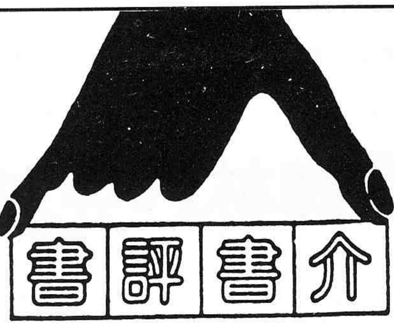

評莫宗堅先生「代數學(下)」

康明昌

書　　名：代數學(下)
作　　者：莫宗堅
出 版 者：聯經出版事業公司
出版時間：民國七十八年九月初版
定　　價：新台幣 300 元

(一)

在「數學傳播季刊」11 卷 4 期(民國 76 年12月出版)我們已介紹莫宗堅先生的「代數學(上)」，本文的目的是介紹這本書的下冊。

「代數學(上)」可以說是大學部與研究所一年級的代數課本，因此它所涵蓋的內容其實是相當確定的，如：羣、多項式、線性代數、體論。「代數學(下)」卻是一本研究所二年級以上的代數課本，所以如何選擇題材就可以看出作者的學養與品味。

莫宗堅先生的專長是代數幾何，並且他是傑出的代數幾何學家Oscar Zariski (1899 ～ 1986)的再傳弟子，因此他選擇交換代數做爲「代數學(下)」的中心題材，而且這本「代數學(下)」深具Zariski-Samuel的名著「Commutative Algebra」的風格，我們就一點兒也不驚奇。

(二)

代數幾何是在Abel (1802～1829)與Jacobi (1804～1851)研究橢圓積分與橢圓函數的時候誕生的(1826～1829)。B. Riemann (1826～1866)在1851年的博士論文與1857年討論Abel 函數的論文可以說是代數幾何研究的里程碑。在這兩篇論文，Riemann 建立

Riemann 曲面的基礎理論,他研究這些曲面的函數論與拓樸性質(如,虧格,請參考「代數學(下)」第 589 頁),證明(1)虧格爲 g 的 Riemann曲面恰有g 個線性獨立的全純微分型式,(2)Riemann 不等式(Riemann-Roch 定理的初等形式),(3)當 $g \geqslant 2$ 時,虧格爲 g 的 Riemann 曲面恰爲 $3g-3$ 個參數所決定 ,(4) Jacobi 反轉問題的一般形式。

Riemann在尋找具有某些性質的半純函數,最常用到的一個技巧就是:Dirichlet原則。可是Riemann 並沒有給予這個原則一個嚴格的證明。這個缺失引起Weierstrass(1815～1897)的抨擊。數學家因此從三個不同的角度試圖彌補這個缺失。

首先是Weierstrass 的學生 H. Schwarz(1843～1921)證明Dirichlet 問題的解的存在性。Schwarz 不像Riemann 使用變分法來解Dirichlet 問題,他利用 Poisson 積分求出一個調和函數的解。

然後是P. Clebsch(1833～1872)、P. Gordan(1837～1912)、 Max Noether(1844～1921)、A. Brill(1842～1935)想用代數的方法證明Riemann-Roch定理。他們把Riemann 的結果和當時流行的射影幾何聯繫起來。由於有系統的使用線性曲線系(尤其是伴隨曲線),他們不只完成了Riemann-Roch 定理的代數證明(請參考「代數學(下)」第 593 頁),他們還證明平面代數曲線的虧格公式,Max Noether 並且使用二次變換化解平面曲線的奇異點。這種研究代數曲線的方法後來由法國數學家Picard(1856～1941),意大利數學家Corrado Segre(1863 ～1924)、Castelnuovo(1865～1952)、Enrique(1871～1946)、Severi(1879～1961),加以發揚光大,用來研究代數曲面,成爲近世代數幾何的先河。

如果把Riemann 研究代數幾何的方法稱爲分析(函數論)與拓樸的方法,把Brill 與Max Noether 的方法稱爲幾何的方法,那麼L. Kronecker(1823～1891)、R. Dedekind(1831～1916)與Heinrich Weber(1842～1913) 使用純粹代數的方法不妨稱之爲數論(Arithmetic)的方法。

Kronecker的目的是要替代數幾何與代數數論建立一個堅實的代數基礎,因此他使用代數的方法定義不可約多樣體與代數多樣體的維數。後來E. Lasker(1868～1941)與Emmy Noether(1882～1935)把Kronecker 處理不可約多樣體的結果推廣到諾德環內理想的分解(請參考「代數學(下)」第六章第五節)。至於代數多樣體的維數論,在 1920 年代經過W. Krull(1899～1970)推廣到局部環的維數論(請參考「代數學(下)」第六章第六節與第九節),可說是日後研究局部環的開端。

Dedekind 與Weber 在 1882 年的論文的主要目的,與Brill 和Max Noether 的論文一樣,也是在尋找Riemann-Rock定理的代數證明。他們模仿代數數論中理想論的方法(請注意,Kronecker 與Dedekind 都是理想論的創立者),建立一套新的理論。他們從Riemann 曲面上所有的半純函數所形成的函數體(function field)出發,只使用代數的手法發展出因子、半純微分、虧格的概念,從而建立抽象的Riemann 曲面並且證明 Riemann-Roch 定理。

雖然Dedekind 與Weber 的代數理論只處理一維的諾德環,但是其概念的創新性卻引發日後Dedekind 整環(請參考「代數學(下)」第六章第二節與第八章)、賦值論(請參考「代數學(下)」第七章)與完備環(請參考「代數學(下)」第六章第八節)的研究。

