五節的引理。這是因爲(4)式右邊爲正，所以左邊各項不能全部爲 0 。

平面上的正規圖也有類似的歐拉公式；利用這個公式也能討論 A_i 之間的關係。（參照附錄三說明）

一般研究四色問題所採取的論證大致如下：假設四色定理不成立，則在所有不能用四色着色的正規圖中取一區數最小的正規圖。這種正規圖叫做最小不可約正規圖。這種正規圖一定不能包含任何四色可約圖象。若不然，則該正規圖的着色問題要歸於某個區數小於n的正規圖的着色問題；但依照n的定義，區數小於n的正規圖一定可以用四種顏色着色，所以原圖也可以用四種顏色着色，是爲矛盾。既然最小不可約正規圖不能含有任何四色可約圖象，則它不含有任何一邊區、

二邊區、三邊區或四邊區，因此(4)式的左邊只剩下 A_5 一項。所以這種最小不可約正規圖必含有至少十二個五邊區。由此可以推出其總區數一定相當大。用這種論證法，加上其他一些找到的四色可約圖象，使溫（Winn）能夠證明區數小於 36 的地區圖只要用四種顏色就夠了。（見第五節）

七、二色定理、三色定理及對偶圖

什麼樣的地區圖只需要兩種顏色，或只需要三種顏色？希悟證明了所謂的二色定理及三色定理。

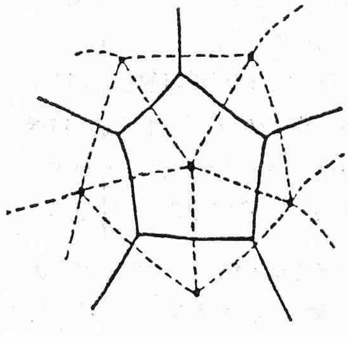
二色定理說： 一個地區圖只需要兩種顏色的充要條件是每個點都是偶數邊點。（這時候我們把圖四的A也當做一個區。）

因爲顏色的數目小於 3，所以在二色定理裏我們不考慮正規圖。這個定理的證明非常簡單，請讀者自己證明。

關於正規圖我們有下面的定理。

三色定理說： 一個正規圖只需要三種顏色的充要條件是每一區都是偶數邊區。

爲了證明三色定理，我們引進了對偶圖的觀念。先不假定是正規圖，如圖十五，在每一區的內部取一點，就叫做該區的首都吧。把相鄰兩區的首都用虛線聯起來，虛線只經過兩區之間的邊界。這樣，由虛線和首都構成了一個新的地區圖，這叫做原圖的對偶圖。新圖的對偶圖就是原圖。原來的區對應到新的點，原來的點變成新圖的區首都，而原來的邊和新的邊也一一對應。所以原來的區數等於新的點數，而原來的點數則變成新的區數，邊數則保持不變。這一切都說明了新舊兩圖的對偶關係。更有進者，把原圖着 M 種顏色就等於用 M 種顏色把新圖的點着色，使相隣兩點的顏色不相同。通常研究着色問題都是歸於研究對偶圖的點着色。這時候，新圖的區就沒有什麼作用，而可以把新圖看成由點與邊組成的網路（net work）了。



圖十五

現在回到三色問題。假定地區圖是正規的，則對偶圖的每區都是三邊區，而新點就不一定是三邊點了。假設我們將原圖用三種顏色 A, B, C 着色了。繞着每一點都有三區，兩兩相隣，所以 A, B, C 全用上了。從 A 出發，順時針方向繞，所得的顏色如果依序爲 A, B, C，則將原點標上 $+1$；反之，如果所得的顏色依序爲 A, C, B，則標上 -1。我們很容易看出來（讀者自己試試看），任何相隣的兩點必一爲 -1,一爲 $+1$。假若我們用 $+1$ 及 -1 表示兩種不同的顏色，則在對偶圖裏 $+1$ 點所代表的區塗以 $+1$ 這種顏色，而 -1 點所代表的區塗以 -1 這種顏色。這樣得到的是用兩種顏色照規定着了色的對偶圖。根據二色定理，此對偶圖的點必是偶數邊點，也就是說原圖的區是偶數邊區。這樣，我們就證明了三色定理的必要條件。上述的論證方式可以從後面整個倒回去而得到三色定理的充分條件。

