組合學漫談

黃光明

本文作者現爲美國貝爾電話實驗室研究員，去年七月到十月間曾應本所與交通部電信研究所之邀回國訪問研究，其間並曾在本所多次演講。黃先生曾以此題在好幾個學校演講(包括本所)，現應本刊之請，將這些演講内容綜合整理作成此文。

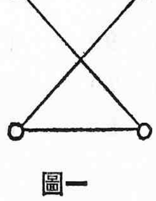
——編者按

我們先舉一個典例的組合學問題來瞭解組合學探討的到底是什麼: 「拿一張白紙; 任意把它劃分成 n 個區域，而且兩個鄰近的區域必須共邊而不僅共點。每一個區域著上一種顏色，條件是相鄰的兩區域不能同色，問如果給你四種顏色的話是否一定夠? 」組合學的問題常常是如此。先規定了一件要做的事，像以四種顏色給區域著色，這件事多半都是很容易做的而且有各種各樣的做法，但我們同時加上了一些條件，像鄰近的區域不得同色。現在有些做法合於條件有些不合條件，我們問合於條件的做法有多少種，或者問有沒有合於條件的做法（如所舉例題），或者要找出一種好的做法。

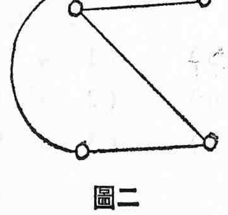
上面所舉的例題雖屬典型卻並不平凡，它是有名的「四色」問題，相傳是數學當今三大難題之一（另外兩個是 「Riemann 假設」和「Fermat 最後猜測」)。一百多年來，不知多少數學家爲之絞盡心血，一直到今年七月間才得到了肯定的解答，相信大家都已在報章上讀到有關的報導，這裏不再重復。但我們還要借四色問題來介紹一個有用的觀念——「圖形」。圖形學是組合學裏非常重要的一支。

一個圖形是一個點的集合和一個定義在兩點上的線的集合，（因此任何兩元性的關係都可以用圖形來表示，這就是爲什麼圖形學之應用如此廣泛。）譬如在四色問題裏，把每一個區域當成一點，如果兩個區域相鄰則對應的兩點間連一條線(如不相鄰，則無線)，則 n 個區域即可以一圖形表示，而且因爲在四色的問題裏，區域的大小，形狀，相隔的遠近等等都和問題沒有關係，唯一有關係的是兩區域是否相隣，而這一個關係表現在我們的圖形裏。因此以圖形代表原圖，並沒有失去任何實值。原來的問題也可改在圖形上問: 如給每一點著色，有線相連的兩點不得同色，四種顏色夠不夠?

因爲在原題中，紙上的兩個區域不會互交; 因此化爲圖形後，也一定可以使線和線間互不相交，這樣的圖形叫做平面圖。有的圖形雖然有兩線相交（圖一)，但若換一種畫法（圖二）就可不相交，而線的集合不變，則也算是平面圖。

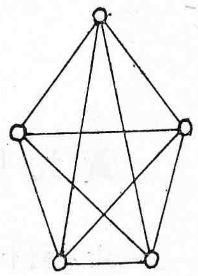


圖一

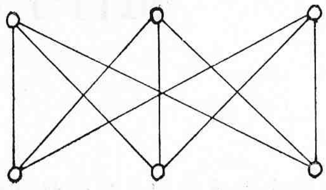


圖二

但如圖三和圖四的圖形無論怎麼畫，都一定有線相交，故不是平面圖。



圖三



圖四

我們怎樣分辨那些是平面圖，那些不是呢? Koratowski 證明了，如果一個圖形裏不含圖三或圖四則爲平面圖，反之則不是平面圖。看! 這是一個多漂亮的定理，數學的美就在這些「巧」和「妙」上。

一個圖形如果是平面圖，則四種顏色一定夠著色；如果不是平面圖則一定不夠。近二十年來組合學上另有二大疑案被破獲。第一是流傳了近二百年的 Euler 在拉丁方陣上的猜測被證爲非。第二是也有一百多年歷史的「Kirkman 女學生問題」被證有解，先說前者。

一個序 (order) 爲 n 的拉丁方陣是一個 $n\times n$ 的方陣 每一行每一列所含的元素都構成 $\{1,\cdots\cdots,n\}$ 這個集合。如圖五和圖六是兩個序爲三的拉丁方陣:

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{matrix}$$

圖 五

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{matrix}$$

圖 六

如把圖五的方陣疊在圖六的方陣上，然後唸出每一格內上下的兩個元素，我們發現 (1,1), (1,2), (1,3) ……(3,3)九種搭配各都出現一次，有這樣性質的兩個拉丁方陣我們稱爲互相正交。

當 n 大於一時 Euler 發現，除了 n 是 $4k+2$，$k=0,1,2\cdots\cdots$ 這一型數字外，正交的拉丁方陣都存在。於是他猜測當 $n=4k+2$，$k=0,1,2\cdots\cdots$ 時沒有正交的拉丁方陣存在。在二十世紀初葉，有一個人把所有序爲六的拉丁方陣都列出試著搭配，果然找不到互相正交的兩個，更增加了 Euler 猜測的可靠性。

約二十年前，兩個印度人 Bose 和 Shrikhande 和一個美國佬 Parkor 分別找到了序爲十的正交拉丁方陣。不久後他們又携手合作找到了一個方法可以造所有 $n=4k+2$ 的正交方陣，只要 n 大於 6，徹底地摧毀了 Euler 的猜測。他們的發現據說是紐約時報第一次在頭版上刋發有關數學的報導。

Kirkman 女學生問題是這樣的: 有 $6k+3$ 個女學生，每天三個一排地出去散步。所以每天每個人有二個同排的伴侶。如果我們希望每兩個女學生都同排一次，則最少需要 $3k+1$ 天。問題是否一定有一個排法在 $3k+1$ 天內任何兩個女學生都同排一次，圖七是一個 $k=1$ 時的排法:

第一天	第二天	第三天	第四天
(1 2 3)	(1 4 7)	(1 5 9)	(1 6 8)
(4 5 6)	(2 5 8)	(2 6 7)	(2 4 9)
(7 8 9)	(3 6 9)	(3 4 8)	(3 5 7)

圖 七

有不少人爲不同的 k 值做出了排法，但俄亥俄州立大學的博士班學生 Wilson 和他的導師 Chauduri（印度人）在 1971 年串上了最後的一鏈而證明了 Kirkman 女學生問題對所有的 k 都有解。一百多年來的猜疑至此塵埃落定。

拉丁方陣問題和 Kirkman 女學生問題在組合學上都屬於叫做「數學設計」的一門學問。數學設計中最基本而廣泛應用的一種叫做「區間設計」。假設我們有一個含 v 元素的集合 S。另外有一個含 b 區間的族 F，F 族裏每一區間都是 S 的一個 k 元素的子集合。且 S 中任二元素都在 F 中出現於 r 個區間裏，S 中任二元素都同時出現於 F 中 λ 個區間裏，滿足這樣條件的 F 稱爲一個 (v,b,r,k,λ) 區間設計。

圖八是一個 $(9,12,4,3,1)$ 的區間設計:

(1 2 3) (1 4 5) (1 6 8) (1 7 9) (2 4 9) (4 6 7)
(2 5 6) (2 7 8) (3 4 8) (3 5 7) (3 6 9) (5 8 9)

圖 八

S 裏的元素在 F 裏一共出現多少次? 有兩個答案: S 共有 v 元素，每一個元素出現 r 次，故共出現 vr 次; 但同時 F 有 b 區間，每一區間含 k 元素，故共出現 bk 次，所以 $vr=bk$。

再問 S 裏的一對元素同時出現在 F 裏的一個區間共有多少次呢? 也有兩個答案: S 共有 $v(v-1)/2$ 對元素，每一對出現 λ 次，故其出現 $v(v-1)\lambda/2$ 次; 但同時 F 有 b 區間，每一區間含 $k(k-1)/2$ 對元素（k 中任取二），故其出現 $bk(k-1)/2$ 次，故得 $v(v-1)\lambda=bk(k-1)$.

