項武義先生演講——

直線與圓(上)

直線和圓是空間中一直、一曲的兩種最爲簡樸、基本的幾何圖形，我們的幾何直觀泰半來自視覺，視覺乃是我們生活的環境高度透明，陽光普照之賜；其實光線——光在透明均勻介質中傳播的途徑——就是幾何中直線概念的直觀根源。圓是最爲對稱的平面形，也是最最有用者；旋轉移動和輪子是一切機械設計的基礎！它們也就是本章所要詳加深究的〝主角〞。

從幾何學的觀點來看，空間最最基本的結構就是兩點之間的唯一最短通路——連結兩點的那個直線段。所以在歐氏的幾何公理體系中，最爲基本者首推連結公理而連結公理的第一條就是：相異兩點定一直線！驟看起來，像連結公理這樣一組簡簡單單的性質，簡樸基本當然是不在話下，可也還眞看不出來它們會有多大的〝威力〞；因爲它們是最最基本的，所以往後的幾何研究論證中當然都是肯定要用它來作〝基石〞的，但是單單就憑這樣簡樸的公理，看來是推論不出什麼深刻的結果的，是不？但是此事不可貌相，別小看這樣幾條簡單至極的連結公理，它們不但基本，而且也還蘊含著引人入勝，豐富深刻道理呢！這也就是本章所要討論的第一個主題：連結公理的邏輯探討。在幾何學中，以直線爲主角，連結公理爲理論基礎而發展起來的分支叫做射影幾何學(Projective Geometry)。這是因爲透視投影(Perspections)和由它們組合而成的射影變換(Projections)乃是研討這種幾何問題的有力工具和幾何思想之所基。正因爲射影幾何學所研討的題材是極爲簡樸基本的直線與連結性質，它乃是古典幾何中最爲基本的基礎所在。

在本章第三節的研討中，即將揭露在直線、平面的連結、交截性質這種簡單的幾何結構之中，其實業已蘊涵著一種本質性的〝數域〞(field)結構。再者，射影幾何學的基礎理論也就是在於射影空間的本質性坐標化，它有效地把射影幾何的進一步研究歸於代數化的解析幾何。由此可見，射影幾何學就是代數幾何學的基礎，而代數幾何學也就是射影幾何學的自然拓展。對應於歐氏空間的情形，由其直線與平面的連結、交截性質所得的本質性數域當然就是實數域。但是由上述射影幾何的基礎理論來

看，把射影幾何學研究的範疇擴展到以其他"數域"爲其"基本域"是十分自然的，甚至於是相當必要的。例如在實射影幾何的研究中，以複素數爲其基本域的複射影幾何是不可缺的"後台"！在複射影幾何中，直線與圓自然地混爲一體，而保圓變換也就是相應於前述透視投影的自然推廣，所以圓和保圓變換的研討，其實也就是複射影幾何學的基礎之所基。總之，本章所研討者，就是實射影幾何和複射影幾何的基礎理論。

第一節　透視投影與射影性質

射影幾何的基本想法萌芽於Kepler(1571－1630)、Desargues(1593－1662)和Pascal(1623－1662)等的工作。到了十九世紀，Brainchon(1785－1864)，Poncelet(1788－1867)，Möbius(1790－1868)，Steiner(1796－1863)，von Staudt(1798－1867)，Plücker(1801－63)等的工作，有系統地把早先的想法發展成內容豐富的射影幾何學。射影幾何學所研討的課題是空間（或平面）的射影性質(Projective Properties)，亦即那種在透視投影之下保持不變的性質。所以開宗明義，我們得先說明什麼是透視投影。

設π_1、π_2是空間的兩個相異的平面，O點是π_1、π_2之外的取定一點。很自然地我們可以利用過O點的直線和π_1、π_2的交截聯系來定義如下，以O點爲透視中心，把π_1的點投影到π_2上的映射，稱之爲以O點爲心從π_1到π_2的透視投影(Perspection)，將以符號$\pi_1 \overset{O}{\wedge} \pi_2$記之，即

$$\begin{cases} \pi_1 \overset{O}{\wedge} \pi_2 : \pi_1 \to \pi_2 , \\ P_1 \in \pi_1 , P_2 \in \pi_2 \text{ 是對應點的充要條件是O、} \\ P_1 \text{、} P_2 \text{共線} \end{cases}$$

再者，由有限個透視投影組合而成的變換則稱之爲射影變換。一個平面幾何的性質或事物，若在所有透視投影的作用之下總是保持不變（當然也是在它們的組合之下保持不變的，亦即在所有射影變換之下總是保持不變的），就稱之謂一種射影性質或事物。例如直線的投影依然是直線，非退化的錐線的投影依然是非退化錐線，所以它們都是射影幾何研討的對象。再者，如二條直線相交，三點共線，三線共交於一點，二條曲線相交，相切等等都是射影性質；反之，長度、角度則並非射影性質，因爲它們並非在所有透視投影下保持不變的。由此可見，射影幾何學所研究的乃是一些比長度、角度等度量幾何性質要更加基本的性質。而射影變換則是貫穿全局的主角！

(一)透視投影和無窮遠點、射影空間

【分析】：

(i) 在上面所描述的透視投影：

$$\pi_1 \overset{O}{\wedge} \pi_2 : \pi_1 \to \pi_2$$

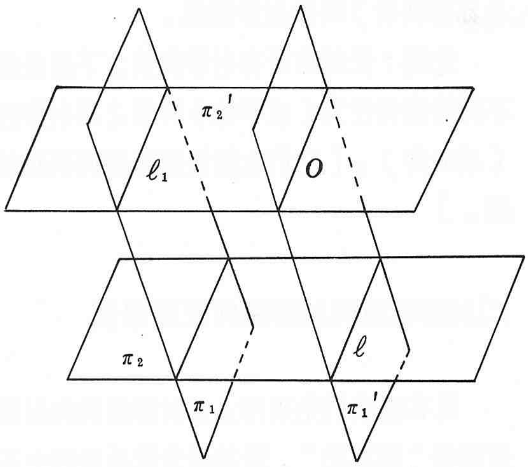
其實尙有其不足之處，需要適當地引進新概念來加以補充，方能使之完善無缺！如下圖所示，令π_1'、π_2'是過O點分別和π_1、π_2平行的平面，$\ell_1=\pi_1 \cap \pi_2'$，$\ell_2=\pi_2 \cap \pi_1'$，則有

$$P_1 \in \ell_1 \Rightarrow OP_1 /\!/ \pi_2 \text{，亦即 } OP_1 \cap \pi_2 = \phi \text{，}$$

$$P_2 \in \ell_2 \Rightarrow OP_2 /\!/ \pi_1 \text{，亦即 } OP_2 \cap \pi_1 = \phi \text{。}$$

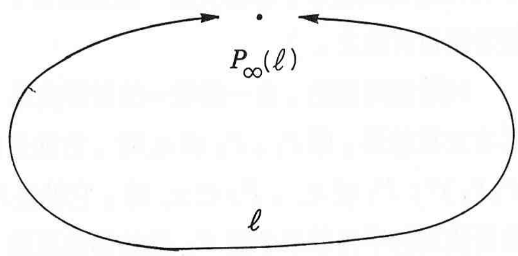
所以透視投影$\pi_1 \overset{O}{\wedge} \pi_2$對於$\ell_1$中的點其實是"不定義"的，而且$\ell_2$上的點則都不是它的像點。由此可見，它其實只是一個由$\pi_1 \setminus \ell_1$到$\pi_2 \setminus \ell_2$上的一、一上映射，即

$$\pi_1 \overset{O}{\wedge} \pi_2 , \quad \pi_1 \setminus \ell_1 \to \pi_2 \setminus \ell_2 \text{。}$$



(ii)遠在十七世紀初，天文學大師 Kepler 就提出了彌補上述缺陷的想法，那就是把二條平行線想成相交於一個無窮遠點；二個平行面想成是相交於一條由無窮遠點所組成的無窮遠直線。具體的做法是對於整個歐氏空間附加一個無窮遠平面，以符號 π_∞ 記之，它和原空間中的每一條直線交於一點，它就是該直線上的無窮遠點；它和原空間中的每一平面交於一條無窮遠直線。再者，空間中一個互相平行的直線系也就是一系共交於一個無窮遠點的直線，一個互相平行的平面系也就是一系共交於一條無窮遠直線的平面系。由此可見，在概念上我們就是在原來的歐氏空間上附加一個**新的點集**叫做**無窮遠平面**，π_∞，它所含的元素和歐氏空間中的平行線系成一、一對應，而且所對應的無窮遠點就定義為 π_∞ 和該平行線系中每一條直線的"共交之點"。再者，π_∞ 中的直線（稱之謂無窮遠直線）則和歐氏空間中的平行面系成一、一對應，而且所對應的無窮遠直線也就定義為 π_∞ 和該平行面系的每一平面的"共交之直線"。

(iii)加上無窮遠平面之後的空間叫做射影空間；加上無窮遠直線後的平面叫做一個射影平面；加上一個無窮遠點後的直線叫做一條射影直線。要注意的是一條射影直線只在歐氏直線上補加一個無窮遠點，而不是兩個無窮遠點，所以當一條直線 ℓ 上的動點 P 分別由兩端趨於無窮遠時，它是分別由兩側趨於同一個無窮遠點的。純粹從次序的觀點來看，一條射影直線 $\ell^*=\ell\cup P_\infty(\ell)$ 上的次序關係可以用下述圖解示意，即



符號：在本章中我們將以符號 $P_\infty(\ell)$ 表示附加於直線 ℓ 的無窮遠點，以 $\ell_\infty(\pi)$ 表示附加於平面 π 的無窮遠直線；以 ℓ^* 表示由直線 ℓ 擴充而成的射影直線（ projective line），π^* 表示由平面 π 擴充而成的射影平面（ projective plane ），亦即

$$\ell^*=\ell\cup P_\infty(\ell),\quad \pi^*=\pi\cup\ell_\infty(\pi)$$

總結上述分析，我們可以把射影空間（ projective space ，亦即歐氏空間附加點集 π_∞ 而成者）中的射影直線和射影平面之間的連結與交截關係列述如下。

射影空間中的連結與交截性質：

(i) $P_\infty(\ell_1)=P_\infty(\ell_2)\Longleftrightarrow \ell_1 /\!/ \ell_2$，

$\ell_\infty(\pi_1)=\ell_\infty(\pi_2)\Longleftrightarrow \pi_1 /\!/ \pi_2$，

$P_\infty(\ell)\in\ell_\infty(\pi)\Longleftrightarrow \ell /\!/ \pi$

(ii) $\ell^*\cap\pi_\infty=P_\infty(\ell)$，$\pi^*\cap\pi_\infty=\ell_\infty(\pi)$

(iii)射影空間中任給兩個相異的射影平面皆相交於一條射影直線。共有三種情形，即 $\pi_1^*\cap\pi_\infty=\ell_\infty(\pi_1)$；$\pi_1 /\!/ \pi_2$ 時 $\pi_1^*\cap\pi_2^*=\ell_\infty(\pi_1)=\ell_\infty(\pi_2)$；$\pi_1\cap\pi_2=\ell$ 時 $\pi_1^*\cap\pi_2^*=\ell^*$。

(iv)**共面**的兩條相異射影直線恆相交於一點：有下列幾種可能的情形，即 $\ell_1\cap\ell_2=\{P\}$ 時 $\ell_1^*\cap\ell_2^*=\{P\}$〔因為所加的 $P_\infty(\ell_1)\neq P_\infty(\ell_2)$〕；$\ell_1 /\!/ \ell_2$ 時 $\ell_1^*\cap\ell_2^*=P_\infty(\ell_1)=$

$P_\infty(\ell_2)$；$\ell_1\subset\pi_1$ 則有 $\ell_1^*\cap\ell_\infty(\pi_1)=P_\infty(\ell_1)$ 以及最後的可能性就是 $\ell_\infty(\pi_1)\cap\ell_\infty(\pi_2)=P_\infty(\pi_1\cap\pi_2)$〔因爲 $\ell_\infty(\pi_1)\neq\ell_\infty(\pi_2)$，所以 π_1、π_2 是不平行的，亦即 $\pi_1\cap\pi_2$ 是一條直線！〕

(v)一條射影直線和一個射影平面之間只有下列兩種交截情形，即相交於一點或相含。〔讀者試自討論之。〕

(vi)過相異兩點，有一條唯一的射影直線：共有三種情形，即 P_1，$P_2\notin\pi_\infty$ 時，它就是 $(P_1P_2)^*$；$P_1\notin\pi_\infty$，$P_2\in\pi_\infty$ 時，它就是 P_2 點所決定的平行線系中過 P_1 點的那條直線；P_1、$P_2\in\pi_\infty$ 時令 $\mathscr{T}_1$，$\mathscr{T}_2$ 分別是以 P_1、P_2 爲其公共無窮遠點的平行線系；對於任給歐氏空間中的一點 Q，令 π 爲由 $\mathscr{T}_1$、$\mathscr{T}_2$ 中過 Q 點的直線 ℓ_1、ℓ_2 所決定的平面，則上述 P_1、$P_2\in\pi_\infty$ 所決定的射影直線就是 $\ell_\infty(\pi)$〔設 Q' 是另外一點，則有 $\pi'/\!/\pi$，所以 $\ell_\infty(\pi')=\ell_\infty(\pi)$。由此可見上述 $\ell_\infty(\pi)$ 是和 Q 的選用無關的！〕

(vii)過不共線三點，有一個唯一的射影平面〔讀者試自行討論之。〕

概括地來說，射影空間是比歐氏空間多加了一個稱之爲**無窮遠平面**的點集，π_∞，並且還要加以定義其擴充後的連結與交截而成的結構，它也就是把當年Kepler“平行就是交於無窮遠”的想法加以具體化後，所得的空間結構。它具有簡潔完美的連結、交截性質［主要的好處是消除了歐氏空間中線面交截中“平行”的這種特殊情形，使得其連結交截性質上變得完整劃一。］所以是研討連結、交截性質的幾何的自然範疇！例如，在射影空間中，前述透視投影就變得完善無缺的了。

定義：對於射影空間中任給兩個相異射影平面 π_1^*、π_2^* 和其外一個定點 O，以 O 點爲中心由 π_1^* 到 π_2^* 的透視投影：$\pi_1^*\overset{O}{\wedge}\pi_2^*$：$\pi_1^*\to\pi_2^*$ 的特徵性質就是 $P_1\in\pi_1^*$ 和其像點 $P_2\in\pi_2^*$ 恆與 O 點共線（Colinear）。

定義：由有限個透視投影組合而成的變換（亦即映射）叫做射影變換。

定義：任何在所有射影變換之下總是保持不變的幾何性質（或事物）皆稱之爲射影性質（或事物）。［它們也就是射影幾何研討的主題。］

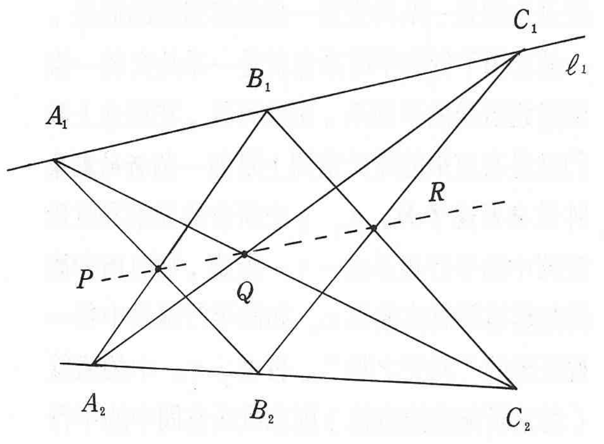
(二)射影性質與射影幾何定理學例

現在讓我們先來用上述射影變換與射影性質這種“新觀點”，對於原先歐氏幾何中某些基本知識作一番溫故知新的工作。

【例1】巴布斯（Pappus）定理：

早在紀元三百年左右，巴布斯（Pappus）就發現到下述耐人尋味的定理：

在平面上任給兩條直線 ℓ_1，ℓ_2 及其上分別任取三點 A_1，B_1，C_1 和 A_2，B_2，C_2 令 P、Q、R 分別是 A_1B_2 和 A_2B_1；A_1C_2 和 A_2C_1；B_1C_2 和 B_2C_1 的交點，則 P、Q、R 三點共線。現在讓我們改用射影幾何的觀點來加以分



析：

(i)上述巴布斯定理的敍述之中，只涉及點線的連結與交截關係，所以都是在透視投影之下保持不變的射影事物與性質，換句話說，巴布斯定理其實是射影幾何中的一個定理！

(ii)既然上述定理乃是一個在射影變換之下保持不變的命題。那麼是否可以適當地運用射

影變換，把它變換成一種比較容易證明的某種特殊形式呢？假若能夠的話，當然也就可以把巴布斯定理的論證，根本歸於這種易證的特殊簡明的形式來加以證明！

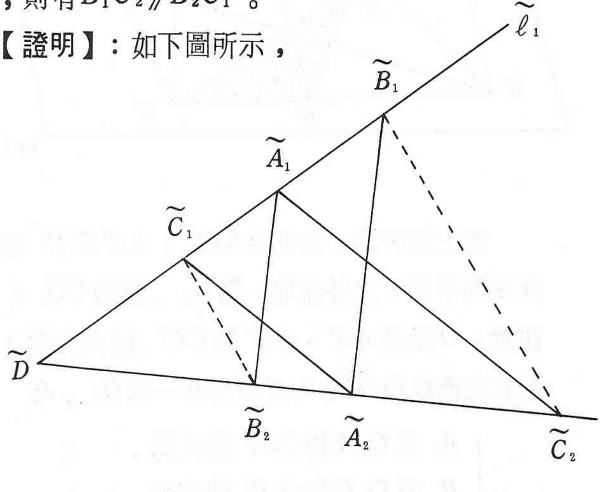
(iii) 設上述 ℓ_1、ℓ_2 所在的平面爲 π；P、Q 所定的直線爲 ℓ。我們所要證明者就是 $R\in\ell$，假如我們能用一個適當的透視投影 $\pi^* \underset{\wedge}{\overset{O}{}} \widetilde{\pi}^*$，它把 ℓ^* 映像到 $\ell_\infty(\widetilde{\pi})$。令 $\widetilde{A}_i$，$\widetilde{B}_i$，$\widetilde{C}_i$，$i=1,2$，分別是 A_i，B_i，C_i 在上述透視投影下的像點。則有 $\widetilde{A}_1\widetilde{B}_2$ 和 $\widetilde{A}_2\widetilde{B}_1$ 交於 $\widetilde{P}\in\ell_\infty(\widetilde{\pi})$；$\widetilde{A}_1\widetilde{C}_2$ 和 $\widetilde{A}_2\widetilde{C}_1$ 交於 $\widetilde{Q}\in\ell_\infty(\widetilde{\pi})$ 亦即 $\widetilde{A}_1\widetilde{B}_2 /\!/ \widetilde{A}_2\widetilde{B}_1$；$\widetilde{A}_1\widetilde{C}_2 /\!/ \widetilde{A}_2\widetilde{C}_1$。所以假如我們能夠由上述兩對直線的平行性推導出“$\widetilde{B}_1\widetilde{C}_2 /\!/ \widetilde{B}_2\widetilde{C}_1$”，亦即 $\widetilde{R}$ 也屬於 $\ell_\infty(\widetilde{\pi})$。那麼就可以再用 $\widetilde{\pi}^* \underset{\wedge}{\overset{O}{}} \pi^*$ 來推論 R 也必然屬於 $\ell_\infty(\widetilde{\pi})$ 的映像 ℓ，亦即 P、Q、R 三點共線。