黑白相間的西洋棋盤就是二色定理的應用（每一點都是四邊點）。由三色定理我們也可以把

跳棋棋盤塗以三種顏色（每一區都是六邊區）。美術方面，譬如磁磚顏色的設計，也常常見到二色定理和三色定理的應用。

八、放電理論

在上一節裏，我們談了對偶圖，說明了如何把原來的着色問題變成了網路的着色問題。放電理論就是要研究這種網路的着色問題。

現在從一正規圖出發，得到它的對偶圖而把它看成一個網路。由於對偶的關係，如果把第六節(4)式中的 A_n 解釋成網路裏 n 邊點的個數，則對這一網路而言我們仍然有(4)式。這個式子就是整個放電理論的出發點。

在第六節的最後，我們談了研究四色問題所採取的方法。由那裏知道我們有興趣的是四色最小不可約正規圖，而在這種正規圖中 $A_1=A_2=A_3=A_4=0$ 。所以第六節的(4)式變成了

$$A_5=12+A_7+2A_8+3A_9+\cdots\cdots \tag{5}$$

放電理論的第一步就是把正負電荷賦給網路中的每一點：五邊點有 60 正電荷，當 $n\geq 6$ 時，n 邊點有 $60(n-6)$ 負電荷，所以根據(5)式，網路的總電荷是 720。邊數大於 6 的點稱爲大點（major point）；這些點在開始時有負電荷。

第一階段的放電做如下的規定：五邊點的所有正電荷平均分配到相隣的大點上。與一個五邊點相隣的大點數可以從 0 到 5，所以 60 都能被這些數整除。這也就是爲什麼選 60 正電荷給五邊點的原因，第一階段放電之後，電荷總數還是 720。

（這些引進來的網路、電荷、放電等觀念只是一種比擬，方便解釋而已。四色問題當然和電學毫無關係。）

假設網路裏沒有六邊點和七邊點，則赫希證明了在第一階段放電後可能會有兩類情況發生，其中一類是某個八邊點帶有正電荷（從相隣的五邊點得來的正電荷比原有的負電荷多）。對這種八邊點再做第二次放電，把該點現有的正電荷平均分給相隣而帶有負電荷的點。在第二階段放電之後，赫希又證明了網路裏不可能會有帶正電荷的點，但總電荷還是 720，所以這是個矛盾。用這種方法赫希證明了在第一階段放電之後不可能有八邊點帶有正電荷，因此另一類情況必定發生。

用放電理論可以把一些不可能發生的情形除去，使尋找四色最小不可約正規圖的範圍縮小。（當這個範圍變成了空集合的時候，我們就證明了四色定理。）

整個放電理論非常複雜。上面所舉的例子只不過是讓我們對放電理論稍稍有認識而已。大約來說，因爲總電荷數爲正，所以無論各個放電階段（一般來說不止兩次）的規定是怎樣，總會有帶正電荷的點，放電理論的目標就是要設計一些放電規定，使我們能以有限個的情形來描述那些最後會變成帶正電荷的點的周圍的圖象。這些圖象的集合就是一不可避圖象圖。詳細的討論決非篇幅所能允許，也不是筆者能力所能允許，也不是筆者能力所能及的。

一九七〇年赫希跟哈根說：第一階段放電後，一般而言（卽不管有沒有六點邊點和七邊點）會發生有正電荷的情形約有 8,900 種。哈根想到對這些 8,900 種情形還要一一做第二階段放電，不禁大爲悲觀，因而決定改良放電的規定。這是導致日後解決四色問題的第一步。