以上兩個方程式是一個區間設計必需滿足的條件，但是不是充分條件呢? Hanani（以色列人）證明了當 $k=3$ 或 4 時，它們是充分條件，而當 $k\geq 5$ 時則否。當 $k\geq 5$ 時，什麼是區間設計的充分必要條件還是一個謎。通常用來構造區間設計的方法是「有限幾何」，「差數集合」，「Galois 域理論」等。

下面我們介紹組合學上兩個有趣且有用的定理。

世界上任意選六個人，以六點代表之，然後問每兩個人彼此是否認識，如果認識則該兩點間連一線，如不認識則無線。則下列兩者必有一爲眞: (1)某三點間彼此有線(2)某三點間彼此無線。如果選比六個人多時，也必定會有以上結果（因爲只要看其中任六點間的圖形就夠了），但選比六點少時，則沒有這種結果。譬如圖九中的五點既無三點彼此間有線也沒有三點彼此間無線:

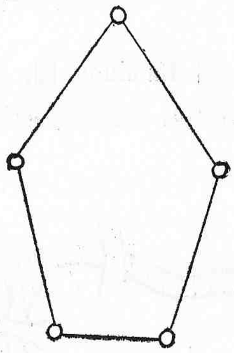


圖 九

我們也可以利用以上的結果做一個兩人的遊戲。先在紙上畫下六角形的六頂點，然後兩人輪流在頂點間連線，連線時可以任意用一支紅筆或一支藍筆，誰在連線後造成了一個三邊同色的三角形者爲輸家。根據以上結果，在所有的線都被連完後必定有一個同色三角形出現（可以把紅色

三角形當成三點間彼此有線，藍色三角形當成三點間彼此無線），故必定有一輸家。

廣義的 Ramsey 定理說：現有一個 N 點的集合 S，把 S 中所含 r 點的子集合分成互不相交的 k 組 $S_1, \cdots\cdots S_k$。設 $l_1, l_2, \cdots\cdots, l_k$ 爲 k 個不小於 r 的數，則當 N 不小於 $n_r(l_1, l_2, \cdots\cdots, l_k)$（後者稱爲一個 Ramsey 數）時，下列的陳述對於某一個 i 而言，$i=1, \cdots\cdots, k$，必爲眞：

「S 中有某 l_i 個元素的集合 $X=\{x_1, \cdots\cdots, x_{l_i}\}$，其任意 r 點的子集合都在 S_i 這一組內。」

這個定理有點不容易瞭解，回到原例題，S 是一個 N 點的集合，所有二點的子集合可分成有線和無線的兩組 $(r=2, k=2)$。$l_1=l_2=3$，$n_2(3,3)=6$，當 $n\geqq 6$ 時（例題中 $n=6$），必有三點其中任兩點間都有線或必有三點其間任兩點間都無線。

Ramsey 定理祇說 Ramsey 數一定存在，卻不告訴 Ramsey 數是多少。譬如我們知道 $n_2(3,4)=9$，$n_2(4,4)=18$，$n_2(4,5)$ 以上卽不知道了。

著名的數論家和組合學家 Erdös 和 Turan（皆匈牙利人）在四十年前研究一個形式上很不一樣但實質上和 Ramsey 定理頗有關的數論問題：設 R 爲任意一個正整數所成的無限集合且 R 的密度大於零，卽對任意 n，

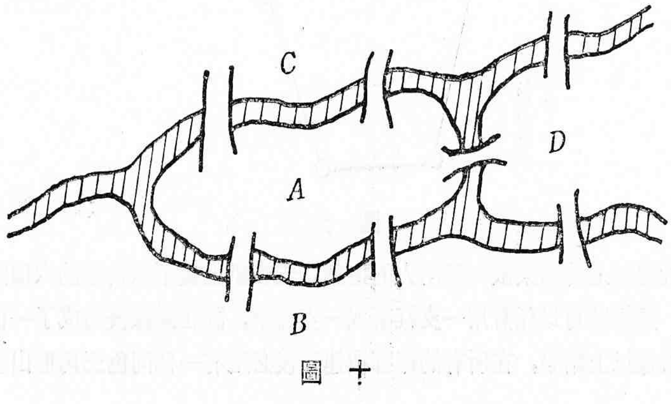
$$\frac{|R\cap\{1, \cdots\cdots, n\}|}{n}>0,$$