(iv) 像上面這樣的透視投影是不難構造的，我們可以任取 π 之外一點爲 O，令 O、P、Q 這不共線三點所定的平面爲 π'；令 $\widetilde{\pi}$ 是一個和 π' 不相交的一個平行面，亦即 $\widetilde{\pi}\cap\pi'=\phi$。則易見 $\pi^* \underset{\wedge}{\overset{O}{}} \widetilde{\pi}^*$ 就是一個把 ℓ 映像到 $\ell_\infty(\widetilde{\pi})$ 的透視投影。

總結上述四點分析，巴布斯定理的證明就可以歸於下述簡單的特殊情形來加以論證，即

巴布斯定理的特例：設有 $\widetilde{A}_i$，$\widetilde{B}_i$，$\widetilde{C}_i\in\widetilde{\ell}_i$，$i=1,2$，而且 $\widetilde{A}_1\widetilde{B}_2 /\!/ \widetilde{A}_2\widetilde{B}_1$，$\widetilde{A}_1\widetilde{C}_2 /\!/ \widetilde{A}_2\widetilde{C}_1$，則有 $\widetilde{B}_1\widetilde{C}_2 /\!/ \widetilde{B}_2\widetilde{C}_1$。

【證明】：如下圖所示，



設：

$$\overrightarrow{\widetilde{D}\widetilde{B}_2}=\boldsymbol{a}\ ,\ \overrightarrow{\widetilde{D}\widetilde{C}_1}=\boldsymbol{b}\ ,\ \overrightarrow{\widetilde{D}\widetilde{A}_2}=\lambda\cdot\boldsymbol{a}$$

$$\overrightarrow{\widetilde{D}\widetilde{A}_1}=\mu\cdot\boldsymbol{b}$$

則由所設 $\widetilde{A}_1\widetilde{B}_2 /\!/ \widetilde{A}_2\widetilde{B}_1$，$\widetilde{A}_1\widetilde{C}_2 /\!/ \widetilde{A}_2\widetilde{C}_1$ 和相似三角形定理，即有

$$\overrightarrow{\widetilde{D}\widetilde{B}_1}=\lambda\overrightarrow{\widetilde{D}\widetilde{A}_1}=\lambda\cdot(\mu\cdot\boldsymbol{b})=(\lambda\cdot\mu)\cdot\boldsymbol{b}$$

$$\overrightarrow{\widetilde{D}\widetilde{C}_2}=\mu\cdot\overrightarrow{\widetilde{D}\widetilde{A}_2}=\mu\cdot(\lambda\cdot\boldsymbol{a})=(\mu\cdot\lambda)\cdot\boldsymbol{a}$$

由實數的乘法交換律 $\lambda\cdot\mu=\mu\cdot\lambda$ 得知 $\Delta\widetilde{D}\widetilde{B}_2\widetilde{C}_1$ 和 $\Delta\widetilde{D}\widetilde{C}_2\widetilde{B}_1$ 有一個公共角而且兩夾邊對應成比例，所以它們是相似的，亦即 $\widetilde{B}_1\widetilde{C}_2 /\!/ \widetilde{B}_2\widetilde{C}_1$。

【例 2】迪沙久（Desargues）定理：

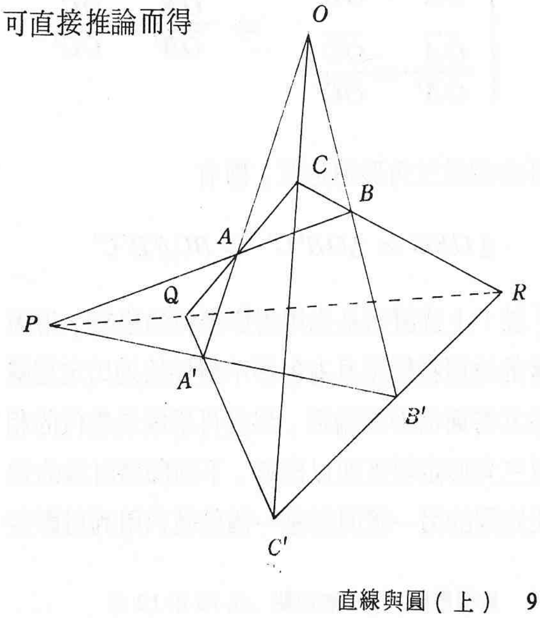
設有 ΔABC 和 $\Delta A'B'C'$ 若其對應點的連線 AA'，BB' 和 CC' 共交於一點，則其三對對應邊的交點共線。反之，若其三對對應邊的交點共線，則三對對應點連線共點。

【證明 1】：

(i) 如下圖所示，令 $P=AB\cap A'B'$，$Q=AC\cap A'C'$，$R=BC\cap B'C'$。我們所要證者有互逆的兩個命題，即：

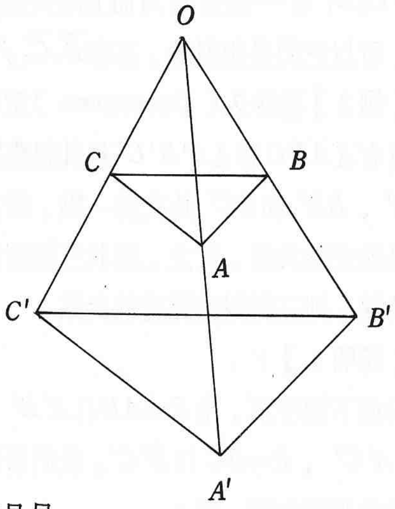
$$\begin{cases} AA'、BB'、CC' \text{ 共交於一點 } O \\ \qquad\qquad \Rightarrow P、Q、R \text{ 三點共線，} \\ P、Q、R \text{ 三點共線} \Rightarrow AA'、BB'、CC' \\ \qquad\qquad \text{共交於一點 } O\text{。} \end{cases}$$

但是我們其實只要先證明前者，則後者就可以把已證的前者改用到 $\Delta AA'Q$ 和 $\Delta BB'R$，即可直接推論而得



(ii) 我們也可以像前面對於巴布斯定理的論證一樣，運用適當的透視投影，把上述命題的證明變換到P、$Q\in \ell_\infty$ 的特簡情形，然後只要再去推導R也必須屬於 ℓ_∞ 。改用歐氏幾何的術語來說，就是可以把一般情形的論證歸於下述特殊情形來加以論證，即

廸沙久定理之特例： 設有ΔABC和$\Delta A'B'C'$的三對對應點連線AA'、BB'、CC' 共交於一點O；而且$AB /\!/ A'B'$ ，$AC /\!/ A'C'$ ，則有$BC /\!/ B'C'$ 。茲證之如下：



由所設易見

$$\begin{cases} \Delta OAB \backsim \Delta OA'B' \\ \Delta OAC \backsim \Delta OA'C' \end{cases}$$

用相似三角形定理卽有

$$\begin{cases} \dfrac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} = \dfrac{\overline{OB}}{\overline{OB'}} \\ \dfrac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} = \dfrac{\overline{OC}}{\overline{OC'}} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{\overline{OB}}{\overline{OB'}} = \dfrac{\overline{OC}}{\overline{OC'}}$$

再由相似三角形逆定理，卽有

$$\Delta OBC \backsim \Delta OB'C' \Rightarrow BC /\!/ B'C'$$

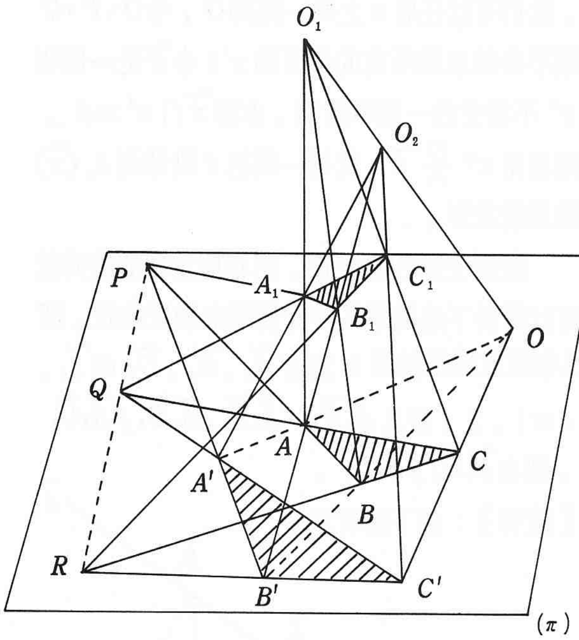
[註：上述證明是先用射影幾何的思想，用適當的透視投影把具有射影不變性的迪氏定理歸於其特簡情形來論證，然後再用歐氏幾何的相似三角形定理來加以推導。下面卽將討論的迪氏定理的另一證明則是一個僅僅只用到射影空間的連結與交截性質的證明，所以是一種至純至簡的證法。再者，這個純樸的證明不但單純得可愛，而且還具有深刻的意義，有待於在第三節中再詳加剖析呢！]

【證明 2】：

(i)先證空間中的迪沙久定理，亦卽設有不共面的兩個$\Delta A_1B_1C_1$ 和ΔABC ，若它們的三對對應點連線A_1A、B_1B和C_1C 共交於一點O_1 。則其三對對應邊的交點共線，反之亦然。

耐人尋味的是上述空間的迪氏定理的證明反而是十分簡單的！令π_1^*和π^*分別是$A_1B_1C_1$和ABC所張的射影平面。則上述三對對應邊的交點當然都是交線$\pi_1^* \cap \pi^*$ 上的點，所以共線。由此可見，它根本就是射影空間中點、線、面的連結與交截性質的直接推論！

(ii) 現在讓我們再來把平面的迪氏定理也歸於上述業已得證的空間迪氏定理來推導。



如上圖所示，先在ΔABC、$\Delta A'B'C'$ 所共在的平面π之外任取一點O_1 ，連結$\overline{OO_1}$（注意：O點是AA'、BB'和CC' 的共交點）並且在直線段$\overline{OO_1}$ 中任取另外一點O_2 ，令

$$\begin{cases} A_1 \text{ 為 } O_1A \text{ 和 } O_2A' \text{ 的交點，} \\ B_1 \text{ 為 } O_1B \text{ 和 } O_2B' \text{ 的交點，} \\ C_1 \text{ 為 } O_1C \text{ 和 } O_2C' \text{ 的交點} \end{cases}$$

則由上述所作，ΔABC 和 $\Delta A'B'C'$ 乃是 $\Delta A_1B_1C_1$ 分別以 O_1 和 O_2 爲透視中心在 π 上的投影！由此可見，

$$\begin{cases} \Delta A_1B_1C_1 \text{ 和 } \Delta ABC, \\ \Delta A_1B_1C_1 \text{ 和 } \Delta A'B'C' \end{cases}$$

就是兩對滿足空間迪氏定理的所設者！

令 ℓ 爲 π 和 $\Delta A_1B_1C_1$ 所在的平面 π_1 的交線，P、Q 和 R 分別是 $A_1B_1\cap AB$，$A_1C_1\cap AC$ 和 $B_1C_1\cap BC$，則 P、Q、$R\in\ell$。再者，$\Delta AA_1A'$ 和 $\Delta BB_1B'$ 不共面，而且其三對對應邊的交點分別就是（共線的）O，O_1 和 O_2。所以它們的三對對應對點的連線必然共點，亦即 A_1B_1 和 $A'B'$ 也肯定交於 P 點。同理可證 $A_1C_1\cap A'C'=Q$，$B_1C_1\cap B'C'=R$。這樣也就證明了 ΔABC 和 $\Delta A'B'C'$ 的三對對應邊的交點共線，（亦即平面的迪氏定理）因爲它們就是共在直線 ℓ 上的 P、Q、R。

［註：上述迪氏定理的另證是先用連結交截的基本性質證明空間的迪氏定理，然後再用透視投影的想法由共面的 ΔABC、$\Delta A'B'C'$ 去構造另外一個不共面的 $\Delta A_1B_1C_1$ 使得 ΔABC、$\Delta A'B'C'$ 分別是 $\Delta A_1B_1C_1$ 在 π 上的不同透視投影，這樣就可以用已證的空間迪氏定理來推導平面的迪氏定理。值得注意的是在上述推導中總共用了四次空間迪氏定理。］

【例 3】調和點例：共線的四點 $\{A$、B、P、$P'\}$ 成調和點列的定義是有向線段 $\overrightarrow{AP}$，$\overrightarrow{BP}$，$\overrightarrow{AP'}$，$\overrightarrow{BP'}$ 的下述"交叉比"(cross-ratio）爲 -1，亦即

$$\frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{BP}}\cdot\frac{\overrightarrow{BP'}}{\overrightarrow{AP'}}=-1$$

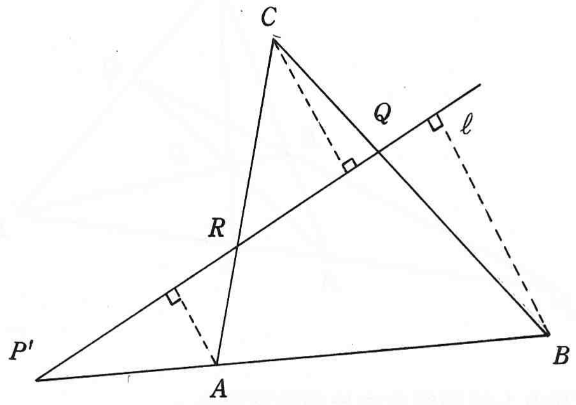
（以後將用符號（$AB;PP'$）表示交叉比）

在上述調和點列的定義中涉及長度的比值這種並非射影不變的幾何性質，所以驟看起來，它當然不一定是一種射影事物，但是進一層的分析却能揭示它乃是一種射影事物的本質。

【分析】

(i)此事也許應該先從歐氏幾何學中兩個有趣的定理說起，亦即是下述孟納勞斯（Menelous）定理和西瓦（Ceva）定理。

孟氏定理：設 P'、Q、R 分別是 ΔABC 的三邊所在的直線上的三點，（如下圖所示）

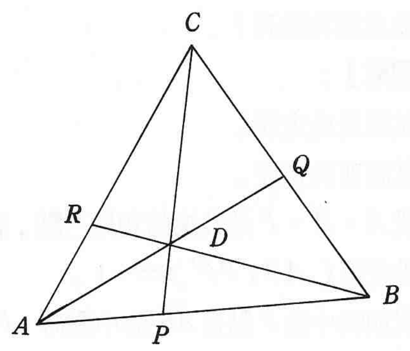


則它們共線的充要條件就是下述有向線段之比的乘積爲 -1，即

$$\frac{\overrightarrow{AP'}}{\overrightarrow{P'B}}\cdot\frac{\overrightarrow{BQ}}{\overrightarrow{QC}}\cdot\frac{\overrightarrow{CR}}{\overrightarrow{RA}}=-1$$

［用相似三角形定理，可以改用 A、B、C 三點和直線 ℓ 的距離來表達上述三個有向比，讀者試自證之。］

西氏定理：設 P、Q、R 是分居於 ΔABC 的三邊所在的直線上的三點。（如下圖所示）

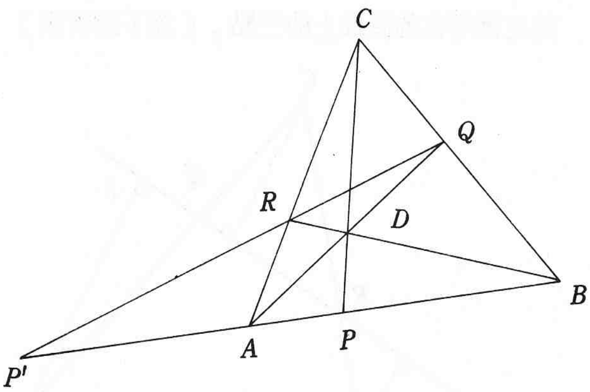


則 AQ、BR、CP 三線共交於一點的充要條件是下述有向線段之比的乘積等於 1，即

$$\frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{PB}}\cdot\frac{\overrightarrow{BQ}}{\overrightarrow{QC}}\cdot\frac{\overrightarrow{CR}}{\overrightarrow{RA}}=1$$

[讀者試自證之。設三線交於D點，試將上述三個線段之比轉換成ΔABD，ΔBCD，ΔCAD的面積之比，從而證明上述乘積等於1 。]

將上述二個定理的幾何結構複合在一起即得下述幾何圖形：



和由上述兩組有向比相消而得者：

$$\frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{PB}} \cdot \frac{\overrightarrow{BP'}}{\overrightarrow{P'A}} = -1$$

亦即上述圖形結構中的$\{A、B;P、P'\}$是調和點列，亦即$(AB;PP')=-1$。反之，設$(AB;PP')=-1$，則也必定可以構造上述幾何圖形(讀者試自討論之)。由此可見，上述幾何結構乃是$(AB;PP')=-1$的充要條件！因為上述幾何結構顯然是在透視投影之下保持不變的，所以調和點列乃是一種射影事物，亦即調和點列的透視投影(或射影變換)的像點依然成調和點列！