哈根要他的學生用改良了的放電理論討論那些只含五邊點、六邊點和八邊點的網路，結果他們發現情形還是非常複雜。這使得哈根相信非用計算機幫忙不可。

至於最後他怎樣用計算機解決問題的經過已在第五節裏談過，所以就此打住，不再重複。

九、跋

經過一百二十多年的努力，四色問題才被解決。當然最後解決問題的阿倍爾和哈根他們的貢獻最大。但是回顧整個四色問題的歷史，我們發現他們解決問題的辦法卻不是無中生有的，他們是繼承了前人的事業而加以發展的。解決整個問題的關鍵還是在處理可約性及不可避性兩個一百年前就有的觀念。只緣於阿倍爾和哈根處於計算機時代，再加上他們本身的努力才使懸案迎刃而解。

一般有深度的數學定理是有涵蓋性的，就是說定理的應用範圍很廣，往往廣到可以應付無窮的變化情形。譬如四色定理是說「所有」的地區圖都可以用四種顏色着色，歐拉定理是說「所有」的球面地區圖（其區都是單連的）都滿足$F-E+V=2$，等等。計算機速度再快還是不能處理無窮的變化。所以一般來說計算機只能用來幫助計算，或者檢驗一些特別的情形，使數學家對某些結果能做更正確的預測，或者求得某些反例以證明某些猜測的不正確。而四色問題的解決卻是先用數學的推論方法把無窮的變化，由放電理論及計算機的幫忙化爲有限個的情形，然後由計算機做最後的處理。這種證明定理的方法算是創一先例。以後是否會有類似的事情發生，現在還看不出來，我們且拭目以待吧。

四色問題與計算機的關係算是一個特色。另一方面爲了研究四色問題，圖形理論（Graph theory）漸漸發展起來，而被用去解決其他的問題。這是解決大問題必會有的現象。譬如爲了解決費瑪臆測（即 $x^n+y^n=z^n, n\geq 3$，沒有正整數解），引起了整個代數數論及抽象代數的發展。問題本身可能沒有什麼大用處，但爲了解決問題而發展的工具卻往往非常有用。這是整個數學發展史的一個特色。

附　錄

附錄一、四色問題遊戲

關於四色問題，我們提供兩個遊戲與讀者共享。

1. 甲乙兩個人用四種顏色玩這個遊戲。甲先畫一區（不一定要單連），乙就把這個區塗上一種顏色，跟着乙就畫一區（與甲畫的可以相鄰也可以不相鄰），然後甲在這區上壁上一種顏色，跟着甲再畫一區，……。塗顏色要照規定（卽相鄰兩區不能用同一顏色），而可用的顏色只有四種。誰第一個破壞規定誰就輸。

相信大家玩了幾次這種遊戲以後，一定對四色問題會有更深的瞭解。

2. 如圖 h，長方形地板的右下角缺了一個角。長爲10公尺，寬爲 8 公尺。裏面分成八塊，除最上面一塊是十六平方公尺外，其餘的每塊都是八平方公尺。今有油漆四桶，顏色分別爲紅、黃、

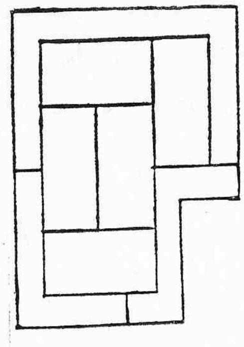


圖 h

綠、藍。紅色的和黃色的分別只夠漆二十四平方公尺，而綠色的只夠漆十六平方公尺，藍色的只夠漆八平方公尺。問用這些些油漆如何照規定把地板塗上四種顏色？（如果想不出，先看本頁底的提示，再想不出，則看文末的答案。）