則無論 k 多大，他們猜測 R 中必有一個含 k 元素的算術級數。Erdös 且提供美金一仟元給能解出此題的人（在當時一仟元是 Erdös 的最高獎金，其他題目自五元至數百元不等）。二十年後 Roth 證明此猜測在 $k=3$ 時正確，再過了十年又一個匈牙利人 Szemeredi 證明 $k=4$ 也成立。zSemeredi 對這問題鍥而不捨，又面壁十年，終於證明了 Erdös-Turan 的猜測，對所有 k 都正確。證明非常繁複，據 Erdös 推許爲人類腦力所能達到的極限。

其次我們介紹 Hall 定理。我們要把 n 個女孩和 n 個男孩配成舞伴，我們問每一個女孩那幾個男孩她願意接受爲舞伴。設 S 爲男孩的集合，則每一個女孩的回答是一個 S 的子集合。現在我們要在每一個子集合裏挑出一個元素（卽選出一男孩作該女孩的伴），但是 n 個子集合所挑出的元素必需不重覆（一個男孩不能作兩個女孩的舞伴）。問在什麼情形下挑選可以成功。首先我們看看成功的必要條件。如果有某 k 個子集合的聯集其所包含的元素少於 k，則顯然挑選不能成功，因爲找不到 k 個男孩分配給這 k 個女孩。Hall 證明了這個必要條件也是充分條件。Hall 定理有各種態式的表現方式和條件略異的變形，它被應用在作業研究的分派問題上，電話交換網路的操作上及很多其他地方。

下面我們介紹兩個圖形學上的未解題，這兩個問題和四色問題曾被圖形學大師 Hardy 合稱爲圖形學上當今三大難題。

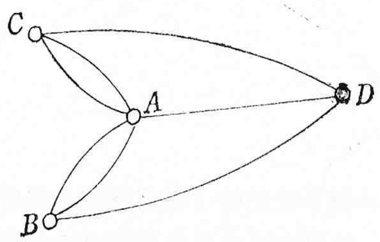
第一個問題是問一個圖形是否含有一個 Hamilton 圈，這個圈的定義我們等一下再給。先談一個有關的，但已在二百年前被解決的問題。就是一個圖形是否有一個 Euler 圈，這也是歷史上第一個圖形的問題。



圖十

Königsberg 這個區域被河流劃分爲 A, B, C, D 四區(見圖十)，有七座橋溝通區際的交通。問能否從某一區出發，每一座橋經過一次且僅一次而回到原區。

把每一個區以一點表示，每一座橋以一條線表示，則得圖十一。如果從任一點出發，每條線經過一次且僅一次回到原點，稱爲一個 Euler 圈。



圖十一

與一個點相接的線的數目稱爲該點的度數，很顯明的，如果有任一點它的度數是奇數，則 Euler 圈不可能存在。Euler 證明了這一個必要條件也是充分條件。

如果從一點出發，每一點經過一次且僅一次而回到原點稱爲一個 Hamilton 圈。一個圖形含有 Hamilton 圈的充分必要條件還是未知。原則上線越多，Hamilton 圈存在的機會越大。到現在爲止最好的充分條件是:

1. 圖形必須爲一連接圖形，即沒有孤立部分。
2. 如果每各點的度數照大小次序排列爲

$$d_1 \leq d_2 \leq \cdots\cdots \leq d_n \qquad \text{(設圖形共有 } n \text{ 點)}$$

則 d_1 需不小於 2，且對所有不大於 $n/2$ 的 i，不是 $d_i \geq i$，就得 $d_{n+1-i} \geq n+1-i$

第二個問題叫做「Ulam 猜測」。一個圖形裏度數爲 1 的點叫做終點。設圖形 G 中有 k 個終點，令 G_i 爲從 G 中拿走第 i 個終點及接它的線所得之圖，從 G 當然很容易得到 $(G_1, G_2, \cdots\cdots, G_k)$。Ulam 猜測說從 $(G_1, G_2, \cdots\cdots, G_k)$，$G$ 可以被唯一決定。當圖形 G 是一棵「樹」時，即 G 中任意兩點只有一條路線連接 (這路線可以經過別的點)，Ulam 猜測已被證爲眞，但對一般的圖形還是一個未解題。

本文的主要參考資料是下列兩本臺灣都有翻版的書:

1. Marshall Hall, Jr. *Combinatorial Theory,* 1967 (臺北市新月圖書公司)。
2. Frank Harary, *Graph Theory,* 1971, Addison-wesley.