【習題】：

(1)試證孟氏定理。

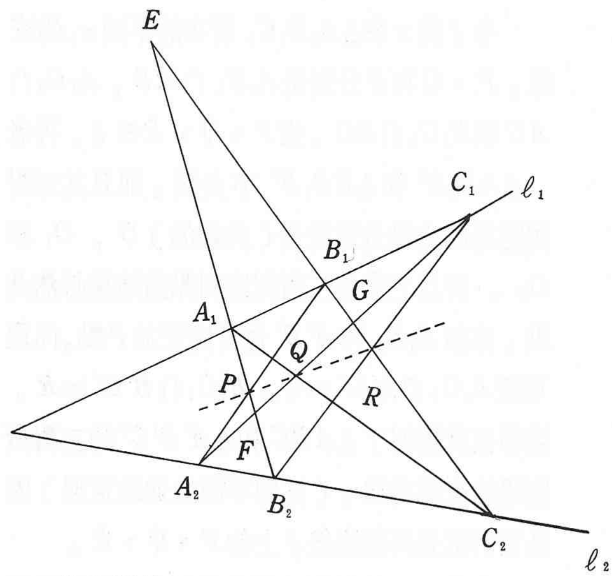
(2)試證西氏定理。

(3)設A、B、P是共線的相異三點，試求作第四點使得$(AB;PP')=-1$。

(4)假如(3)中的P點是$\overline{AB}$的中點時，P'是是如何一點？

(5)假如(3)中的P點其實是AB線上的無窮遠點時，P'是如何一點？

(6)遠在紀元三百年左右的巴布斯，當年還沒有射影幾何的想法或解析幾何這種簡潔有力的工具。他當時又究竟用什麼法子來推導這樣一個有趣的定理的呢？因為孟氏定理是當年即已發現者，所以它是用來推導這種三點共線的自然工具，讀者可以參考下述圖形，用孟氏定理試證巴氏定理：



【分析】：

(i)要想用孟氏定理來論證巴氏定理，當然得有一個三角形，使得想要證明它們是共線的P、Q、R這三點分居於其三條邊線之上，由此可見，我們應該

A_1B_2和A_2B_1，A_1C_2和A_2C_1，
B_1C_2和B_2C_1

這三對中各選其一，用來構成所要選用的三角形的三個邊線。例如上圖中的ΔEFG是由A_1B_2，B_1C_2和C_1A_2所構成者。(其實其他的選法和上述選法在本質上是一樣的，讀者試自討論之。)

(ii) 在巴氏定理所涉及的幾何結構中，總共有八條原給直線，即為

ℓ_1，ℓ_2，A_1B_2，A_2B_1，A_1C_2，A_2C_1，
B_1C_2和B_2C_1

其中已經用了三條來組成ΔEFG，所以還剩下五條直線。對於它們各別和ΔEFG的交截使用孟氏定理，即得五個三比值相乘等於-1的

等式，把它們適當地相乘相消即可得出孟氏逆定理中P、Q、R三點共線的條件式。讀者試自證之。

第二節　直線的射影對應與射影性質

在上一節所討論的射影空間、透視投影和射影性質舉例，對於射影幾何學的基本結構和基本想法作了一個簡明扼要的介紹。本節將進一步開始探討射影幾何學的基礎理論。在開始研討之前，我們應該要想一想，究竟要從何處著手？要用何法探索？才能眞正抓住射影幾何這個“新天地”中的精要本質呢？說實話，此事當然難以肯定地預言，但是在以往其他的幾何學的治學經驗之中却大有可供借鏡之處。長話短說，例如從上兩章研討的體驗中，最最引人入勝，發人深思之處就是：**至精即至簡**！這種精簡合而爲一的完美和妙用，可以說就是我們精益求精地鑽研求知的鵠的。同時它也啓發我們在治學中，愈是簡樸基本的事物，愈要精益求精地詳加研討！愈能引人入勝！在射影幾何研討的事物之中，至簡者莫若點與直線。由此可見我們自然要研究一下“共線的有限點列”的射影性質。例如設$\{P_i;1\le i\le n\}$和$\{Q_i;1\le i\le n\}$是兩組共線的n點列，要掌握它們的那些射影性質才能足以判別兩者是否能夠互相射影變換，亦即如下述所定義的射影等價性。

(一)直線之間的射影對應

在研討共線的有限點列的射影性質上，可以把上一節所述的空間透視投影簡化到射影平面中的透視投影。

定義：設ℓ_1^*、ℓ_2^*是π^*中的兩條相異(射影)直線，O是$\ell_1^*\cup\ell_2^*$之外的π^*中取定一點，我們將以$\ell_1^*\overset{O}{\wedge}\ell_2^*$表示以$O$爲中心由$\ell_1^*$到$\ell_2^*$的透視投影，其特徵性質就是$P_1\in\ell_1^*$和其像點$P_2\in\ell_2^*$恆與$O$點共線，亦即

$$\ell_1^*\overset{O}{\wedge}\ell_2^*:\ell_1^*\to\ell_2^*$$

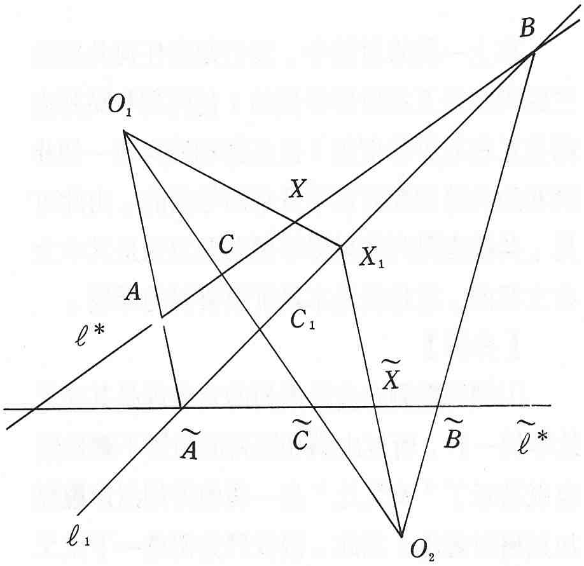
$P_1\in\ell_1^*$的像點就是$OP_1\cap\ell_2^*$。

定義：由有限個上述直線之間的透視投影組而成的映射叫做直線之間的**射影對應**(projective correspondences)。

定義：設$\{P_i;1\le i\le n\}$和$\{Q_i;1\le i\le n\}$是分別位於ℓ^*和$\tilde{\ell}^*$上的n點列。若存在適當的射影對應$\rho:\ell^*\to\tilde{\ell}^*$使得$\rho(P_i)=Q_i$，$1\le i\le n$，則稱它們是射影等價的(projectively equivalent)。

【例1】所有共線三點列，都是互相射影等價的。

【證明】設A、B、C和$\tilde{A}$，$\tilde{B}$，$\tilde{C}$分別是直線ℓ^*和$\tilde{\ell}^*$上的任給相異三點，我們要“求作”一個適當的射影對應$\rho:\ell^*\to\tilde{\ell}^*$使得$\rho(A)=\tilde{A}$，$\rho(\tilde{B})=\tilde{B}$和$\rho(C)=\tilde{C}$。其作法如下：(不妨設$\ell^*$和$\tilde{\ell}^*$是相異的)



如上圖所示，連結$A\tilde{A}$和$C\tilde{C}$相交於O_1點，再連結$B\tilde{B}$和$C\tilde{C}$相交於O_2點，令ℓ_1爲直線$\tilde{A}B$，則

$$\rho=(\ell_1^*\overset{O_2}{\wedge}\tilde{\ell}^*)\circ(\ell^*\overset{O_1}{\wedge}\ell_1^*)$$

即爲所求的一個射影對應，易見上述兩個透視投影的作用如下：

$$A\to\widetilde{A}\to\widetilde{A}\ ,\quad B\to B\to\widetilde{B}\ ,$$
$$C\to C_1\to\widetilde{C}\ ,\quad X\to X_1\to\widetilde{X}$$

【例2】設 $(AB;PP')=-1$ 是一組調和點列，則共線四點列 $\{\widetilde{A},\widetilde{B},\widetilde{P},\widetilde{P'}\}$ 和 $\{A,B,P,P'\}$ 射影等價的充要條件是 $(\widetilde{A}\widetilde{B};\widetilde{P}\widetilde{P'})=-1$。

【證】：因爲調和點列的射影變換依然是一組調和點列，所以必要性成立。再者，設 $(\widetilde{A}\widetilde{B};\widetilde{P}\widetilde{P'})=-1$。令 ρ 是如例1所作的射影對應使得

$$\rho(A)=\widetilde{A},\quad \rho(B)=\widetilde{B},\quad \rho(P)=\widetilde{P}$$

令 $\widetilde{Q}=\rho(P')$，則有 $(\widetilde{A}\widetilde{B};\widetilde{P}\widetilde{Q})=-1$，（調和點列的射影不變性）。但是在 $\widetilde{\ell}^*$ 上只有唯一一點滿足 $(\widetilde{A}\widetilde{B};\widetilde{P}X)=-1$，所以 $\rho(P')=\widetilde{Q}=\widetilde{P'}$

(二)交叉比的射影不變性

在上一段的討論中，我們知道任何共線的三點列都是互相射影等價的；任何調和點列也都是互相射影等價的；但是調和點列和一個非調和的共線四點列就不是射影等價的。由此可見，共線四點列的射影等價問題看來是其中大有文章的，這也就是本段所要研討的課題。

【分析】

(i)調和點列在度量幾何的定義就是其交叉比等於 -1。所以由調和點列的射影不變性質也就啓示了“交叉比”是一個值得用射影觀點加以研討者也。爲此。讓我們先明確一下交叉比的定義與符號：

定義與符號：對於共線的任給四點列 A、B、C、D；我們將以符號 $(AB;CD)$ 表示其交叉比，它的定義是

$$(1)\qquad (AB;CD)=\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}}\cdot\frac{\overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{AD}}$$

再者，對於任給有序的實數 x_1、x_2、x_3、x_4，其交叉比定義爲

$$(1')\qquad (x_1x_2;x_3x_4)=\frac{x_3-x_1}{x_3-x_2}\cdot\frac{x_4-x_2}{x_4-x_1}$$

[假如在 A、B、C、D 所共在的直線上選定一個坐標系。而且 x_1、x_2、x_3、x_4 分別上述四點的坐標，則顯然有 $(AB;CD)=(x_1x_2;x_3x_4)$。]

(ii)不難由上述交叉比的定義，直接驗算交叉比具有下列基本性質：

$$(2)\begin{cases}(\alpha)\quad (x_2x_1;x_3x_4)=(x_1x_2;x_3x_4)^{-1}\\ \qquad\quad =(x_1x_2;x_4x_3)\\ (\beta)\quad (x_1x_2;x_3x_4)=(x_3x_4;x_1x_2)\\ \qquad\quad =(x_2x_1;x_4x_3)\\ (\gamma)\quad \text{設 } a、b、c、d \text{ 是任給滿足}(ad-bc)\end{cases}$$

$\neq 0$ 的常數，令 $y_i=\dfrac{ax_i+b}{cx_i+d}$，

$i=1,2,3,4$，則有

$$(3)\qquad (y_1y_2;y_3y_4)=(x_1x_2;x_3x_4)$$

上述三點之中，(α) 和 (β) 可以說是顯而易見者；而 (γ) 則可直接驗算如下：

$$(4)\qquad \begin{aligned} y_i-y_j&=\frac{ax_i+b}{cx_i+d}-\frac{ax_j+b}{cx_j+d}\\ &=\frac{ad-bc}{(cx_i+d)(cx_j+d)}(x_i-x_j)\end{aligned}$$

將(4)式代入 $(y_1y_2;y_3y_4)$ 的定義式，相消之後，即得

$$(y_1y_2;y_3y_4)=(x_1x_2;x_3x_4)$$

[註：在數學中，由變數 x 代換成 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$，$ad-bc\neq 0$，這種變換叫做線性分式變換。因此性質 (γ) 也就叫做交叉比的“線性分式不變性。”]

(iii)我們還可以把交叉比的定義略加擴充，使得其中一點（或一數）可以是無窮遠點（或無窮大∞）

(5)
$$(AB;C\infty):=\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}}$$
$$(x_1x_2,x_3\infty):=\frac{x_3-x_1}{x_3-x_2}$$

［換句話說，也就是把 $\frac{\overrightarrow{B\infty}}{\overrightarrow{A\infty}}$ 和 $\frac{\infty-x_2}{\infty-x_1}$ 都定義為其極限值 1 。］

【例 1】$(x\,1;0\infty)=\frac{0-x}{0-1}=x$

【例 2】對於任給相異實數 x_2、x_3、x_4，都可以求得適當的實數 a、b、c、d；使得

(6)
$$\begin{cases} ad-bc=\pm1 \\ y_2=\dfrac{ax_2+b}{cx_2+d}=1, \quad y_3=\dfrac{ax_3+b}{cx_3+d}=0 \\ y_4=\dfrac{ax_4+b}{cx_4+d}=\infty \end{cases}$$

【解】由上述要求用待定係數法，即有條件式

(7)
$$\begin{cases} y_3=0 \Rightarrow ax_3+b=0 \\ y_4=\infty \Rightarrow cx_4+d=0 \\ y_2=1 \Rightarrow ax_2+b-(cx_2+d)=0 \end{cases}$$

把(7)想成是待定係數 a、b、c、d 的三個齊一次方程系，其係數矩陣為

(7′)
$$\begin{pmatrix} x_3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_4 & 1 \\ x_2 & 1 & -x_2 & -1 \end{pmatrix}$$

解之即得其非零解為：

(8)
$$\begin{cases} a=\lambda(x_2-x_4), & b=\lambda x_3(x_4-x_2) \\ c=\lambda(x_2-x_3), & d=\lambda x_4(x_3-x_2) \end{cases}$$

其中 λ 為一非零參數，再將(8)代入條件 $ad-bc=\pm1$ 即得

$$\lambda^2(x_4-x_3)(x_3-x_2)(x_2-x_4)=\pm1$$

因為 x_2，x_3，x_4 是相異的，所以可由上式解得 λ，從而求得待定的 a、b、c、d 。

【例 3】設 A_0，A_1，A_2，……，A_n，…分別是在一個直線坐標系中取整數坐標 0，1，2，……，n，…的點列則有

$$(A_0A_2;A_1\infty)=(A_1A_3;A_2\infty)$$
$$=(A_2A_4;A_3\infty)=\cdots\cdots$$
$$=(A_{n-1}A_{n+1};A_n,\infty)=-1$$

亦即上述一串四點列皆成調和點列。反之設上述各組皆為調和點列，而且在直線上取用使得 A_0、A_1 的坐標分別是 0、1 的直線坐標系，則 A_2，A_3，…，A_n，…的坐標分別就是 2，3，……，n，……。

【例 4】設 B_0，B_1，B_2，……，B_n，……分別是在一個直線坐標系中取坐標

$$1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\cdots\cdots,(\frac{1}{2})^n,\cdots\cdots$$

的點列，則有

$$(A_0B_0;B_1\infty)=(A_0B_1;B_2\infty)$$
$$=(A_0B_2;B_3\infty)=\cdots\cdots$$
$$=(A_0B_{n-1},B_n\infty)=-1$$

亦即上述一串四點列都是調和點列。反之，設上述各組皆為調和點列，而且直線上取用使得 A_0，B_0 的坐標分別為 0、1 的坐標系。則 B_1，B_2，……，B_n，……的坐標分別就是 $\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$，……，$(\frac{1}{2})^n$，……。

定理 1：設 $\rho:\ell^*\to\tilde{\ell}^*$ 為一個任給射影對應，A、B、C、D 是 ℓ^* 中任給一個四點列，令 $\tilde{A}$、$\tilde{B}$、$\tilde{C}$、$\tilde{D}$ 分別是它們在對應 ρ 下的像點，則有

$$(AB;CD)=(\tilde{A}\tilde{B};\tilde{C}\tilde{D})$$

[亦即交叉比在射影對應的作用之下是保持不變的，簡稱之謂“交叉比的射影不變性”。]

【證明】：

(1)由前面對於交叉比的討論，易見交叉比是和直線上的坐標系的選取無關的，而且也是在線性分式的變換之下保持不變的。設 t，$x \in \boldsymbol{R}\cup\{\infty\}$ 分別是 ℓ^*、$\widetilde{\ell}^*$ 上對於一個選定坐標系的坐標，則上述射影對應

$$\rho : \ell^* \to \widetilde{\ell}^*$$

就可以用坐標形式表達成 $x=\varphi(t)$。由此可見，定理 1 的證明也就此轉換成要證明

$$(\varphi(t_1)\varphi(t_2);\varphi(t_3)\varphi(t_4))=(t_1t_2,t_3t_4)$$

(2)由交叉比的定義易見

$$(t_1t_2;t_3\infty)=-1 \Longleftrightarrow t_3=\frac{1}{2}(t_1+t_2) \tag{9}$$

令 $\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{R}$ 中由所有能寫成 $\frac{m}{2^n}$ 這種形式的有理數所組成的子集。再者，用例 2 的計算卽可取定一個線性分式變換 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}=w(x)$，$ad-bc=\pm1$，使得當 $t=0,1,\infty$ 時，$y=w(\varphi(t))$ 也是 $0,1,\infty$。

(3)由調和點列的射影不變性和(9)式（參看例 3、4）不難看到：

$$w(\varphi(t))\equiv t \quad \text{對於 } t\in\boldsymbol{B} \text{ 恆成立}$$

再者，從次序關係的觀點來看，一條射影直線有如一個圓圈，亦卽除去其上兩點之後，就能把它分割成兩段（歐氏直線的次序關係是除去一點之後就能把它分割成兩段！）由此可見，組合函數 $w(\varphi(t))$ 其實是一個 t 的單調函數。所以它根本就是恆等函數；亦

$$w(\varphi(t))\equiv t \quad \text{對於所有 } t\in\boldsymbol{R} \text{ 皆成立}$$

這也就證明了

$$\begin{aligned}&(\varphi(t_1)\varphi(t_2);\varphi(t_3)\varphi(t_4))\\ &=(w(\varphi(t_1))w(\varphi(t_2));w(\varphi(t_3))w(\varphi(t_4)))\\ &=(t_1t_2;t_3t_4)\end{aligned}$$

[證畢]

[註：上述證明，其實也就是說 $\varphi(t)$ 乃是 t 的一個線性分式函數。]

【推論 1】：任何一個射影直線之間的射影對應 ρ：$\ell^*\to\widetilde{\ell}^*$ 由它在相異三點之“值”所唯一確定。

【證明】：設 $\rho_i : \ell^*\to\widetilde{\ell}^*$，$i=1,2$，是兩個射影對應，$A$、$B$、$C$ 是 ℓ^* 上任取三點，而且有

$$\widetilde{A}=\rho_1(A)=\rho_2(A),\ \widetilde{B}=\rho_1(B)=\rho_2(B),$$
$$\widetilde{C}=\rho_1(C)=\rho_2(C)$$