提示： 可以把不同顏色的油漆混着用，只要最後地板的顏色是四種就好了。

附錄二、四色問題年代表

1852-10-23	F. Guthrie 向 A. de Morgan 提起四色問題，而後者寫信告訴 W. Hamilton
1878-7-13	A. Cayley 在倫敦數學會上提出四色問題。
1879	A. B. Kempe 在 American Journal of Mathematics 發表論文，宣稱解決四色問題。
1890	P. Heawood 指出 Kempe 論文有錯，並證明五色定理及討論其他曲面上的着色問題。
1890～1950	尋找可約圖象。
1940	Winn 證明區數小於 36 的地區圖都可以用四種顏色着色。
1950～	用計算機尋找可約圖象。
1950	H. Heesch 發明放電理論尋找不可避圖象組。
1960代末～	W. Haken 簡化放電理論。
1972～1974	W. Haken 更簡化放電理論，同時 K. Appel 寫計算機程式幫着尋找不可避圖象組。他們估計可找到個數小於一萬的不可避圖象組。
1974～1976	Haken, Koch, Appel 從衆多的不可避圖象組尋找成員都是可約的不可避圖象組。
1976年1月～6日	Haken 和 Appel 修改尋找方式。
1976年6月	Haken 和 Appel 用了一千多小時計算機時間，終於找到一組成員都是可約的不可避圖象——四色定理得證。

附錄三、歐拉定理的證明

歐拉定理說：球面上，每一區都是單連的地區圖要滿足 $F-E+V=2$ 這個關係式。其中 F 表區數，E 表邊數，V 表點數。

我們要用第三節所說的，平面上與球面上地區圖的對應來證明理拉定歐。

由球面上的地區圖，根據第三節，我們可以得到在平面上相對應的地區圖。很明顯地，這個平面上的地區圖有 V 點，E 邊。但區的數目就值得注意了。圖四中，N 點所代表的區在平面上相應的區是在整個地區圖的最外面。譬如，如果圖 a 表球面上的一個地區圖（我們沒把球面畫出來），圖 b 表其平面上的對應圖。則球面上的 $ABCD$ 那一區對應到平面上 $ABCD$ 的外邊部分。通常平面地區圖的最外邊部分可以把它看成一區，也可以不把它看成一區，這就是所謂的約定成俗

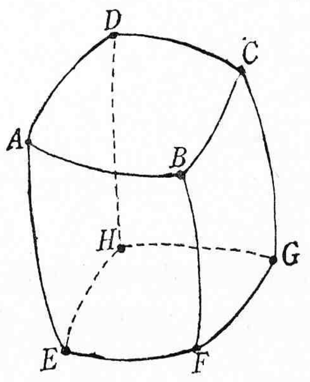


圖 a

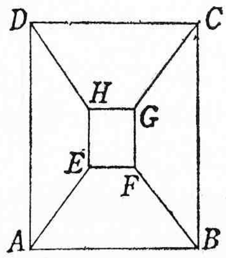


圖 b

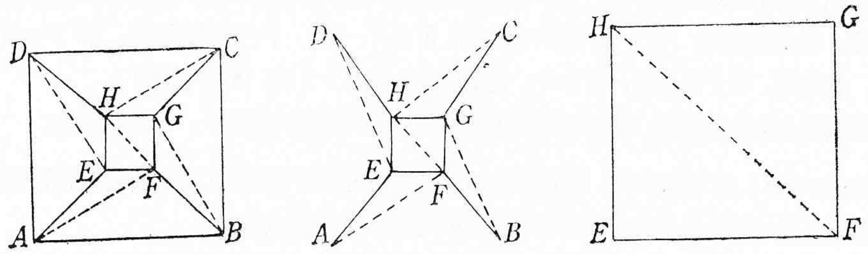
了。如果把它看成一區，則在此對應之下，區數還是沒有變（還是F），而在平面上我們仍然要有 $F-E+V=2$。如果不把它看成一區，區數少掉1，則在平面上區數 F，邊數E，點數V的關係就要改爲$F-E+V=1$。

爲了方便說明，我們採取後一種看法，即把最外邊部分不看成一區，而要證明 $F-E+V=1$。如上所述，一旦證明了平面上的這個關係式，則球面上的歐拉定理就成立了。

證明的第一步：把非三邊區的區都添上一些對角線使新圖的區都是三邊區，如由圖b變成圖c。每添一對角線，邊數增加1，區數增加1而點數不變，所以 $F-E+V$ 保持不變。

