腦部衝擊習作與
數學解難技巧之訓練

黃毅英

腦部衝擊（ brain-storming ）爲常見的心智成長習作，目的在於建立個體之解難技巧及思考創造能力等，見於J.M. Pfeiffer 及 J.M.E. Jones 之A Handbook of Structured Experiences for Human Relations Training 卷三（ University Associates Press 1971 ）〔1〕，本文目的是探討將這習作運用於數學教學之實例。首先介紹習作如下：

目的：

Ⅰ從批判與評鑑中產生大量對某難題之意念或解決方法。

Ⅱ建立創意解難技巧。

小組人數：

無論多寡、分成小組，每組約六人。

需時：

以下例而言，約用一小時。

工具：

每組均需紙筆。

場地安排：

每人一張可移動之坐椅。

程序：

Ⅰ主持者協助分組、每組約六人、各選出秘書一名。

Ⅱ主持人著每組圍圈，並給與紙筆，以紀錄所有提出之意念。

Ⅲ主持解說規則：

1. 於腦部衝擊過程中不應對任何意見有所批評。
2. 空中樓閣式的意見應受鼓勵，因爲引發較實際的意見。
3. 意見越多越好。

Ⅳ主持人宣稱大家想像飄流荒島，赤裸無物，只餘皮帶一條。用此皮帶可作出什麼呢？並宣佈共有十五分鐘時間作生出意念。

Ⅴ十五分鐘過後，主持人宣佈停止，並著令各組選出最好意念的。若超過四組，可兩組合併，交流意見以寫出綜合的最佳意念表。

Ⅵ小組再合成大組，由各組秘書宣讀各自的意念表。參與者可發掘兩個或多個意念合而爲用。

Ⅶ主持人將最後之意念表出，參與者決定其可行性之次序。

Ⅷ主持人帶出腦部衝擊習作爲創意解難訓練

的討論。

變化：

Ⅰ此習作可變成搓泥膠之類的遊戲。

Ⅱ可改作競爭性遊戲。選出一些評判以確定勝出者之判準。

Ⅲ習作中可改用其他物品，如電筒、繩索、船漿、縲絲等。

以上的習作其實還有很多變化。筆者就曾將「皮帶」一物換作處境（如「在公共汽車上，一個老人讓座與一位看來身體健全的年青人」之類），讓大家舉出推測，最後以發生之可能性排出次序，形成一個「設想他人式」的德育習作（「設想他人」、「兩難問題」及「價值認定」爲德育習作的三大主流）。

美國全國數學督導員議會〔2〕指出，「研習數學的主要目的在於學習解難」，故此，上述腦部衝擊的解難習作完全可以套到數學上，以提高學生的解難能力。

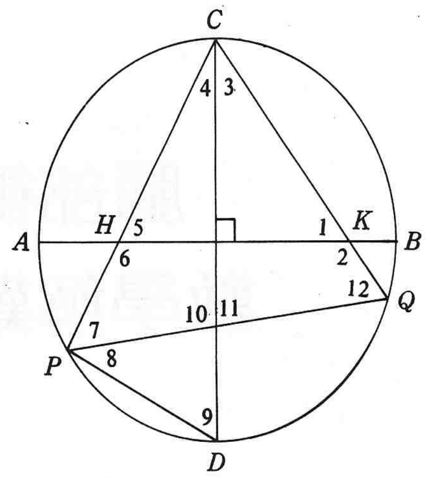
若我們把數學問題之解決看待成一條由已知走到未來的路，則我們須從已知出發，看可推出些甚麼來；又或反方向回溯，看要得到答案，先要有些甚麼資料，將已知與未知逐漸拉近，最後終獲貫徹兩者之通道。

若問題之複雜性不容許我們一眼看出由已知通往未知的通道，則我們必須妥善處理已有的資訊，儘量列出其可導出的結論來。這種過程與以上的腦部衝擊習作是相彷的。透過這種探索，學生就不只能把該單一問題解決了，而且是增強了解難能力。以下便是筆者切實執行過的一些例子。

例一

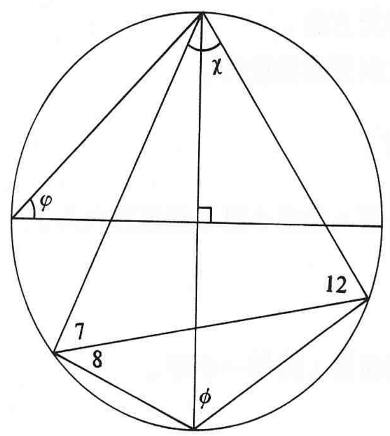
AB與CD爲圖中兩垂直直徑（圖一），P爲弧AD上的一點，Q爲弧AB上的一點，求證$HKQP$爲共圓。

首先，我們可以用以上的形式，問從$\angle$ 1-12 中的那個出發較可行，由於本題出發點比較明顯，相信一般均能指出由$\angle 1$或$\angle 7$出發較妥。



圖一

假定現由$\angle 1$出發。$\angle 1$中可得出那些角來呢？如選定從$\angle 7$出發，則可找$\angle 8$，甚至ϕ和Ψ，甚或以X以表$\angle 12$……（圖二）種種方法。至於那些的可能性較高呢？經過一翻討論與反覆探索，答案不只自然而然的出現，最重要的，學生對於答案「通道」爲何要這麼走就一目了然了。