由定理 1 得知

$$\begin{aligned}(\widetilde{A}\widetilde{B};\widetilde{C}\rho_1(X))&=(\widetilde{A}\widetilde{B};\widetilde{C}\rho_2(X))\\ &=(AB;CX)\end{aligned}$$

對 ℓ^* 中任何相異於 A、B、C 之點 X 皆成立，由此易見 $\rho_1(X)=\rho_2(X)$ 對於 ℓ^* 中的每一點皆成立，亦卽 $\rho_1\equiv\rho_2$ 是同一個射影對應。

【推論 2】：兩組共線的四點列 $\{A$、B、C、$D\}$ 和 $\{\widetilde{A}$、$\widetilde{B}$、$\widetilde{C}$、$\widetilde{D}\}$ 是射影等價的充要條件是它們具有相同的交叉比，亦卽

$$(AB;CD)=(\widetilde{A}\widetilde{B};\widetilde{C}\widetilde{D})$$

【證明】：定理 1 說上述條件顯然是必要的，玆證明其充分性如設 A、B、C、$D\in\ell^*$；$\widetilde{A}$、$\widetilde{B}$、$\widetilde{C}$、$\widetilde{D}\in\widetilde{\ell}^*$ 是分居於 ℓ^* 和 $\widetilde{\ell}^*$ 之中的四點組，且有 $(AB;CD)=(\widetilde{A}\widetilde{B};\widetilde{C}\widetilde{D})$。由(一)中的例 1 得知存在一個適當的射影對應 ρ：$\ell^*\to\widetilde{\ell}^*$ 使得

$$\rho(A)=\widetilde{A},\quad \rho(B)=\widetilde{B},\quad \rho(C)=\widetilde{C}$$

再用定理 1 卽有

$$\begin{aligned}(\widetilde{A}\widetilde{B},\widetilde{C}\rho(D))&=(AB;CD)\\ &=(\widetilde{A}\widetilde{B};\widetilde{C}\widetilde{D})\end{aligned}$$

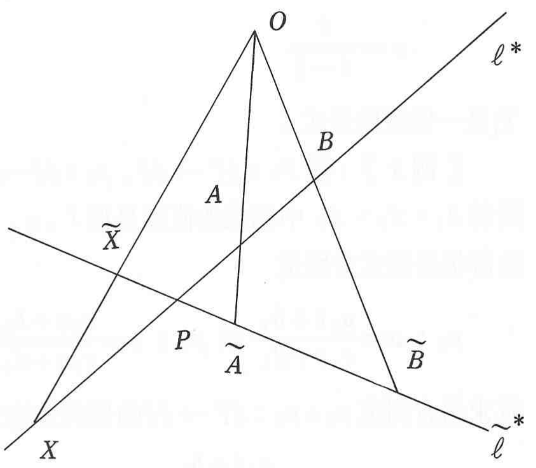
所以$\rho(D)$必須就是D！

［註：上面的證明其實也說明了：對於分居於ℓ^*、$\tilde{\ell}^*$之中的三點列$\{A、B、C\}$和$\{\tilde{A}、\tilde{B}、\tilde{C}\}$都存在一個唯一的射影對應$\rho: \ell^* \to \tilde{\ell}^*$，使得$\rho(A)=\tilde{A}$，$\rho(B)=\tilde{B}$和$\rho(C)=\tilde{C}$。

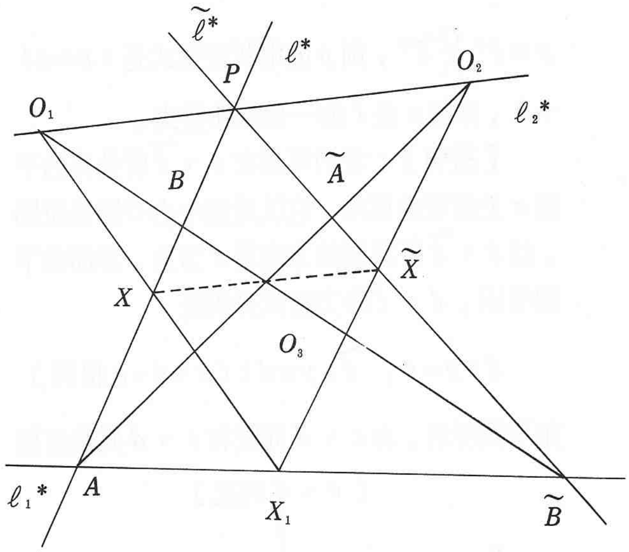
設ℓ^*和$\tilde{\ell}^*$相交於P點，則任何一個透視投影$\ell^* \overset{O}{\wedge} \tilde{\ell}^*: \ell^* \to \tilde{\ell}^*$ 顯然是把P映射到其本身的，很自然的我們會問一下：是否上述透視投影保持交點不動的性質業已構成一個射影對應根本就是一個透視投影的特徵性質呢？

【推論 3】：設$P=\ell^* \cap \tilde{\ell}^*$，$\rho: \ell^* \to \tilde{\ell}^*$是一個滿足條件$\rho(P)=P$ 的射影對應。則ρ本身就是一個透視投影。［亦即射影對應$\rho: \ell^* \to \tilde{\ell}^*$ 是一個透視投影的充要條件是$\rho(P)=P$，$P=\ell^* \cap \tilde{\ell}^*$］

【證明】：在ℓ^*上任取P之外的兩點A、B，令$\tilde{A}=\rho(A)$，$\tilde{B}=\rho(B)$，$O=A\tilde{A} \cap B\tilde{B}$，則顯然有$\ell^* \overset{O}{\wedge} \tilde{\ell}^*$ 和ρ在P、A、B這三點的像點相同，所以$\rho=\ell^* \overset{O}{\wedge} \tilde{\ell}^*$乃是一個透視投影，（如下圖所示）。



在這裏要給讀者指出一個引人入勝的“古今呼應”，亦即上述推論 3 和遠在紀元三百年所發現的巴布斯定理其實是密切相關的兩件事！如下圖所示，設有$\ell^* \cap \tilde{\ell}^*=P$，$\ell^* \cap \ell_1^*=A$，$\tilde{\ell}^* \cap \ell_1^*=\tilde{B}$，$O_1PO_2$共線，如下圖所示：



令$\rho=(\ell_1^* \overset{O_2}{\wedge} \tilde{\ell}^*) \circ (\ell^* \overset{O_1}{\wedge} \ell_1^*)$則它是一個使得$P=\ell^* \cap \tilde{\ell}^*$ 固定不動的一個射影對應$\rho: \ell^* \to \tilde{\ell}^*$，由推論 3 得知$\rho$必定是一個透視投影。再者，由上圖可見，$\rho(A)=\tilde{A}$，$\rho(B)=\tilde{B}$，所以這個透視投影的中心必然就是$O_3=A\tilde{A} \cap B\tilde{B}$，設$X_1$是$\ell_1^*$上任給一點，連結$O_1X_1$和$O_2X_2$分別交截$\ell^*$、$\tilde{\ell}^*$於$X$和$\tilde{X}$點，則易見有$\rho(X)=\tilde{X}$，所以上圖所示的$X$、$O_3$、$\tilde{X}$當然應該是共線的！這就是遠在紀元三百年巴布斯所發現的定理！

㈢直線的射影對應的解析表法

現在讓我們改用解析幾何的手法來研討直線之間的射影對應。在兩條射影直線ℓ^*和$\tilde{\ell}^*$上我們可以分別選定其上一個直線坐標系，設t、$u \in \mathbf{R} \cup \{\infty\}$分別是$\ell^*$、$\tilde{\ell}^*$上的坐標參變數。對於這樣各別選定的直線坐標系，一個由ℓ^*到$\tilde{\ell}^*$的射影對應的解析表式就是$u=\varphi(t)$，它表達了在ℓ^*中坐標為t的點，在ρ的作用下映射到$\tilde{\ell}^*$中的像點的u-坐標。在定理 1 的證明中，我們業已看到上述$u=\varphi(t)$應該是一個線性分式函數！現在讓我們再用解析的方法來說明此點，其實也就是給定理 1 提供了一個解析法的另一證明。

【例 1】：設$\ell^* \cap \tilde{\ell}^*=\{\infty\}$，亦即$\ell /\!/ \tilde{\ell}$

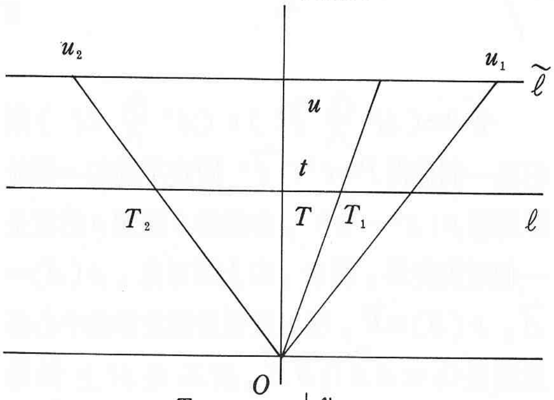
$\rho=\ell^{*}\overset{O}{\wedge}\tilde{\ell}^{*}$，則 ρ 的解析表達式是：$u=at+b$，亦即 u 是 t 的一個線性整式。

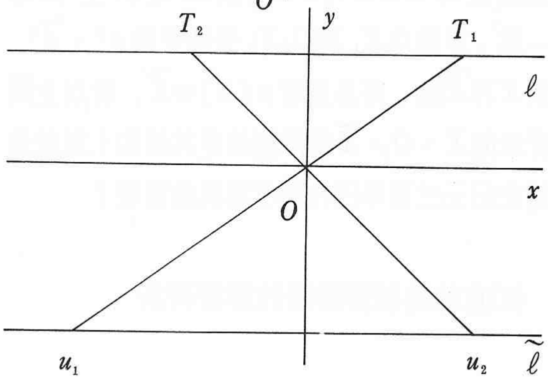
【證明】：我們可以在 ℓ、$\tilde{\ell}$ 所共在的平面 π 上選取坐標系，它以透視中心 O 點為原點，以 ℓ、$\tilde{\ell}$ 所共同的方向為 x 方向，亦即如下圖所示，ℓ、$\tilde{\ell}$ 的方程式分別是

$$\ell: y=c,\quad \tilde{\ell}: y=d;\ (c、d、o\ 相異)$$

如下圖所示，有 c、d 同號和 c、d 異號這樣

（c、d 同號）





（c、d 異號）

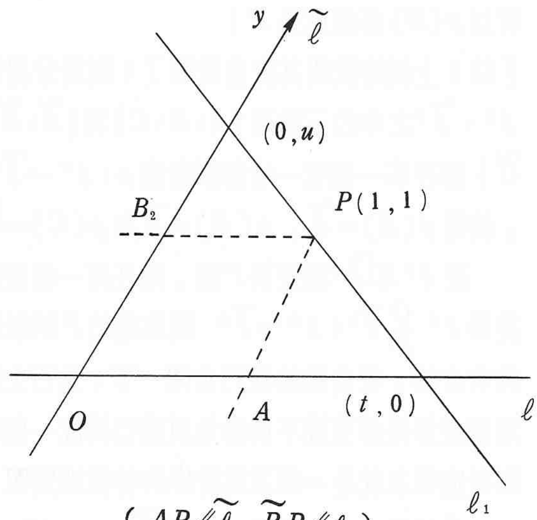
兩種情形，我們可以選用平面坐標中的 x- 坐標作為 ℓ、$\tilde{\ell}$ 上的直線坐標 t，u。則不難算得

$$t:u=c:d$$

亦即 $$u=\frac{c}{d}t$$

【例 2】：設 $\ell^{*}\cap\tilde{\ell}^{*}=O$，$\rho=\ell^{*}\overset{P}{\wedge}\tilde{\ell}^{*}$。試求 ρ 的坐標解析表達式。

【解】：為此，我們可以先對於 ℓ、$\tilde{\ell}$ 所共在的平面 π 選取如下的平行坐標系：它分別以 ℓ、$\tilde{\ell}$ 為其 x、y- 軸而且 P 點的坐標是 $(1,1)$。如下圖所示，亦即分別以 $\overrightarrow{OA}$ 和 $\overrightarrow{OB}$



（$AP /\!/ \tilde{\ell}$，$\tilde{B}P /\!/ \ell$）

為基底的斜坐標系。令 ℓ_1 是過 P 點的任一直線，它在 x，y 軸上的截距分別是 t，u，則 ℓ_1 的截距式就是

$$\ell_1:\frac{x}{t}+\frac{y}{u}=1$$

$$P=(1,1)\in\ell_1\Rightarrow\frac{1}{t}+\frac{1}{u}=1$$

（這也就是 t，u 的關係式）

解之即得所求之坐標解析表達式為：

$$u=\frac{t}{t-1}$$

它是一個線性分式。

【例 3】：設 $\rho_1:\ell_1^{*}\to\ell_2^{*}$，$\rho_2:\ell_2^{*}\to\ell_3^{*}$ 對於 ℓ_1、ℓ_2、ℓ_3 中已選的直線坐標 t，u，v 的解析表達式分別是

$$\rho_1:\ u=\frac{a_1t+b_1}{c_1t+d_1}\ 和\ \rho_2:\ v=\frac{a_2u+b_2}{c_2u+d_2}$$

試求組合對應 $\rho_2\circ\rho_1:\ell_1^{*}\to\ell_3^{*}$ 的解析表達式。

【解】：將 $u=\dfrac{a_1t+b_1}{c_1t+d_1}$ 直接代入 ρ_2 的表達式，即可算得：

$$v=\frac{a_2u+b_2}{c_2u+d_2}=\frac{a_2\left(\dfrac{a_1t+b_1}{c_1t+d_1}\right)+b_2}{c_2\left(\dfrac{a_1t+b_1}{c_1t+d_1}\right)+d_2}$$

$$=\frac{a_3t+b_3}{c_3t+d_3}$$

其中 $a_3=(a_2a_1+b_2c_1)$，$b_3=(a_2b_1+b_2d_1)$

$c_3=(c_2a_1+c_1d_2)$，$d_3=(c_2b_1+d_1d_2)$

亦即兩個線性分式變換的組合依然是一個線性分式變換。

定理 1 的解析形式：設 $\rho: \ell^* \to \tilde{\ell}^*$ 是任給一個直線的射影對應，t、u 分別是 ℓ^*、$\tilde{\ell}^*$ 中任取之直線坐標系，則 ρ 的坐標解析表達式 $u=\varphi(t)$ 乃是一個線性分式函數。

【**證明**】：由定義 $\rho: \ell^* \to \tilde{\ell}^*$ 乃是有限個透視投影的組合，由上述例 1、例 2 的計算得知：任何一個透視投影的坐標表達式總是一個線性分式變換。再者，例 3 的計算說明了任何兩個線性分式變換的組合依然是一個線性分式變換。由此可見，$\rho: \ell^* \to \tilde{\ell}^*$ 的坐標表達式也還是一個線性分式。［證畢］

推論 1：設 $P_i \in \ell^*$，$\tilde{P}_i=\rho(P_i)\in\tilde{\ell}^*$ 的坐標分別是 t_i 和 u_i，$i=1,2,3,4$ 則有

$$\begin{aligned}(\tilde{P}_1\tilde{P}_2;\tilde{P}_3\tilde{P}_4)&=(u_1u_2;u_3u_4)\\&=(t_1t_2;t_3t_4)\\&=(P_1P_2;P_3P_4)\end{aligned}$$

（亦即交叉比的射影不變性）。

【**證**】：$u=\varphi(t)$ 是一個線性分式變換，所以

$$\begin{aligned}(u_1u_2;u_3u_4)&=(\varphi(t_1)\varphi(t_2);\varphi(t_3)\varphi(t_4))\\&=(t_1t_2;t_3t_4)\end{aligned}$$

因爲交叉比是在線性分式變換之下不變的！

定義：對於一條射影直線 ℓ^* 上任給相異三點 A、B、C。令 $t=(AB;CT)$。則一、一對應

$$\ell^* \ni T \longleftrightarrow t \in \mathbf{R}\cup\{\infty\}$$

叫做 ℓ^* 上以三點列 $\{A、B、C\}$ 爲基點列的射影坐標系。

推論 2：設 $\{A、B、C\}$，$\{A', B', C'\}$ 是 ℓ^* 的兩組三點列，t 和 u 分別是 ℓ^* 以 $\{A、B、C\}$ 和 $\{A'、B'、C'\}$ 爲基點列的射影坐標系，則它們之間的坐標變換式 $u=\varphi(t)$ 是一個線性分式變換。

【**證**】：設 $T\in\ell^*$ 是 ℓ^* 中任給一點，則

$$t=(AB,CT),\quad u=(A'B';C'T)$$

令 ρ 是那個把 A'、B'、C' 分別映射到 A、B、C 的射影對應，則有

$$\begin{aligned}u&=(A'B';C'T)\\&=(\rho(A')\rho(B');\rho(C')\rho(T))\\&=(AB;C\rho(T))=\varphi(t)\end{aligned}$$

由上述定理 1（解析形式）即有 $\varphi(t)$ 是一個線性分式。

【**例 1**】：A、B、C 在坐標系 $t=(AB;CT)$ 中的坐標分別就是 ∞，0，1。

【**例 2**】：設 A'、B'、C' 在坐標系 $t=(AB;CT)$ 中的坐標分別是 t_1、t_2、t_3，則有

$$\begin{aligned}u&=(A'B';C'T)=(t_1t_2;t_3t)\\&=\frac{t_3-t_1}{t_3-t_2}\cdot\frac{t-t_2}{t-t_1}\end{aligned}$$

這也就是上述坐標變換式的實給形式。

㈣直線束與直線束的射影對應

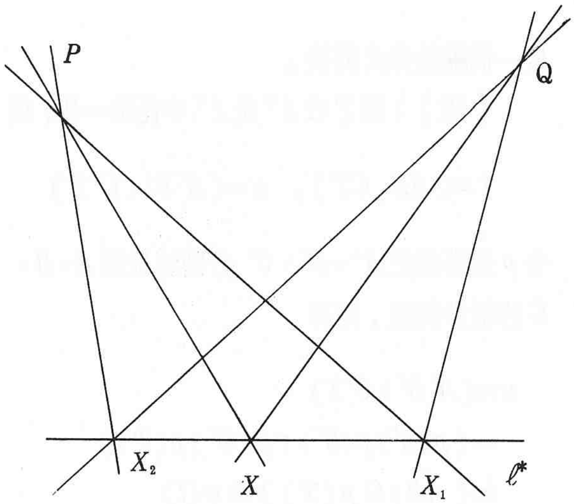
定義：在射影平面 π^* 上，由所有過定點 P 的射影直線組成的集合叫做一個直線束（pencil of lines）。我們將用符號 L_P 表示這個直線束。