第二步：把最外邊的三邊區中不與其他共有的邊拆掉。有兩種情形可能發生。第一種是三邊區中只拆掉一邊，如圖c的 AB, BC, CD, DA，而變成圖d，每拆這樣的一邊，邊數減1，區數減1，而點數不變，所以 $F-E+V$ 保持不變。第二種情形是三邊中有兩邊被拆掉，如圖d變成圖e。每拆這樣的兩邊，區數減1，邊數減2，而點數減1，所以 $F-E+V$ 還是不變。

第三步：用歸納法可以證明繼續第二步的拆法，最後會只剩下一個三邊區，而 $F-E+V$ 這個關係式還是不變。但是只有一個三邊區的地區圖，其 $F=1$，$E=3$，$V=3$。所以$F-E+V=1$。因此歐拉定理得證。



圖c　　圖d　　圖e

我們可以用歐拉定理證明正多面體只有五種。假設正多面體的面都是 n 邊面，點都是 m 邊點。則第六節的(1)式變成 $A_n=F$，(2)式變成 $nF=2E$，(3)式變成 $2E=mV$（因爲點都是m邊點而不是三邊點）。由後兩式得 $F=2E/n$, $V=2E/m$, 代入 $F-E+V=2$，經整理後得

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{m}=\frac{1}{2}+\frac{1}{E}$$

因爲n和m都要≥ 3，但由上式又知 n和m不能同時大於3（否則左邊要$\leq 1/2$，則E無解。）所以 $n=3$ 或 $m=3$。當 $n=3$ 時，$1/m=1/6+1/E$，所以$3\leq m\leq 5$。同理，當 $m=3$ 時，$3\leq n\leq 5$。所以我們得到五組答案，列表如下：

n	3	4	3	5	3
m	3	3	4	3	5
F	4	6	8	12	20
E	6	12	12	30	30
V	4	8	6	20	12

即，正多面體只有五種：四面的、六面的、八面的、十二面的及二十面的。如表所示，正六面體（即正立方體）和正八面體是互爲對偶的，正十二面體和正二十面體也是互爲對偶的，而正四面體的對偶圖就是它本身。

附錄四、更一般的着色問題

1. 帝國圖。在第二節裏我們規定每一區必須是連結的；但事實上這個現實的世界可不一定這麼一回事。如果一個帝國以及它的海外殖民地都要塗上同一顏色，則四色定理當然不一定成立。像這樣區不一定是連結的地區圖就叫做帝國圖。假如對帝國的殖民地的數目不加以限制，則我們可以想見殖民地愈多，我們所要的顏色也就愈多，所以不可能有 M 色定理（即 M 色就夠了）。反之如果每一帝國其不相連結的部分的數目不大於 r 的話，則希悟證明了 $6r$ 種顏色就夠了。當 $r=2$ 時，他還證明 12 種顏色是不可少的。

2. 三度空間。把二度空間的着色問題推廣到三度空間如何？答案是：不可能有 M 色定理。譬如把 n 根長木條平行排在一個平面上，然後再把另外 n 根長木條像圖 f 那樣擺在原來的木條上。把下面的第 k 根木條和上面的第 k 根木條綁在一起算是一個區，則所形成的 n 個區中每個都和其他 $n-1$ 區相鄰。所以這個地區圖需要 n 種顏色；但 n 可以任意增大，所以不可能有任何 M 色定理。

3. 曲面。球面是三度空間中各式各樣的曲面之一。我們當然會對其他曲面上的着色問題感到興趣。譬如將一實心球穿了一個洞後其表面是一種曲面，它和所謂的輪胎面（圈餅面）是拓撲等價。我們也可以將實心穿更多的，互不相交的洞而得到各式各樣的曲面。**在這些區面上我們也有歐拉定理**，它是這樣的：$F-E+V=K$，而 $K=2-2P$，P 是洞的數目。當 $P=0$ 時，$K=2$，是球面。當 $P=1$ 時，$K=0$，是輪胎面。當 $P>1$ 時，K 都小於 0。