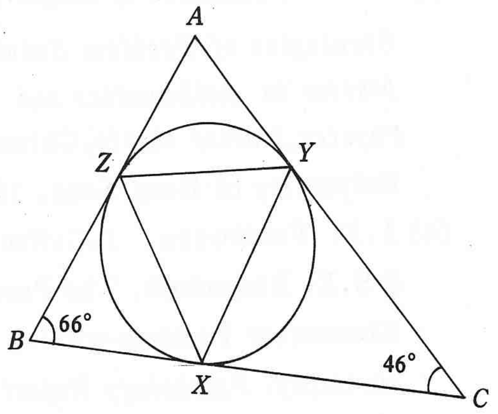


圖二

例二

$\triangle ABC$和$\triangle XYZ$分別爲同一圓的外切和

內接三角形（圖三），已知$\angle ABC = 66°$，$\angle ACB = 46°$，求$\triangle XYZ$中所有角。



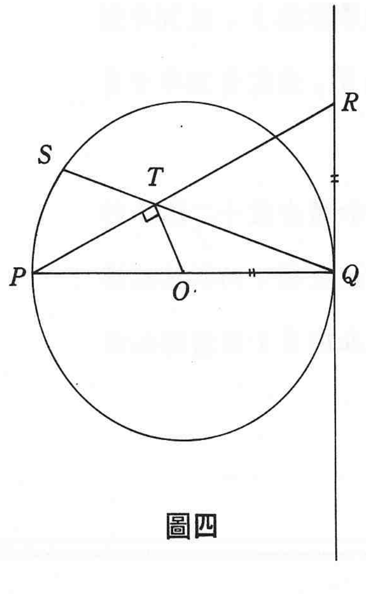
圖三

一開始時，此題即有多種入手可能性。如先找（最方便得出的）$\angle A$；由於$\triangle XCY$ 爲等腰，可求出$\angle CXY$和$\angle CYX$（$\triangle BXZ$ 類似）；又或既然AB、BC、CA均爲切線，可先作X、Y、Z 到圓心的線段。事實上，三種方法均行。

除了從已知出發，我們亦可從未知回溯，亦可看自己手頭上有些什麼工具。以下便是一例。

例三

於圖四中，O爲圓心，QR爲切線，$OT \perp PR$及$OQ = QR$，求證$SP = ST$。



圖四

此題之已知太多了，不知從那個出發好。於是問：若要證$OQ = QR$，先要得些甚麼呢？又或者，撇除複雜的工具（如平行四邊形對邊相等之類）暫不去看，要證明兩長度相等，可用些其麼工具呢？於是，大家可於此作腦部衝擊式的習作。大家得到的結論可能有：

1. 畢氏定理
2. 全等三角形之相應邊
3. 弦的垂直平分該弦
4. 等腰三角形

這種在最後答案前的「中途站」稱爲「次目標」（SUBGOAL）。從Horn（1962）的研究中，發現對於複雜難題，非要設立次目標不可。李芳樂〔3〕對於中學生的研究亦發現數學解難應經過理解、次目標定立、找尋方案、實施方案、驗證的五個步驟。

以下一例便是專對「找尋方案」作腦部衝擊的。

例四

$A_1A_2A_3$爲一三角形，$A_2A_3 = a_1$，$A_3A_1 = a_2$，$A_1A_2 = a_3$並設$PA_i = X_i$（$i = 1, 2, 3$），P爲空間上任一點。證明

$$\frac{x_1}{a_1}+\frac{x_2}{a_2}+\frac{x_3}{a_3} \geqslant \sqrt{3}$$

並決定等式成立的條件。

對於此題，大家可隨意提出用幾何、坐標幾何、三角或微積分去處理，其實本題若用複數是較方便的。這種解難之要素便是Feldhusen〔4〕等人之謂「用不慣常方式看常見問題了」。

事實上，一般考試之題目均是「依法代入」的方式的解難，所需之工具一望而知，甚少需要自行探索者，而這種腦部衝擊式的習作便可補此不足。

若有一題多解之情況，則更能引起討論〔5〕，如那個方法較好、較快、應用較廣等。Pólya描述解難之四過程爲，認識題目、定出

方案、推行方案及回顧，在這四部都均可套以腦部衝擊之方式，譬如前例一中，AB 便無須為直徑，只須與CD垂直便可以了，這便可在回顧中作探討了。

參考文獻

〔1〕J.W. Pfeiffer, J.E. Jones, *A Handbook of Structured Experiences for Human Relations Training* vol. 3, University Associates Press, 1971.

〔2〕National Council of supervisors of Mathematics, *Position paper on basic mathematical skills* 1977.

〔3〕F.L.Li, *Analysis of Cognitive Strategies of Problem Solving process in mathematics and Physics. Master thesis*, Chinese University of Hong Kong, 1980.

〔4〕J.F. Feldhusen, J.C.Hontz & S.E. Ringenbach, The Purdue Elementary Problem-solving Inventory. *Psychology Reports*, 891-901, 1972.

〔5〕黃毅英，「學習數學過程中之觸類旁通」數學傳播(44)期，60-65頁，1987.

——本文作者為中文大學教育學院講師——