定義：設 $\mathscr{L}_P$、$\mathscr{L}_Q$ 是兩個直線束，ℓ^* 是一條不過 P、Q 點的射影直線，$X\in\ell^*$ 是 ℓ^* 上的動點，則下述對應

$$\mathscr{L}_P \ni PX \longleftrightarrow QX \in \mathscr{L}_Q \text{（如下圖所示）}$$

叫做以 ℓ^* 爲軸由 $\mathscr{L}_P$ 到 $\mathscr{L}_Q$ 的透視投影，我們將以符號 $\mathscr{L}_P \overset{\ell^*}{\wedge} \mathscr{L}_Q$ 記之。

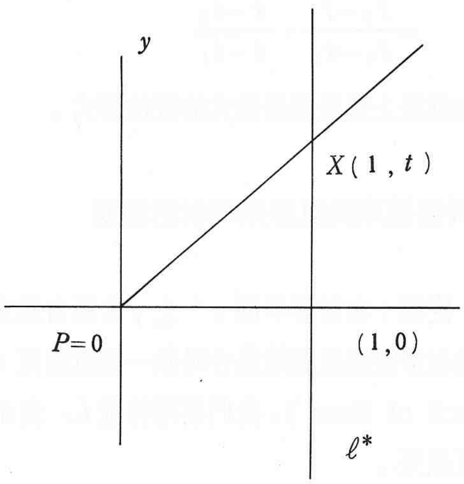
再者，由有限個上述軸透視投影組合而成的直線束之間的對應叫做直線束射影對應。



【例 1】：設 ℓ^* 是一條不過 P 點的射影直線，則 $\mathscr{L}_P$ 中的元素和 ℓ^* 中的點之間有下述自然的一・一對應，即

$$\ell^* \ni X \longleftrightarrow PX \in \mathscr{L}_P$$

例如當 P 是一個笛氏坐標系的原點，ℓ 是 $x=1$ 的那一條直線。我們可以用 ℓ^* 上動點 X 的 y- 坐標作爲 ℓ^* 的坐標 t，亦即 $X=(1,t)$。



則有 $\mathscr{L}_P \ni PX \longleftrightarrow X=(0,t) \in \ell^*$

$\uparrow$

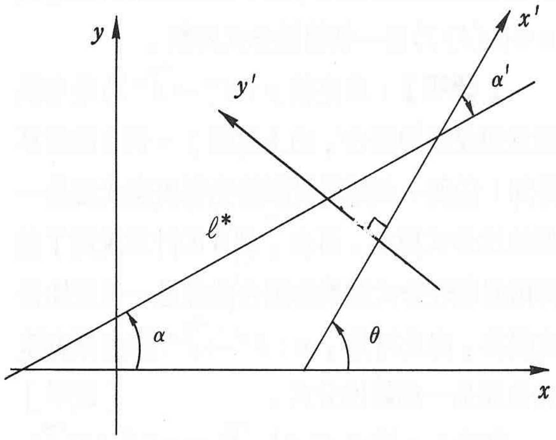
$t \in \boldsymbol{R} \cup \{\infty\}$

易見上述一、一對應中 t 也就是直線 PX 的斜率，而且在 PX 是 y- 軸時，$t=\infty$。由此可見，我們可以用上述一、一對應把射影直線 ℓ^* 上的一個射影坐標系移植到直線束 $\mathscr{L}_P$ 上，這樣也就建立了一個直線束 $\mathscr{L}_P$ 上的射影坐標系。

【例 2】：對於一個選定的笛氏坐標系，將 $\mathscr{L}_P$ 中每一條直線的斜率作爲它的"坐標"就是 $\mathscr{L}_P$ 上的一個射影坐標系。

【例 3】：設 $\mathscr{L}_P$ 中直線 ℓ^* 對於兩個笛氏坐標系的斜率分別是 t 和 u，則它們之間的坐標變換式是一個線性分式變換。

【證】：設上述兩個笛氏坐標的 x- 軸和 x'- 軸之間的夾角是 θ，直線 ℓ^* 對於兩個坐標系的傾斜角分別是 α、α'，則有 $\alpha=\alpha'+\theta$，所以



$$u=\tan\alpha'=\tan(\alpha-\theta)=\frac{\tan\alpha-\tan\theta}{1+\tan\alpha\tan\theta}$$

$$=\frac{t-c}{1+ct}\quad , \quad c=\tan\theta$$

定義：設 $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4$ 是 $\mathscr{L}_P$ 中的四條直線，它們的斜率分別是 m_1, m_2, m_3, m_4，則定義它們的交叉比爲

$$(\ell_1\ell_2;\ell_3\ell_4)=(m_1m_2;m_3m_4)$$

$$=\frac{m_3-m_1}{m_3-m_2}\cdot\frac{m_4-m_2}{m_4-m_1}$$

[由例 3 可見上述直線的交叉比的定義是和坐標系的選取無關的！]

定理 1'：(i)任何直線束之間的射影對應 ρ：$\mathscr{L}_P \to \mathscr{L}_Q$ 由它在三條直線所取之值所唯一確定。

(ii) 一個直線束中四線列 $\{\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4\}$ 的交叉比是一射影不變量。

(iii) 一個直線束上的兩個射影坐標系之間的坐標變換是一個線性分式變換。

(iv) 一個射影對應 ρ ： $\mathscr{L}_P \to \mathscr{L}_Q$ 對於 $\mathscr{L}_P$ 、 $\mathscr{L}_Q$ 中各別選定的射影坐標系的解析表達式是一個線性分式。

［證明留作習題。］

【習題】：

⑴設有相異七點 A、B、C、P_1、P_2、P_3、P_4，令

$$t_i=(AB\,;CP_i) \quad i=1,2,3,4$$

試用 t_i 表達交叉比 $(P_1P_2\,;P_3P_4)$

⑵試討論一條射影直線 ℓ^* 上五點列之間的射影等價的充要條件。［提示，四點列的射影等價充要條件是它們具有相同的交叉比！］

⑶試討論一條射影直線 ℓ^* 上 n 點列之間的射影等價的充要條件。

第三節　基本域與射影空間坐標化

在前兩節對於射影變換與射影性質的研討過程中，我們經常利用射影空間和歐氏空間兩者之間的密切關聯，借助於歐氏幾何業已熟知的性質與知識。例如在交叉比的定義中用到線段長度之比，在巴氏定理、迪氏定理的證一中都用到歐氏幾何中的平行與相似形，基本上乃是採用射影觀點的一種溫故知新，其實這種故新並用的做法是很自然的一種由故知邁向新知的好辦法，但是本節則將改弦更張，採用“純射影”的研討方式來明確射影幾何的本質並建立其基礎理論。

射影空間的基本結構在於其點、線、面之間的連結與交截。本節所要探討的主題就是它這種既簡單又劃一的連結、交截性質的本質蘊含，若把連結與交截局限於射影平面（二維者也），則其公理只有“兩點定一線”和“兩線交於一點”這樣極爲簡單的二條；僅僅只用它們是顯然難以推論出什麼深刻的結果的。在三維的射影空間的情形，則又多加了“不共線三點定一平面”和“兩面相交於一直線”這樣兩條。驟看起來，即使有了上述四條點、線、面的連結交截公理，似乎也還是難以有什麼大作爲的，但是邏輯蘊含往往是不能由貌相可知其深淺的；而是只有實事求是，精益求精的深入探討才能得見其全貌，洞察其實蘊的。

在連結交截公理的邏輯探討上第一個重大突破就是第一節中對於迪沙久（Desargues）定理的證2，它是一個僅僅只用到上述四條基本性質的“純射影”的論證，其實，迪氏定理也就是連結、交截公理所能論證的範疇之中的基本定理；它是整個射影幾何基礎論的基石所在。

總之，本節的主題就是上述四條連結、交截公理的抽象理論，而迪氏定理則是用來建立這個射影幾何基礎理論的有力工具。

㈠迪氏定理與線段代數

在上一節的討論中，我們是借助於歐氏直線坐標系和交叉比來建立射影直線坐標系的，是否能夠有一種“純射影”的辦法來建立射影直線坐標系呢？這個問題也就是本節的主攻要點。爲此，讓我們對於上一節的所思所得再來下一翻溫故知新的功夫：

【分析】：

(i)由上一節之㈢的討論得知在一條射影直線 ℓ^* 上任取一個三點列 $\{E、O、P\}$，即可確立在 ℓ^* 上的一個射影坐標系，亦即

$$\ell^* \ni T \longleftrightarrow t=(TE\,;OP) \in \boldsymbol{R}\cup\{\infty\}$$

它的特徵性質是：

⑴ E，O，P 的坐標分別是 1，0 和 ∞。

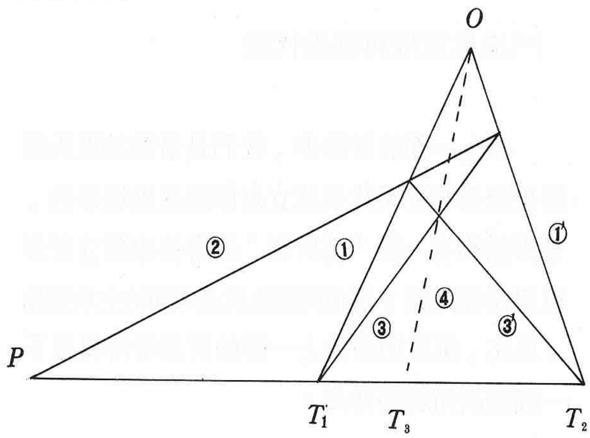
⑵任給一個四點列 T_i，$i=1,2,3,4$，的交叉比等於其坐標的交叉比，亦即

$$(T_1T_2\,;T_3T_4)=(t_1t_2\,;t_3t_4)$$

例如 $\{T_1、T_2、T_3、P\}$ 成調和點列，則有

$$\{t_1 t_2; t_3 \infty\} = -1 \Longleftrightarrow t_3 = \frac{1}{2}(t_1 + t_2)$$

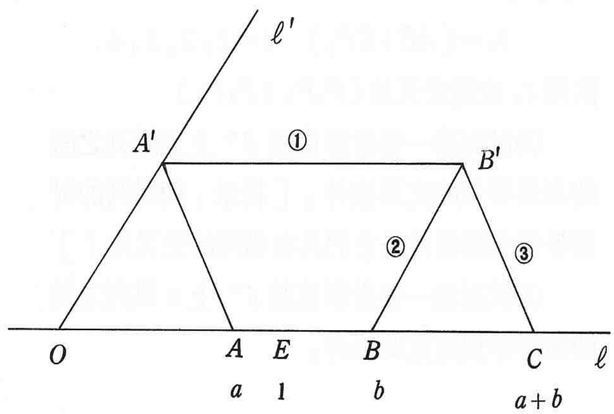
(ii) 上面這種坐標化的辦法美中不足之處是所用到的交叉比的定義之中涉及“線段長度之比”這種非射影的概念，在尋求一種“純射影”的坐標化之前，讓我們先檢討一下坐標化的作用何在？坐標化的眞正作用在於把幾何問題有系統地歸於代數運算（或解析運算）來處理、解答。例如由給定的兩點 T_1，T_2 求解第三點 T_3 使得 $\{T_1、T_2、T_3、P\}$ 成調和點到這個“幾何問題”在上述坐標系中的坐標化解答就是 T_3 點的坐標乃是 T_1、T_2 點的坐標的平均值，亦即 $t_3 = \frac{1}{2}(t_1 + t_2)$。也許有些讀者會說，上述求調和點列這個幾何問題根本可以用直線的連結、交截直接作圖而得，亦即如下圖所示的作圖法：



大可不必動用坐標化，是不？的確，像調和點列這樣簡單的幾何問題，當然是不必小題大做地用坐標化去求解的。那麼為什麼偏偏在這裏舉這樣一個平凡的例子呢？豈非徒廢紙張？非耶！非耶！實乃這個看來平凡的例子尙有其發人深思、耐人尋味之點是也！

既然像 $t_3 = \frac{1}{2}(t_1 + t_2)$ 這個坐標之間的簡單的代數運算是可以用直線的連截作圖直接達成的。由此可問，是否像加和乘這種坐標之間的基本代數運算也可以用直線的連截作圖予以達成呢？這個“念頭”其實就是下面一大段研討的“啓機”與萌芽。

(iii) 在 $P = P_\infty(\ell)$ 的情形，$\{E, O, P\}$ 所確定的射影坐標系也就是直觀明顯的歐氏直線坐標系。由此易見，其坐標之間的“加”、“乘”運算是可以用圖 1、圖 2 所示的平行作圖予以達成的，即



如上圖所示，$\overrightarrow{OA} = a \cdot \overrightarrow{OE}$，$\overrightarrow{OB} = b \cdot \overrightarrow{OE}$ 是所給者，先在線 ℓ' 任取一點 A'。連結 OA' 和 AA'。然後逐步作下列平行線

① $A'B' \parallel \ell$　② $BB' \parallel OA'$

③ $B'C \parallel AA'$

則所得的交點 C 滿足 $\overrightarrow{OC} = (a+b) \cdot \overrightarrow{OE}$ 因為

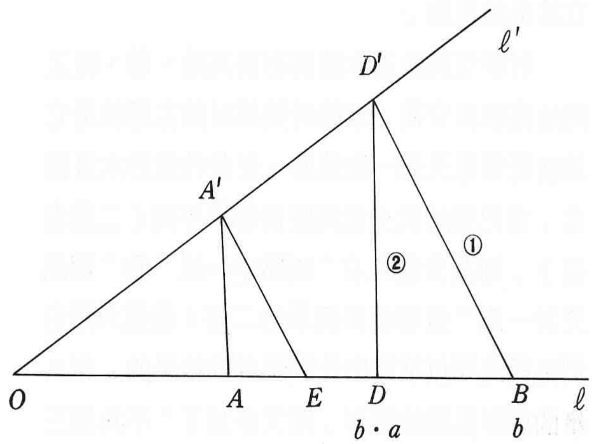
$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AC},$$

所以 $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$

再者，如下圖所示，連結 OA'，AA' 和 EA'，然後再逐步作下列平行線，即

① $BD' \parallel EA'$，交 OA' 於 D' 點。

② $D'D \parallel A'A$，交 ℓ 於 D 點。



由相似三角形定理，亦即

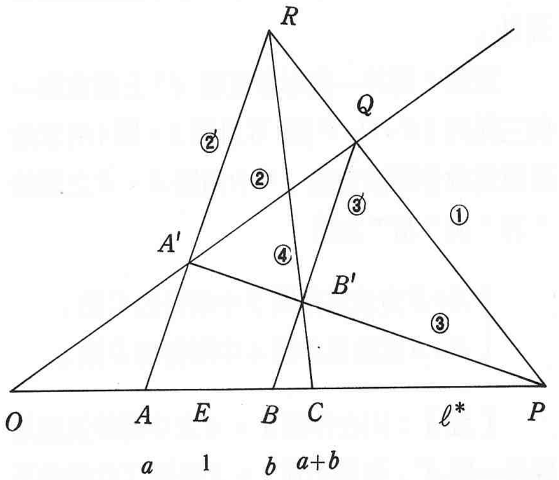
$\Delta OEA' \backsim \Delta OBD'$ ，$\Delta OAA' \backsim \Delta ODD'$

即有比例式：

$$\overrightarrow{OD}:\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OD'}:\overrightarrow{OA'}=\overrightarrow{OB}:\overrightarrow{OE}=b$$

亦即 $\overrightarrow{OD}=b\cdot\overrightarrow{OA}=b\cdot(a\cdot\overrightarrow{OE})=(b\cdot a)\cdot\overrightarrow{OE}$。

(iv) 在第一節中我們運用透視投影把一般情形的巴氏定理和迪氏定理歸於平行的特例來加以論證，現在則可以反其道而行之，再用透視投影把上述 $P=P_\infty(\ell)$ 的情形的平行作圖法，變換成一般情形的直線連截作圖法，即有



如上圖所示，設 A、B 在 ℓ^* 對於三點列 $\{E, O, P\}$ 的射影坐標分別爲 a、b。則下列作圖所得的 C 點的射影是坐標 $a+b$，即

①過 P 點任引另一直線並於其上任取兩點 Q、R

②連結 OQ、AR 相交於 A' 點

③連結 $A'P$、BQ 相交於 B' 點

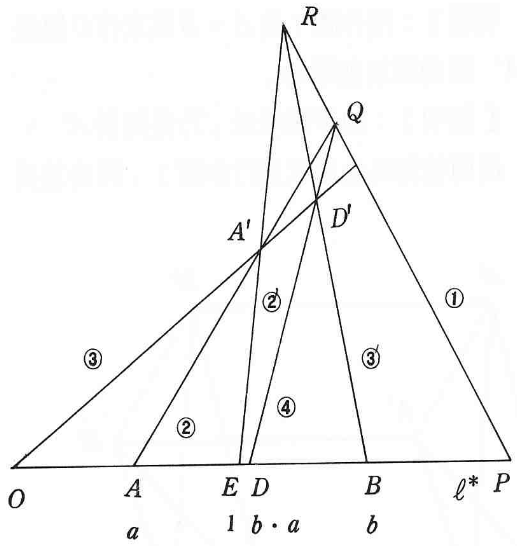
④連結 RB' 和 ℓ^* 交於 C 點

[讀者試用交叉比的射影不變性和透視射影試證明上述連截作圖具有性質：

$(AE;OP)+(BE;OP)=(CE;OP)$]