利用曲面上的歐拉定理，我們也可以得到類似於第六節(4)式的式子，它是這樣的：

$\Sigma(6-n)An=6K$。當 $K<2$ 時，希悟很成功地利用了這個式子證明了這種曲面上的 M 色定理（即 M 色就夠了）。這 M 是小於或等於 $(7+\sqrt{49-24K})/2$ 的最大整數。

當 $P=1$ 時，$K=0$，則 $M=7$。也就是說在輪胎面上，7 種顏色就夠了。當 $P=2$ 時，$K=-2$，則 $M=8$。當 $P=3$ 時，$K=-4$，則 $M=9$。當 $P=4$ 時，$K=-6$，則 $M=10$。

希悟（當 $P=1$ 時）和黑福特（Heffter）（當 $P=2,3,4$ 時）又證明了在這些情況下，M 種顏色，也是必要的。

他們的論證方法很簡單。就是造出一張非用 M 種顏色不可的地區圖。譬如 $P=1$ 時，希悟的例子如圖 g 所示。把 AB 和 CD 合在一起，A 點對 C 點，B 點對 D 點，然後再把 AC 和 BD 合在一起就得一輪胎面。1 到 7 表示輪胎面上的 7 個區，它們都是兩兩相鄰的，所以非用七種顏色不可。

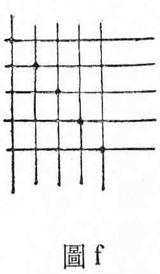


圖 f

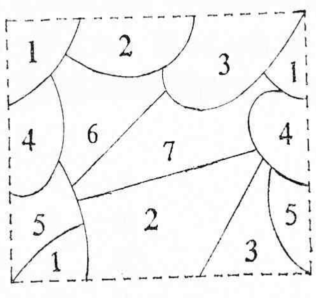


圖 g

輪胎面看起來比球面複雜，但它上面的着色問題卻早在八十年前就解決了。這是一個很難解釋的現象。同時可注意者，當 $K=2$ 時（球面）$(7+\sqrt{49-24K})/2$ 剛好等於 4，正是四色定理！（當然，希悟沒辦法證明，當 $K=2$ 時上面這個式子也對。）希悟的 M 色定理是怎麼證明的？很簡單。在這些曲面上，我們照樣有 M 色可約圖象，M 色最小不可約正規圖的觀念。現在

假設M色定理不成立，則有一個M色最小不可約正規圖。設其區數爲F，則很顯然地F要大於M。因爲 $n<M$ 時，n邊區都是M色可約圖象，所以對此M色最小可約正規圖而言，當$n<M$時，$A_n=0$。所以我們有$A_M+A_{M+1}+\cdots=F\geq M+1$。另一方面，由 $\Sigma(6-n)A_n=6K$，我們有

$$-6K=\sum_{n=M}(n-6)A_n\geq\sum_{n=M}(M-6)A_n=(M-6)\sum_{n=M}A_n$$
$$=(M-6)F\geq(M-6)(M+1) \qquad \text{(請注意}M>6\text{)}$$

卽，$M^2-5M-6+6K\leq 0$，因此 $M\leq(5+\sqrt{49-24K})/2$（請讀者畫 $y=x^2-5x-6+6K$ 的曲線來說明）；但另一方面，由M的定義，我們有

$$M>(7+\sqrt{49-24K})/2-1=(5+\sqrt{49-24K})/2$$

故得矛盾。

參考資料

1. P. Franklin: *The Four Color Problem,* Scripta Mathematica **6** (1939), 149-156, 197-210

2. O. Ore: *The Four Color Problem,* Academic Press, 1967.

3. K. Appel and W. Haken: *Every Planar map is four colorable,* Bull., AMS **82** (1976), 711-712.

4. K. Appel: *The proof of the four-colour theorem,* New Scientist **21** October, 1976.

5. 竹內外史: 四色問題——ついに解決! 數學セシナ——1976年10月號，2～6。

附錄一第二問題的答案: 把三分之一的紅色油漆和全部的藍色油漆混在一起，調成紫色（可以塗十六平方公尺）。讀者不難用紅、黃、綠、紫這四種色顏將地板着色!