可以說,到了十九世紀末期,交換代數已經呼之欲出。

(三)

二十世紀初期，德國數學家E.Steinitz建立抽象的體的理論，Emmy Noether(Max Noether的女兒)用公理化的方法研究Dedekind整環與諾德環，W.Krull(1899～1970)所證明的主理想定理(請參考「代數學(下)」第410頁)，標幟著交換代數的誕生。

Emmy Noether 研究諾德環時，顯然深受D.Hilbert(1862～1943)在多項式環一些重要定理的啓示，如Hilbert基底定理、Hilbert零點定理、Hilbert 特徵多項式、Hilbert合冲定理(請參考「代數學(上)」第164頁，「代數學(下)」第355，388、581、頁)。Hilbert當年是因爲研究不變量理論才證明這些定理，可是這些定理不僅成爲日後交換代數許多主題的原型，不變量理論在1960年代成爲代數幾何學家D.Mumford 研究模空間(moduli space) 的主要工具。

1950年代同調代數與層論(sheaf theory)的方法逐漸進入交換代數與代數幾何的研究領域。M.Auslander,Buchsbaum 與 Serre使用同調維數的概念證明正則局部環的局部化問題(請參考「代數學(下)」第九章)，M.Auslander與Buchsbaum 還證明正則局部環的唯一分解性質，Serre利用張量積及其導函子(Tor_i，i=0，1，2，…)定義代數多樣體的相交重數，Serre關於射影模的猜測(請參考「代數學(下)」第581頁)更是推動代數K理論研究的一大動力。

不可諱言的，自從1950 年代以後，交換代數所以有這麼蓬勃的發展，主要是它與代數幾何建立了密切無比的聯繫。早期幾個交換代數的創立者，如O.Zariski(1899～1986)、C.Chevalley(1909～1984)、M.Nagata(永田雅宜)、P.Samuel、J.P.Serre、A.Grothendieck，都是當代最傑出的代數幾何學者。我想，這也是莫宗堅先生爲什麼在「代數學(下)」加個附錄介紹代數曲線的原因：脫離了幾何源泉的交換代數，只不過是一堆毫無生趣的機械零件而已。

(四)

交換代數的名著極多，如

Zariski and Samuel，*Commutative Algebra*；

Nageta(永田雅宜)，*Local Rings*；

Grothendieck，*EGA* Ⅳ；

Bourbaki，*Algèbre commutative*，Chapitres 1～10，

但是，一個初學者在缺乏足夠多的代數訓練與代數幾何的預備知識時，顯然很難進入以上幾本經典著作的堂奧。

據H.Matsumura(松村英之)說，在1940、1950年代期間，永田雅宜先生只不過讀了幾篇Chevalley的論文(*Ann.*，*Math.* 44(1943)690～708；Trans. AMS 55(1944)68～84；ibid，57(1945)1～85)，就自力創建了局部環的主要理論。八十年代、九十年代的學生究竟要唸多少書才能「長大成人」呢？

我的建議是，只要能夠讀懂Zariski-Samuel 的書就夠了。或者，先讀莫宗堅先生的「代數學(下)」也足以掌握交換代數的精華所在。

我以爲，莫宗堅先生這本書第一個優點是著者的數學品味與題材的選擇。「代數學(下)」可以說是一本研究所二年級以上代數課程的課本，莫先生選擇交換代數作爲它的基本素材，在交換代數裏面又選擇幾個最基本的概念(局部化、整數擴充、完備化、平模、維數論、賦值論、Dedekind 整環)爲主題，可謂獨具隻眼。讀者只要找幾本以純代數觀點寫的交換代數的外文書，有些三、四百頁的書居然涵蓋不了一半以上的基本概念，卻引導讀者到支節的問題。──嗚呼，盡信書不如無書，誠哉斯言！

這本書第二個優點是它有許多例子。在本文第三節我們已經討論過，交換代數的重要性在於它與其他數學分支（尤其是代數幾何）的聯繫。讀「代數學（下）」這本書會覺得它比其他交換代數的書親近可親，因爲著者在介紹一些概念或定理時，總會舉一些代數幾何的實例做爲印證。事實上，唸數學總離不開例子，一個好的例子勝過一長串定義、定理、證明的組合。例如，莫先生在介紹Hilbert 特徵多項式時，先舉兩個例子（射影空間與代數曲線）並且點出它與算術虧格的關係，然後再證明Hilbert-Serre定理（請參考「代數學（下）」第384～392頁）。

本書的第三個優點是它的習題有許多具挑戰性且極有意義的題目，例如，在複合體（chain complex）的習題（第529～531頁），他請讀者計算8字形、輪胎面、實射影平面的同調羣，他要求學生在學習代數時還能把它和高等微積分融會貫通，而羣的上同調羣（group cohomology）只不過是他的習題11。

我想，好好的讀完莫宗堅先生這本「代數學（下）」的學生不只學到了交換代數的基礎知識，足以進一步的研究交換代數與代數幾何，他還可以體會到一種學習數學（尤其是代數）的態度：數學並不是一堆定義、定理、證明的無機的組合，它其實是由許多有意義的具體數學問題所引發的，基本的數學概念是相當自然而且具有高度的直觀，只需而且必須掌握這少數基本概念才足以瞭解我們所要研究的數學理論，基本的數學理論是聲氣相通、互相滲透的，各種數學分支並沒有明顯的畛域。莫宗堅先生這本「代數學（下）」可以說爲以上的理念做見證。

我鄭重的把這本書推荐給所有喜歡數學的朋友，也希望學有專精的數學家寫出更多的高水準的中文數學書籍。

——本文作者任敎於台大數學系——