同樣地，下述圖 4 乃是圖 2 用透視投影加以一般化後的連截作圖法：

如下圖所示，設 A、B 在 ℓ^* 對於 $\{E$、O、$P\}$ 所定的射影坐標系中的坐標分別是 a、b。



則下述連截作圖法所得的 D 點的射影坐標就是 $b\cdot a$，即有

$$(DE;OP)=(BE;OP)\cdot(AE;OP)$$

【作圖法】：

①過 P 點任引另一直線，並於其上任取兩點 Q、R。

②連結 AQ，ER 相交於 A' 點，

③連結 OA'，RB 相交於 D' 點，

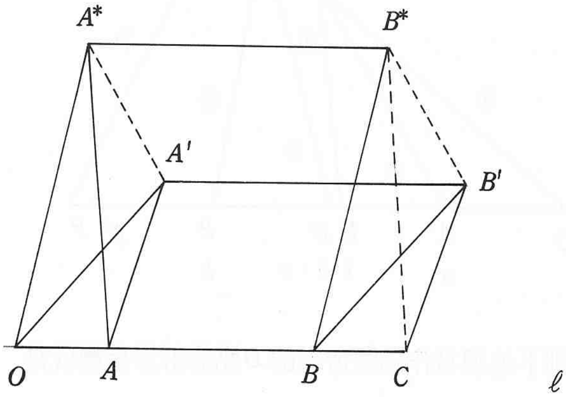
④連結 QD' 和 ℓ^* 交於 D 點，則 D 點即爲所求作者。

[其實，圖 1、圖 3 以及圖 2、圖 4 之間所差者乃是一個適當的透視投影，所以根本是射影等價的！在往後討論的圖解中，我們將採用圖 1、圖 2 的平行作圖，因爲它們直觀上比較清晰簡明一些。]

總結上述四點分析，就可以想到：其實根本可以用上述直線連截作圖（亦即圖 3、圖 4）直接地"定義" ℓ^* 上點與點之間（或者說：線段與線段之間）的"加"與"乘"，從而達成把幾何轉化爲代數的目的。要把這種想法付諸實行，第一步當然得驗證這種定義的"合理性"。此事從何說起呢？那就是要驗證圖 1 與圖 2 中的平行作圖求 C 和 D 點，乃是和 A' 點的選取是無關的。下面兩個引理就是用迪氏定理去驗證上述選取無關性：

引理 1：用作圖 1 由 A、B 點求作 C 點是和 A' 點的選取無關的。

【證明】：如下圖所示，乃是對於 A'、A^* 這兩種相異的選取進行作圖 1，同時並列



的幾何結構，由所作已知有

$A'B' /\!/ OB /\!/ A^*B^*$；$OA' /\!/ BB'$，

$OA^* /\!/ BB^*$ 和 $AA' /\!/ CB'$

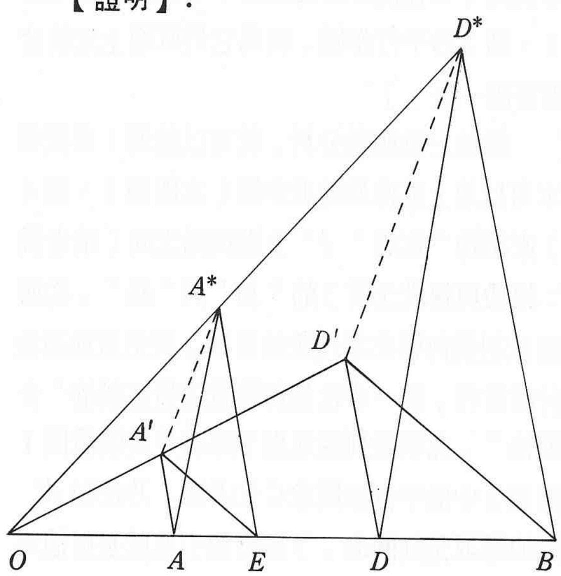
我們所要加以驗證的是：$AA^* /\!/ CB^*$，茲證之如下：

對於 $\Delta OA'A^*$ 和 $\Delta BB'B^*$ 使用迪氏定理，即得 $A'A^* /\!/ B'B^*$

然後再對 $\Delta AA'A^*$ 和 $\Delta CB'B^*$ 使用迪氏定理即得 $AA^* /\!/ CB^*$

引理 2：用作圖 2 由 A、B 求作 D 點是和 A' 點的選取無關的。

【證明】：



如上圖所示，乃是將作圖 2 對於 A'、A^* 這兩種相異選取同時並列的幾何結構，由所作已知者有

$$AA' /\!/ DD'，EA' /\!/ BD' \text{ 和 } EA^* /\!/ BD^*$$

而所要證明者則是 $AA^* /\!/ DD^*$，茲證之如下：

對於 $\Delta EA'A^*$ 和 $\Delta BD'D^*$ 使用迪氏定理即得 $A'A^* /\!/ D'D^*$。再對於 $\Delta AA'A^*$ 和 $\Delta DD'D^*$ 使用迪氏定理即得所要證明的

$$AA^* /\!/ DD^*$$

基於上述兩個引理，亦即保證了下述定義的合理性。

定義：對於一條射影直線 ℓ^* 上選定的一個三點列 $\{E、O、P\}$ 即可用圖 3、圖 4 所示的直線連截作圖法定義 ℓ^* 中兩點 A、B 之間的"和"與"積"亦即

$$\begin{cases} A+B \text{ 定義爲作圖 3 中所得的 } C \text{ 點，} \\ B\cdot A \text{ 定義爲作圖 4 中所得的 } D \text{ 點。} \end{cases}$$

【註】：(i)在作圖 3、4 之中都涉及選用線外一點 A'。但是引理 1、2 保證了此點的不同的選用所得的 C、D 總是一致的！

(ii) 在第一、二節中所討論的射影空間（亦即歐氏空間加添無窮遠平面所成者）的情形，上述加法和乘法對應於 $\{E、O、P\}$ 所確定的射影坐標之間的加法和乘法，亦即

$$A \longleftrightarrow a \text{ ，} B \longleftrightarrow b$$

則有 $C \longleftrightarrow a+b$，$D \longleftrightarrow b\cdot a$

(iii) 上述加法和乘法的定義，僅僅依賴於四條連結、交截公理，所以對於任何具有這樣四點基本性質的抽象"射影空間"都是言之成理的！

定義：任何滿足前述四條連結、交截公理的"空間"結構都叫做一個抽象射影空間（abstract projective space），對於任何抽象射影空間中的一條"直線"和其上給定一個三點

列 $\{E、O、P\}$，我們都採用上述作圖 3、4 定義其中點與點之間的"和"與"積"。如此所得的代數結構叫做該抽象射影空間的**基本域**(base field)或**線段代數**(algebra of intervals)。

引理 3：設 $\ell^*\cap\ell'^*=\{O\}$，$\{E、O、P\}$ 和 $\{E',O,P'\}$ 分別是 ℓ^* 和 ℓ'^* 中用來定義上述加、乘運算的三點列。令 $\{Q\}=EE'\cap PP'$，則透視投影

$$\rho=\ell^* \overset{Q}{\barwedge} \ell'^* : \ell^*\to\ell'^*$$

是一個**同構映射**(isomorphism)，亦即對於任給 $A、B\in\ell^*$ 恆有

$$\rho(A+B)=\rho(A)+\rho(B)$$
$$\rho(A\cdot B)=\rho(A)+\rho(B)$$

【證明】：設 $A、B$ 是 ℓ 中任給兩點，$C=A+B$，$D=A\cdot B$。令 $A、B、C、D$ 在 ρ 的作用下的像點分別是 $A'、B'、C'、D'$，則我們所要驗證者就是 $A'+B'=C'$，$A'\cdot B'=D'$。茲證之如下：

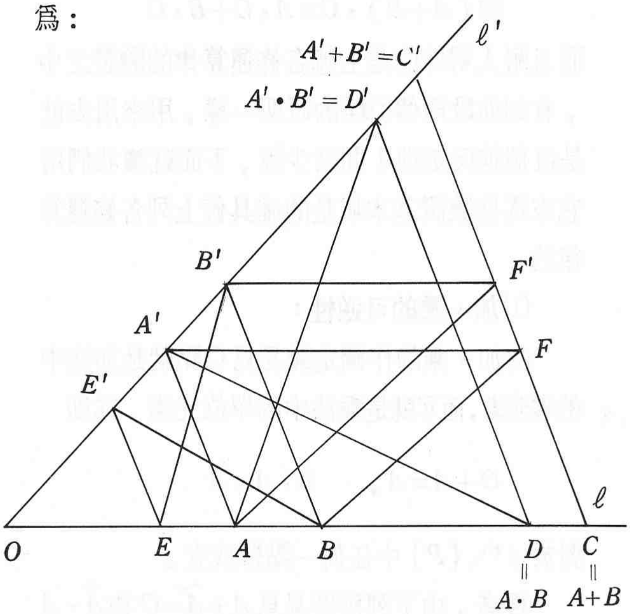
在所給的抽象射影空間中令 π^* 爲 $\ell^*、\ell'^*$ 所張的平面，R 是在 π^* 之外任取一點。令 $\pi_1^*、\pi_2^*$ 分別是由 $\{\ell^*,R\}$ 和 $\{\ell'^*,R\}$ 所張的平面，我們可以在 π_1^* 中用作圖3、4分別作出 $C=A+B$ 和 $D=A\cdot B$，令 $\rho=\pi_1^* \overset{Q}{\barwedge} \pi_2^*$，則易見(i) ρ 其實就是把 $\hat{\rho}$ 局限於 ℓ^* 所得者，(ii) 上述 π_1^* 中的圖 3、4 在 $\hat{\rho}$ 下的映像也就構成了 ℓ'^* 的加乘作圖（在 π_2^* 中構作者）。由此可見：

$$C'=\rho(C)=A'+B',\quad D'=\rho(D)=A'B'$$

這也就證明了基本域的代數結構的射影不變性。

【注意】：(i)在下面的抽象討論中，我們所研討者乃是所有抽象射影空間的共性，所以唯一可用的推理依據就只有四條連結、交截公理和它們的一個重要推論——迪氏定理，但是爲了便於想像，在論證中我們經常以簡明扼要的圖解配合說明，讀者務必牢記，圖像中所見的諸多歐氏幾何性質如長度、角度等都並非圖解的本意內涵，當然是不能用來作論證之依據者也！

(ii) 爲了使得圖解的圖形顯得簡潔易看，我們將經常把上述 PP' 線取作 π^* 上的"無窮遠直線"，而且在圖解或論證時，用"平行"作爲兩線交於 PP' 線上一點的"同義者"。例如引理 3 所證的事實，若用上述圖解表達，即爲：



上圖之中，

$EE'\parallel AA'\parallel BB'\parallel CC'\parallel DD'$ 表示它們共交於無窮遠點。

$A'F\parallel\ell$，$BF\parallel\ell'$，$FC\parallel AA'$ 是 $A+B=C$ 的作圖。

$AF'\parallel\ell'$，$B'F'\parallel\ell$，$F'C'\parallel A'A$ 是 $A'+B'=C'$ 的作圖

$E'B\parallel A'D$ 和 $EB'\parallel AD'$ 則分別是 $A\cdot B=D$ 和 $A'\cdot B'=D'$ 的作圖。

(二)迪氏定理和基本域的運算律

對於一個給定的抽象射影空間，我們用來推理論證的依據就是僅有的四條連結、交截公理以及可以用它們推論而得的迪氏定理。本段將著手研討前面用作圖 3、4 定義其加法和乘

法的基本域究竟具有那些運算律？這種深入研討所發現的將是一個令人驚喜的結果，那就是上述基本域除了乘法交換律不一定成立之外，它滿足一切通常數域所具備的所有其他運算律，亦即

(i)加法的交換律、結合律與可逆性

(ii)乘法的結合律與可逆性。

(iii) 乘對於加的兩種分配律，即

$$A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$$

和 $(A+B)\cdot C=A\cdot C+B\cdot C$

而且耐人尋味的是上述各條運算律的驗證之中，有如前段兩個引理的證明一樣，用來用去就是這個迪氏定理！閒話少說，下面就讓我們用它來逐條驗證基本域是的確具備上列各條運算律的。

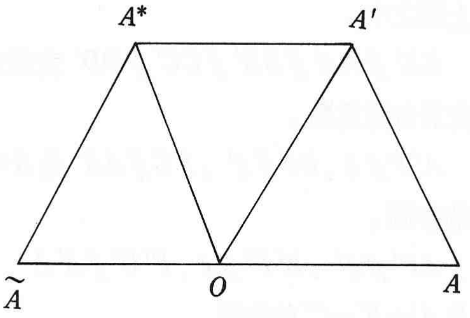
(1)加、乘的可逆性：

由加、乘的作圖定義易見 O 點就是加法中的零元素，而 E 就是乘法中的單位元素，亦即

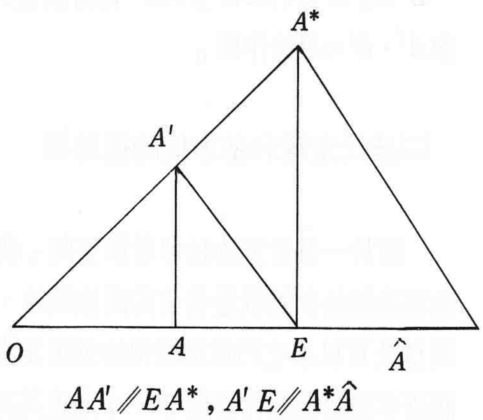
$$O+A=A,\qquad E\cdot A=A$$

對於 $\ell^*\setminus\{P\}$ 中任何一點皆成立。

再者，由下列兩圖易見 $A+\widetilde{A}=O$ 和 $\hat{A}\cdot A=E$

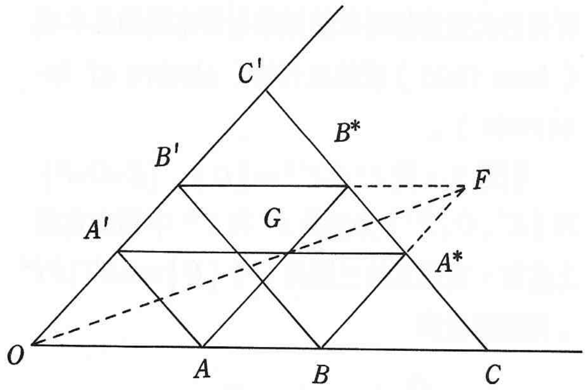


$A'A^*/\!/O\widetilde{A}$, $OA^*/\!/AA'$, $\widetilde{A}A^*/\!/OA'$



$AA'/\!/EA^*$, $A'E/\!/A^*\hat{A}$

(2)加法交換律：



如上圖所示，我們先選取 O、A'、B' 共線而且 $AA'/\!/BB'$（因為引理1保證加法作圖的最後結果是和 A'、B' 的選取無關的。所以可以任意選用）。然後用 A' 來求作 $A+B$，用 B' 來求作 $B+A$，亦即分別作

$$A'A^*/\!/OB,\quad BA^*/\!/OA',\quad A^*C/\!/AA'$$
$$B'B^*/\!/OA,\quad AB^*/\!/OB',$$
$$B^*\widetilde{C}/\!/BB'(/\!/AA')$$

由此可見，要證明 $C=\widetilde{C}$ 也就是要證明 $A^*B^*/\!/AA'$ 茲證之如下：

令 F 為 BA^* 和 $B'B^*$ 的交點，則有 $\Delta AA'G$ 和 $\Delta BB'F$ 的對應邊皆互相平行，所以由迪氏定理即得 FG 也過 O 點，再對 $\Delta AA'G$ 和 ΔA^*B^*F 使用迪氏定理，即得 $AA'/\!/A^*B^*$。由此可見 $C=\widetilde{C}$，亦即 $A+B=B+A$，加法交換律得證。

(3)加法結合律：

如下圖所示，O、A'、B'、E'、F' 共線而且有

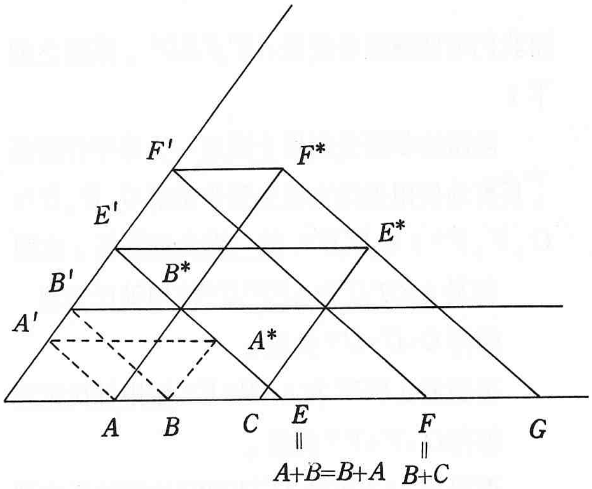
$$AA'/\!/BB'/\!/EE'/\!/FF'$$

先用 B' 用作圖1求得 $E=B+A(=A+B)$ 和 $F=B+C$，再用 E' 求作 $G=E+C=(A+B)+C$；並且用 F' 求作

$$\widetilde{G}=F+A=A+F=A+(B+C)$$

由此可見我們所要驗證的 $G=\widetilde{G}$ 其實也就是要論證下圖中的 $E^*F^*/\!/EE'/\!/FF'$。

不難看出下圖之中 $B'B^*$ 線之上的圖形結

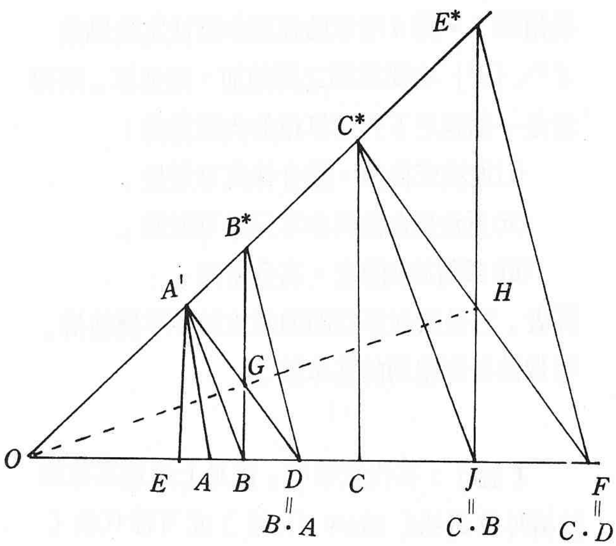


構是和加法交換律中所見者完全一樣的，所以完全同樣的證明即可證得$E^*F^* /\!/ EE' /\!/ AA'$，亦即$G=\widetilde{G}$，

$$(A+B)+C=A+(B+C)$$

⑷**乘法結合律**：

乘法結合律的驗證，大致上和前面類同，要點在於使用作圖 2 時適當地選用A' 使得總體圖形結構簡化，然後再反復運用迪氏定理，即可得證。其具體做法如下圖所示：



由乘法作圖，即有

$$EA' /\!/ BB^* /\!/ CC^* /\!/ JJ^*, \quad AA' /\!/ DB^*$$
$$BA' /\!/ JC^*, \quad DA' /\!/ FC^*$$

對於$\Delta A'BG$和ΔC^*JH 使用迪氏定理，即得O、G、H共線，再對於ΔB^*DG和ΔJ^*FH，使用迪氏定理，即得$J^*F /\!/ B^*D$，亦即$F=J\cdot A$，這也就證明了乘法結合律

$$C\cdot(B\cdot A)=C\cdot D=F=J\cdot A=(C\cdot B)A$$

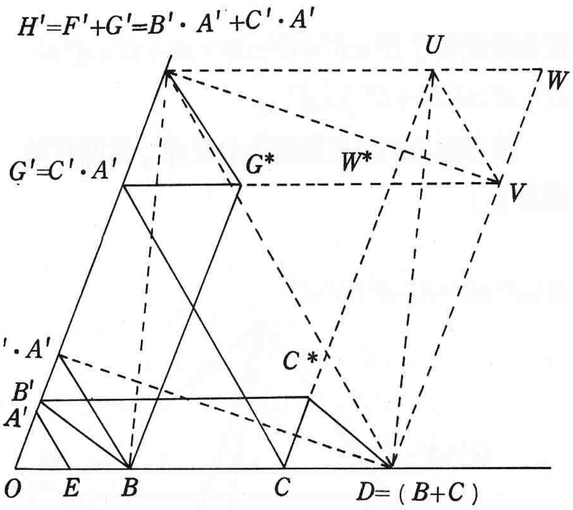
⑸**乘法對於加法的分配律**：

因爲乘法交換律對於基本域並不是普遍成立的，所以它的分配律得有兩條，即

左分配律：$A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$

右分配律：$(B+C)\cdot A=B\cdot A+C\cdot A$

讓我們先來驗證右分配律，其圖解結構如下：



如上圖所示，$B'C^* /\!/ OP /\!/ G'G^*$；$BG^* /\!/ CC^* /\!/ OQ$

$D=(B+C)$，$F'=B'\cdot A'$，$G'=C'\cdot A'$，
$H'=F'+G'=B'\cdot A'+C'\cdot A'$。

亦即還有$BB' /\!/ DC^*$和$BF' /\!/ G^*H'$［加法作圖］和$EA' /\!/ BF' /\!/ CG'$［乘法作圖］。

而我們所要驗證者就是：$DH' /\!/ EA'(/\!/ BF')$

茲證之如下：過D引OQ的平行線，過 H' 點引OP的平行線，相交於W，令$U=CC^*\cdot WH'$，$V=G'G^*\cdot WD$，由引理 1 可見

$$BH' /\!/ DU \text{和} F'D /\!/ H'V$$

對於$\Delta OBH'$和ΔWUD使用迪氏定理，即有

$H'D$、BU和OW 三線共交於一點，設其為T點。

再對於$\Delta OA'D$和$\Delta WVH'$ 使用迪氏定理，即有

OW、$A'V$和DH'三線共交於一點，當然也就是T點。

再對$\Delta OA'B$和ΔWVU使用迪氏定理，即有

$UV /\!/ BA'$

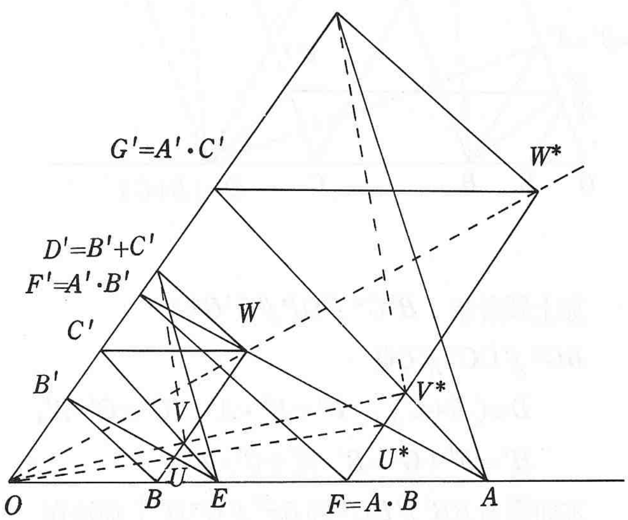
亦即有$UV /\!/ G'C$ 。令$W^*=G'V \cdot CU$ 。對於ΔUVW和$\Delta G'CW^*$ 使用迪氏定理，即得WW^*過O點，最後，再對於 $\Delta G'CW^*$和$\Delta H'DW$使用迪氏定理，即得

$$H'D /\!/ G'C (/\!/ A'E)$$

這也就證明了$H'=F'+G'=B'\cdot A'+C'\cdot A'=D'\cdot A'=(B'+C')\cdot A'$ 。

接著讓我們再來驗證左分配律，其圖解結構如下：

$H'=F'+G'=A'\cdot B'+A'\cdot C'$



在上述圖解中，有下列所作之平行關係，即

$BB' /\!/ FF' /\!/ WD' /\!/ W^*H' (/\!/ EE')$；
$BW /\!/ OH' /\!/ FW^*$；$C'W /\!/ G'W^* /\!/ OF$；
$B'E /\!/ F'A$；$C'E /\!/ G'A$

而我們所要驗證者就是$AH' /\!/ ED'$ ，茲證之如下：

論證的步驟是利用上面這一大串平行關係，反複地使用迪氏定理去逐步推導O, U, U^*; O, V, V^*; O, W, W^* 的三點共線關係，亦即

對於$\Delta BB'U$和$\Delta FF'U^*$使用迪氏定理即得O、U、U^*共線。

再對於ΔEUV和ΔAU^*V^*使用迪氏定理即得O、V、V^*共線。

再對於ΔCVW和$\Delta G'V^*W^*$使用迪氏定理即得O、W、W^*共線。

再對於$\Delta D'VW$和$\Delta H'V^*W^*$使用迪氏定理即得$D'V /\!/ H'V^*$，

最後再對於$\Delta D'VE$和$\Delta H'V^*A$使用迪氏定理即得所欲證之$D'E /\!/ H'A$，亦即

$H'=A'\cdot B'+A'\cdot C'=A'\cdot D'$
$=A'\cdot (B'+C')$

總結上述五點，敍為下列基本定理。

定理 2：對於任給抽象射影空間的任給直線 ℓ^*，可以任意取定基點列$\{E、O、P\}$然後用圖 3、圖 4 所示的連截作圖法定義點集 $\ell^* \setminus \{P\}$ 中點與點之間的加、乘運算。所得者是一個滿足下列運算律的代數結構：

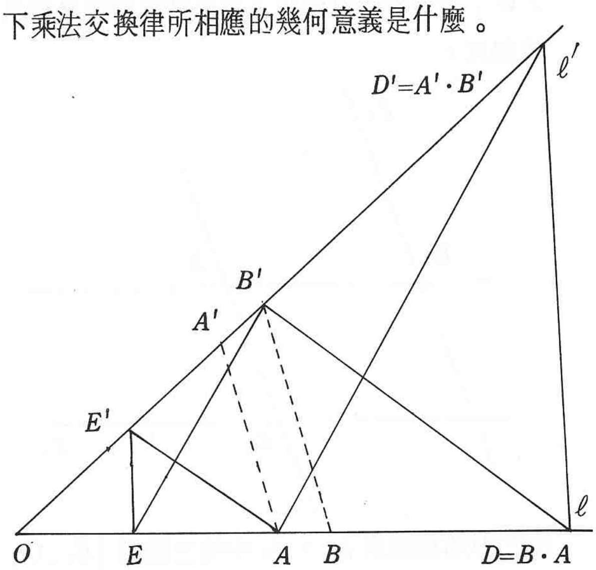
(i)加法交換律、結合律與可逆性，
(ii)乘法結合律與非零元素可逆性，
(iii)乘對於加的左、右分配律。

再者，它是該射影空間的基本射影不變結構，叫做該射影空間的基本域。

【註】：在代數學中，滿足上述運算律的結構叫做斜域(skew field)或可除代數(division algebra)。假若再滿足乘法交換律，則稱之為域(field)。很自然，我們要問：對於一個射影空間的基本域，它滿足乘法交換律的幾何條件是什麼呢？這也就是我們要接著研討的課題。

㈢巴布斯定理與基本域

首先讓我們從基本域的乘法作圖來考察一下乘法交換律所相應的幾何意義是什麼。



如上圖所示：

$EE'/\!/AA'/\!/BB'$，$EB'/\!/AD'$ 和 $E'A/\!/B'D$

是所作者。結合引理 3 和乘法作圖，即有

$$D=B\cdot A\quad,\quad D'=A'\cdot B'$$

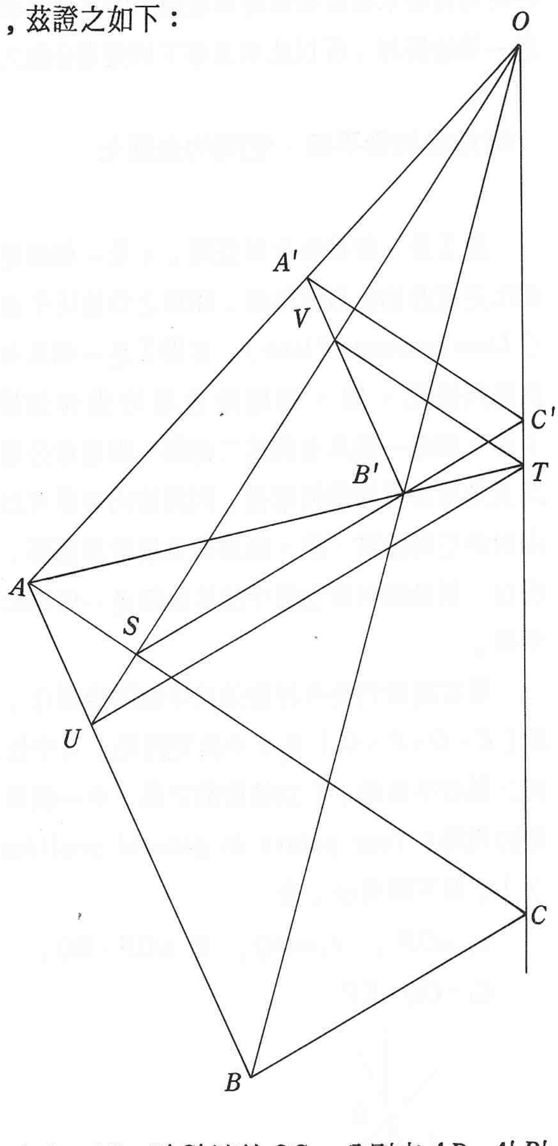
由此可見，乘法交換律的成立與否？就是要看 DD' 是否肯定也因而平行於 EE'？換句話說，是否在上述圖形結構裏是否

$$EB'/\!/AD' \text{ 和 } E'A/\!/B'D \Rightarrow EE'/\!/DD'$$

恆成立？上述命題其實就是那個早在紀元三百多年就發現了的巴布斯定理！換句話說，基本域的乘法可換性和巴布斯定理其實是一回事！這實在是一件令人驚喜的認識。但是巴布斯定理的妙處還不僅至於斯。因爲我們還可以用它直接推導迪氏定理（引理 4），所以僅僅只用巴布斯定理和射影平面的兩條連結交截公理（亦即兩點定一直線和兩線交於一點），就可以純邏輯地證得迪氏定理，然後就可以用連截作圖法得出可交換的基本域。巴布斯這一個定理的深遠的邏輯蘊含由此方可得見其全貌。

引理 4：巴布斯定理⇒迪沙久定理。

【證明】：如下圖所示，ΔABC 和 $\Delta A'B'C'$ 滿足條件 AA'、BB'、CC' 共交於 O 點而且 $AC/\!/A'C'$，$BC/\!/B'C'$。我們要僅僅只用連截性質和巴布斯定理推導 $AB/\!/A'B'$，茲證之如下：



令 $S=AC\cap B'C'$ 連結 OS，分別交 AB、$A'B'$ 於 U、V。令 $T=AB'\cap OC$ 連結 VT、UT，我們先對於 $\{O、B、B'\}$ 和 $\{A、S、C\}$ 這兩組共線三點列使用巴氏定理，即得 $UT/\!/B'C'$。然後再對於 $\{O、A'、A\}$ 和 $\{B'、S、C'\}$ 這兩組共線三點列使用巴氏定理，即得 $VT/\!/A'C'$。最後，對於 $\{V、S、U\}$ 和 $\{A、T、B'\}$ 這兩組共線三點列使用巴氏定理，並且用上業已證得的

$$UT /\!/ B'C' \text{ 和 } VT /\!/ A'C'$$

即可證得 $AB /\!/ A'B'$ [證畢]

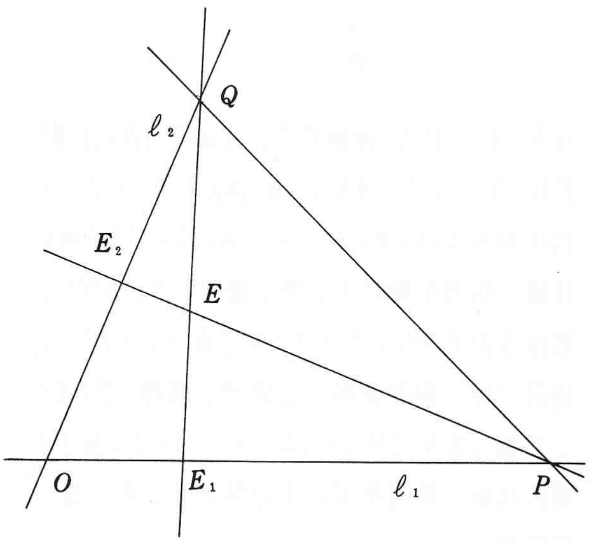
【註】：在此也許有讀者會問：是否也可以由迪氏定理反過來推導巴氏定理呢？此路是不通的！要說明這種邏輯通路的不存在性，就得要對於基本域在抽象射影幾何中的意義再作進一層的研討，所以此事且等下回接著分解之。

(四)抽象射影平面、空間的坐標化

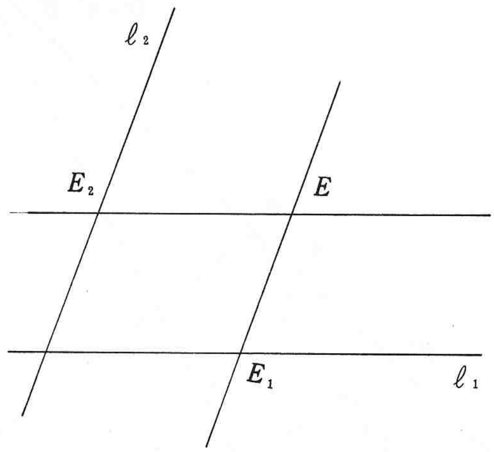
設 Σ 是一個抽象射影空間，π 是一個滿足迪氏定理的抽象射影平面，簡稱之爲迪氏平面 (Desarguesian Plane)，亦即 Σ 是一個具有前述四條點、線、面連截公理的幾何結構；而 π 則是一個具有前述二條點、線連截公理以及迪氏定理的幾何結構。因爲迪氏定理可以由射影空間的點、線、面連截公理推導而得，所以一個抽象射影空間中的平面總是一個迪氏平面。

現在讓我們先來討論迪氏平面的坐標化，設 $\{E、O、P、Q\}$ 是 π 中給定四點，其中任何三點皆不共線，[以後簡稱之爲 π 中一般位置的四點 (four points in general position)]。如下圖所示，令

$$\ell_1 = OP, \quad \ell_2 = OQ, \quad E_1 = OP \cdot EQ,$$
$$E_2 = OQ \cdot EP$$



一如在前段討論中常用的圖解法，我們可以把直線 PQ "想成" 是無窮遠直線，然後用 "平行" 表達兩線相交於 PQ 上的一點，則可略去 PQ，而上述圖解即成下述熟悉的平行坐標系的架式：



由(三)得知相應於 ℓ_1、ℓ_2 中的三點列 $\{E_1, O, P\}$ 和 $\{E_2, O, Q\}$ 即有 $\ell_1 \setminus \{P\}$ 和 $\ell_2 \setminus \{Q\}$ 上的斜域結構；而且兩者在透視投影 $\ell_1 \overset{R}{\wedge} \ell_2$ 的對應下是同構的，[$R = E_1E_2 \cdot PQ$]。很自然的，我們可以把這兩個斜域 (skew field) 用上述同構把它們對等起來 (identified)，並且用這個斜域的元素偶賦予 $\pi \setminus PQ$ 一個坐標系的結構。

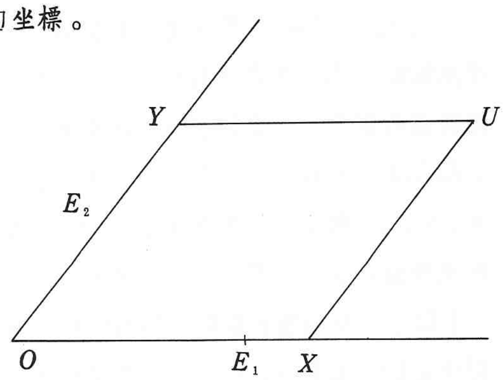
符號與定義：

(1)我們將用符號 K 表示迪氏平面 π 的基本域，它是一個抽象斜域 (abstract skew field)，我們將用小寫拉丁字母如 a、b、c；u、v、x、y 等表示 K 中的元素。

(2)對應於上述取定的 $\{E、O、P、Q\}$，我們將分別取定 K 和上述 $\ell_1 \setminus \{P\}$ 以及 $\ell_2 \setminus \{Q\}$ 這兩個斜域之間的同構映射 i_1 和 i_2，使得下述圖解可換，即

$$\begin{tikzcd} & K \arrow[dl, "i_1"'] \arrow[dr, "i_2"] & \\ \ell_1 \setminus \{P\} \arrow[rr, "\rho"] & & \ell_2 - \{Q\} \end{tikzcd} \qquad \rho = \ell_1 \overset{R}{\wedge} \ell_2$$

並且稱 a 爲 $A_1=i_1(a)$（或 $A_2=i_2(a)$）在直線坐標系 $\{E_1、O、P\}$（或 $\{E_2、O、Q\}$）中的坐標。



(3)對於 $\pi\setminus PQ$ 中任給一點 U，令

$$\begin{cases} X=OP\cdot UQ, \\ Y=OQ\cdot UP, \end{cases}$$

$x,y\in K$ 分別是 X、Y 點在直線坐標系 $\{E_1、O、P\}$ 和 $\{E_2、O、Q\}$ 中的坐標，則定義元素偶

$$(x,y)\in K\times K$$

爲 $U\in\pi\setminus PQ$ 在平面坐標系 $\{E,O,P,Q\}$ 中的坐標。換句話說，平面坐標系 $\{E、O、P、Q\}$ 也就是下述一・一對應：

$$K\times K\ni(x,y)\longleftrightarrow U\in\pi\setminus PQ$$

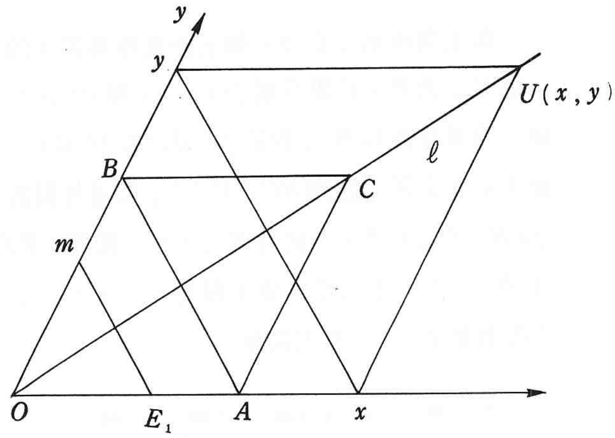
有鑒於射影平面中最爲基本的結構就是點、線的連結與交截，所以對於上述坐標系的基本問題首推直線的方程式。

定理 3：在上述坐標系中，一條直線的方程式是一個下述形式的二元一次式，即

$$xa+yb+c=0$$

反之，對於任給一個上述形式的二元一次式，其解點點集恆爲一條直線。

【**證明**】：設 ℓ 是 π 中過原點 O 的一條直線，我們不妨設 $\ell\neq x$－軸或 y－軸（亦即 OP 或 OQ）［因爲 x－軸（或 y－軸）的方程式顯然就是 $y=0$（或 $x=0$）］。設 C 是其上取定相異於 O 之一點，如下圖所示：



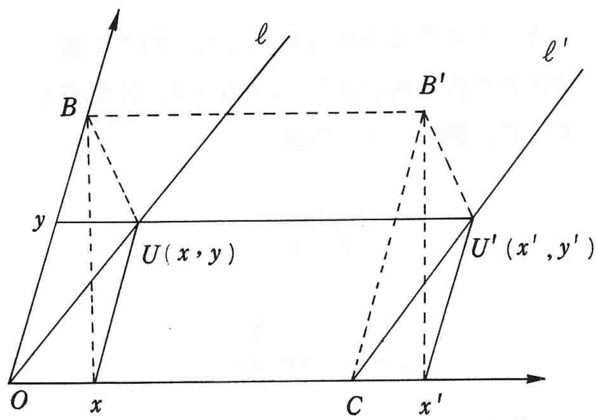
令

$$\begin{cases} A=QC\cdot OP \\ B=PC\cdot OQ \end{cases}$$

過 E_1 作 AB 的“平行”線交 OQ 於坐標爲 m 之點。再者，設 U 是 ℓ 上任意一點（亦即其上之動點），令 (x,y) 爲其坐標，將迪氏定理使用到 ΔABC 和 ΔxyU 即得 $xy/\!/AB/\!/E_1m$。再由乘法之定義即有

$$y=x\cdot m$$

再者，設直線 $\ell'/\!/\ell$ 而且它和 x－軸的交點的坐標是 c。如下圖所示，設 U' 是 ℓ' 上的動點，過 U' 點作 x－軸的平行線，交 ℓ 於 u 點，令 U、U' 的坐標分別是 (x,y) 和 (x',y)。我們要證明上述 x' 和 x 恆有關係式 $x'=x+c$ 茲證之如下：



如上圖所示，在 y- 軸上任取相異於 y 的一點 B，過 B、C 點分別引 x、y- 軸的平行線，令其交點為 B'。對於 ΔOBU 和 $\Delta CB'U'$ 使用迪氏定理，即得 $BU /\!/ B'U'$。然後再對於 ΔxBU 和 $\Delta x'B'U'$ 使用迪氏定理，即得 $xB /\!/ x'B'$。由此即可從作圖 1 得見 $x'=x+c$。亦即直線 ℓ' 的方程式就是：

$$x'\cdot m=(x+c)m=x\cdot m+c\cdot m$$
$$=y+c\cdot m$$

這也就證明了任給一條直線的方程式總是一個係數在右側的二元一次式，亦即定理的第一部份。第二部份的證明留作習題。

抽象射影空間的坐標化：

設 Σ 是一個抽象射影空間，亦即它是一個具有前述點、線、面的四條連截公理的幾何結構，由此可證其中任一平面上的迪氏定理。設 $\{E、O、P、Q、R\}$ 是 Σ 中給定五點，其中任何四點皆不共面［往後將簡稱之謂 Σ 中一般位置的空間五點組］。令

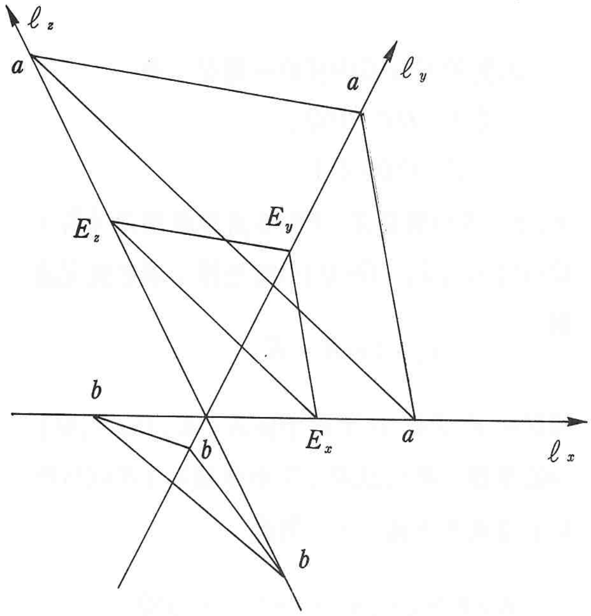
$$\ell_x=OP,\quad \ell_y=OQ,\quad \ell_z=OR$$
$$\pi_{xy}=(OPQ),\quad \pi_{yz}=(OQR),$$
$$\pi_{xz}=(OPR),\quad \pi_\infty=(PQR)$$
$$E_x=OP\cdot(EQR),\quad E_y=OQ\cdot(EPR)$$
$$E_z=OR\cdot(EPQ)$$
$$\pi_u=(E_xE_yE_z),\quad \ell_\infty(\pi_u)=\pi_u\cap\pi_\infty。$$

再者，令 $\mathscr{F}$ 為 Σ 中所有過 $\ell_\infty(\pi_u)$ 的平面族，則由 $\mathscr{F}$ 中的平面分別和 ℓ_x、ℓ_y、ℓ_z 的交截即得它們之間的一、一對應：

$$\begin{tikzcd} & \ell_x \arrow[dl, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow] & \\ \ell_y \arrow[rr, leftrightarrow] & & \ell_z \end{tikzcd}$$

上述對應乃是對於分別由 $\{E_x, O, P\}$，$\{E_y, O, Q\}$ 和 $\{E_z, O, R\}$ 所定的基本域結構的同構映射。由此可見，我們可以用上述同構映射分別在 ℓ_x、ℓ_y、ℓ_z 上建立互相配合的 K- 坐標系。

把 $\pi_\infty=(PQR)$ 想成是"無窮遠平面"，把兩個面"平行"想做是共交於 π_∞ 中的一條"無窮遠直線"的同義詞，則 $\mathscr{F}$ 就是所有和平面 $(E_xE_yE_z)$ 互相平行的"平行面族"，分別於 x，y，z- 軸上的三點的 x，y，z 坐標相等的充要條件是：它們位於 $\mathscr{F}$ 中的同一平面之上。［除了三點相重於原點的特殊情形，亦即三點所定的平面和 π_u 平行。］茲圖解如下：



對於 Σ 中任給一點 A，過 A 點分別作 π_{yz}、π_{xz} 和 π_{xy} 的平行面，分別和 ℓ_x、ℓ_y、ℓ_z 相交於 A_x、A_y、A_z 點，亦即

$$A_x=\ell_x\cap(AQR),\quad A_y=\ell_y\cap(APR),$$
$$A_z=\ell_z\cap(APQ)。$$

設 a_x，a_y，$a_z\in K$ 分別是 A_x、A_y、A_z 在上述選定的 ℓ_x、ℓ_y、ℓ_z 上的 K-坐標系中的坐標，則稱 (a_x, a_y, a_z) 為 A 點的坐標，這樣也就建立了點集 $\Sigma\setminus\pi_\infty$ 和卡積 $K\times K\times K$ 之間的一、一對應，亦即

$$\Sigma\setminus\pi_\infty\ni A\longleftrightarrow(a_x, a_y, a_z)\in K\times K\times K$$

叫做 Σ 上由一般位置的五點組 $\{E、O、P、Q、R\}$ 所確定的射影坐標系。

【例 1】：在抽象射影平面 π 中，相異於 $\ell_\infty=PQ$ 的兩條直線 $\ell_i: x a_i+y b_i+c_i=0$，

$i=1,2$ 相交於 ℓ_∞ 上一點（亦即"平行"）的充要條件是

$$a_1:a_2=b_1:b_2\neq c_1:c_2$$

【解】：對於 $\pi\backslash\ell_\infty$ 的前述坐標系來說，ℓ_1 和 ℓ_2"平行"的充要條件也就是下述聯立方程式"無解"，即

$$(*):\ \begin{cases} xa_1+yb_1+c_1=0 \\ xa_2+yb_2+c_2=0 \end{cases}$$

由通常的代數解法易見在

$$\begin{cases} a_1:a_2\neq b_1:b_2 \text{ 時}(*)\text{-式有唯一解} \\ a_1:a_2=b_1:b_2=c_1:c_2 \text{ 時}(*)\text{-式有“多解”} \end{cases}$$

所以(*)-式無解的充要條件就是

$$a_1:a_2=b_1:b_2\neq c_1:c_2$$

【例2】：在抽象射影空間 Σ 之中，設有 π_1、π_2、π_3 兩兩相交於相異的三條直線，即

$$\ell_1=\pi_2\cap\pi_3,\quad \ell_2=\pi_1\cap\pi_3,\quad \ell_3=\pi_1\cap\pi_2$$

則它們共交於一點，亦即

$$\ell_1\cap\ell_2=\ell_2\cap\ell_3=\ell_3\cap\ell_1=\pi_1\cap\pi_2\cap\pi_3$$

【例3】：在 Σ 中取定一個平面 π_∞ 作爲無窮遠平面，並且改用"平行"術語，亦即

$\ell_1/\!/\ell_2 \Longleftrightarrow \ell_1$、$\ell_2$ 共面而且 $\ell_1\cap\ell_2\in\pi_\infty$ 或 ℓ_1 與 ℓ_2 相重合

$\pi_1/\!/\pi_2 \Longleftrightarrow \pi_1\cap\pi_2\subset\pi_\infty$ 或兩者相重

$\ell_1/\!/\pi_1 \Longleftrightarrow \ell_1\cap\pi_1\in\pi_\infty$ 或 $\ell_1\subset\pi_1$

則有

$(\pi_1\cap\pi_2)/\!/\pi \Rightarrow (\pi_1\cap\pi)/\!/(\pi_2\cap\pi)$

$\ell_1/\!/\ell_2,\quad \ell_2\subset\pi_2\Rightarrow\ell_1/\!/\pi_2$

$\pi_1/\!/\pi_2\Rightarrow(\pi_1\cap\pi)/\!/\pi_2\cap\pi$

$\ell_1\neq\ell_2$，ℓ_1、$\ell_2\subset\pi$，則有

$\pi/\!/\pi'\Longleftrightarrow\ell_i/\!/\pi'$，$i=1,2$

【例4】：設 $\pi/\!/\pi_{xy}$（或 π_{yz}，π_{xz}），則 $\pi\cap\Sigma\backslash\pi_\infty$ 的方程式是：$z=$ 常數（或 $x=$ 常數，$y=$ 常數），再者設 $\pi/\!/\ell_x$（或 ℓ_y、ℓ_z）則 $\pi\cap\Sigma\backslash\pi_\infty$ 的方程式乃是一個 x（或 y、z）的係數爲零的三元一次式，即

$$x\cdot a+y\cdot b+z\cdot c+d=0$$

其中 a（或 b、c）是0

【解】：第一點是顯然的，茲說明第二點如下：

設 $\pi/\!/\ell_x$，由定理3得知 $\ell=\pi\cap\pi_{yz}$ 的方程式如下：

$$y\cdot b+z\cdot c+d=0$$

設 $(0,x_0,y_0)=A\in\ell$，令 $\ell_A=\{(x,y_0,z_0);x\in K\}$，則有 $\ell_A/\!/\ell_x$，再者由 $\pi/\!/\ell_x$ 和 $A\in\pi$ 可見 $\pi\cap(\ell_x\circ A)$ 也是一條過 A 點的 ℓ_x 的平行線。由此可見：

$$\begin{aligned}\ell_A=\pi\cap(\ell_x\circ A)\subset\pi&=\cup\{\ell_A;A\in\ell\}\\&=\{(x,y,z);y\cdot b+z\cdot c+d=0\}\end{aligned}$$

反之，任何一個滿足上述不含 x 的三元一次式的解點點集都是一個和 ℓ_x 平行的平面。

【例5】：設 π 是一個和 ℓ_z 不平行的平面，$\ell=\pi\cap\pi_x$ 的方程式是"$z=0$ 和 $xa+yb+d=0$。"。令 π_k 和 π' 分別是以 $z=k$ 。$xa+yb+d=0$ 爲其方程式的平面，則有

$$(\pi\cap\pi_k)/\!/(\pi'\cap\pi_k)$$

【證】：不妨設 $k\neq0$，則有

$$\pi\cap\pi'=\ell,\quad \ell\cap\pi_k\in\pi_\infty$$

亦即 $\pi\cap\pi'\cap\pi_k$ 是一個 π_∞ 中的點，由例2可見

$$\ell/\!/(\pi\cap\pi_k)/\!/(\pi'\cap\pi_k)$$

定理3'：在上述坐標系中，一個平面的方程式是一個下述形式的三元一次式，即

$$xa+yb+zc+d=0$$

反之，對於任給一個上述形式的三元一次式（亦即係數皆位於右側者），其解點點集恆爲一平面。

[上述定理可以歸於定理3和上述幾個例題的結果來加以推導，讀者試自研討之。例如

，不妨設所給平面π和ℓ_x、ℓ_y、ℓ_z都是不平行的（參看例4）；$\pi\cap\pi_{xy}$的方程式是$xm+y+d=0$和$z=0$；然後再用定理3結合例1、例5的結果來研討$\pi\cap\pi_k$的方程式。]

(五)迪氏平面和抽象射影空間的解析模型

對於一個迪氏平面或一個抽象射影空間，它的基本域是一個斜域。很自然地我們可以反而問之：是否每一個斜域K都可以有一個迪氏平面和一個抽象射影空間，它們的基本域是和所給的斜域K同構的？換句話說，我們是否可以由一個給定的斜域K出發，來直截了當地構造一個以K爲其基本域的迪氏平面和一個抽象射影空間？其實，(四)段對於坐標化的討論業已展現如何構造這樣一個解析模型的具體方案，茲詳述如下：

設$n=2$或3，K是一個任給的斜域，令

$$K^{n+1}=\{(x_0,x_1,\cdots,x_n);x_i\in K\}$$

（亦即K上的$(n+1)$數）

並且在$K^{n+1}\setminus\{(0,\cdots 0)\}$中引進下述等價關係即

$$(a_0,a_1,\cdots,a_n)\sim(b_0,b_1,\cdots,b_n)$$
$$\Longleftrightarrow a_0:b_0=a_1:b_1=\cdots=a_n:b_n$$

（亦即存在一個適當的非零元素$k\in K$，使得$a_i=kb_i$）

令$P^n(K)$爲其等價類所構成之點集。

(1)在$P^2(K)$上，一個右側係數的三元齊一次方程的解點點集定義爲其中的一條直線。

(2)在$P^3(K)$上，一個右側係數的四元齊一次方程的解點點集定義爲其中的一個平面；兩個相異的平面的交集則定義爲其中的一條直線。

不難驗證上述解析模型就是以K爲其基本域的迪氏平面和抽象射影空間，我們還可以改用近代線性代數的術語來描述上面所構造的解析模型$P^n(K)$，即有

(i)$K^{n+1}=\{(x_0,x_1,\cdots,x_n);x_i\in K\}$配備以分量加法和左乘倍積構成一個$K$上的左向量空間。

(ii)上述等價類點集$P^n(K)$實乃由K^{n+1}中的一維子空間所組成的點集。

(iii)對於K^{n+1}中的一個$(\ell+1)$-維子空間V，所有包含於V中的一維子空間則定義爲$P^n(K)$中的一個ℓ-維射影子空間。

(iv)在線性子空間的維數上，具有下述普遍成立的關係式，即

$$\dim U+\dim V=\dim(U\cap V)+\dim(U+V)$$

由此可見

$$\dim(U\cap V)=\dim U+\dim V-\dim(U+V)$$
$$\geq\dim U+\dim V-(n+1)$$

改用$P^n(K)$中的射影子空間來描述上述維數關係，即“$P^n(K)$中的一個ℓ-維和一個m-維射影子空間的交集乃是一個射影子空間，其維數至少是$\ell+m-n$。”

【註】：“空集”想成是一個(-1)-維者！

上述$P^n(K)$叫做K上的n-維射影空間。

總結本節的研討，茲列述爲下面幾點：

(一)任給一個迪氏平面或一個抽象射影空間的結構中含有一個本質性的斜域結構叫做其基本域。

(二)對於任給一個斜域K和任給正整數n，上述$P^n(K)$是一個以K爲其基本域的n-維射影空間。

(三)兩個迪氏平面射影同構的充要條件是它們的基本域代數同構；兩個n-維抽象射影空間，$n\geq 3$，射影同構的充要條件是它們的基本域代數同構。

(四)設K是一個不可交換的斜域（例如四元域），則$P^2(K)$滿足迪氏定理但是不滿足巴布斯定理，由此可見，是不可能由迪氏定理和連截公理去推導巴氏定理的。（未完待續）