七十八年大學聯考自然組數學科試題分析

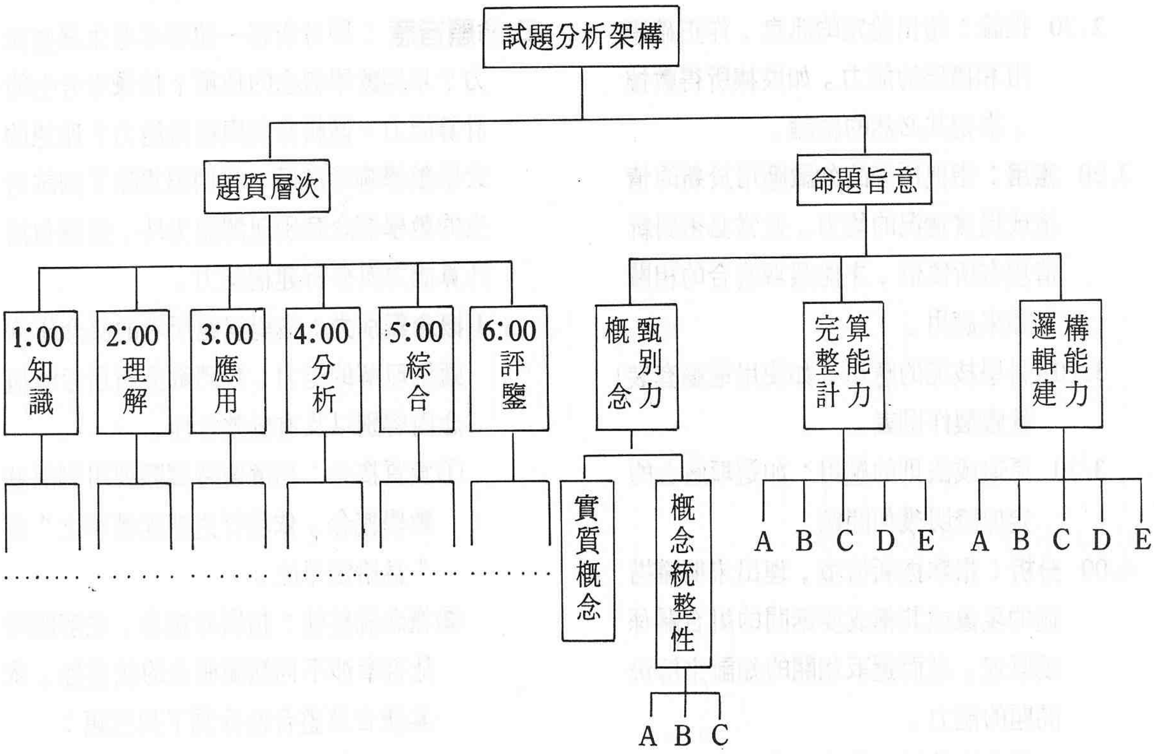
楊大衛
王意芝

壹、前　言

自七十三年起，接觸Bloorn 認知六層次，即醉心於知識結構分析及解法分析的研究。七十六年首次提出一篇分析報告，以解題認知活動層次（指解題過程中，所牽涉到的最高認知活動層次。簡稱題質層次），及命題旨意（指命題內容要甄測那些數學能力）爲兩大主軸並在其下，構建下階概念，期望建立一套較爲客觀的聯考數學試題分析模式以供來日進一步發展數學難易度評量指標。經「數學傳播」刊載，獲致很大的鼓舞。七十七年並於聯考當日，以此分析結構，預測考生成績高低標準，與日後聯招會公佈的僅各差一分，更增強了許多信心。然而，維持一個小組持續五年；從事數學試題的純研究每週一次；畢竟是很累人的。隨著結構的日益龐大精細，小組成員日感力不足心而致星散。望著堆積如山收集來的資料，只能慨嘆“我們曾經擁有”。

今年的試題分析，仍如既往，勉力而爲，期望建立資料及活動的不中綴。

貳、分析架構



省略之細部結構爲便於查閱，再次列舉如下：

A.題質層次：分析每一題解題活動過程中所牽涉到的認知層次，共分六層次。

1.00 **知識**：指學生能以回憶或再認的方式，對學過的知識概念有所記憶。可細分爲

1.10 個別或特定事物的知識：

1.11 術語知識：如複數；∪，≦。

1.12 個別事實知識：如△內角和＝180°（度量事實）；△外角等於兩對應內角和（關係事實）。

1.20 處理事物方法的知識：

1.21 慣例的知識：處理數學事實資料所依循的方式。如直角坐標點表示法；行列式基本運算性質。

1.22 趨勢和順序知識：趨勢如曲線變化（斜率）判斷；順序如sin，cos，tan的值域變化判斷。

1.23 分類知識：即範疇辨識，如函數圖形對應辨識。

1.24 規準知識：判斷數學關係成立的準則或條件。如平行或共線成立條件判斷；△全等判斷。

1.25 方法知識：對數學方法的概括認識。如牛頓法。

1.30 普遍或抽象的知識：可用以廣泛解決問題的。

1.31 原理、通則知識：如大數法則。

1.32 理論、結構：如堪根定理。

2.00 **理解**：指把握所學知識意義內涵的能

力。可細分爲：

2.10 轉譯：即變換表達方式的能力。如由數據製成圖表。

2.20 解釋：辨認、提出訊息所含結果的能力。如判別圖形間的異同或關係；正確使用公式、定理，列出方程式。

2.30 推論：超出給定的訊息，作正確應用和擴展的能力。如根據所得數據，推定其必然的結論。

3.00 **應用**：指把所學的知識應用於新的情境或現實情況的能力。通常必須對新情境有所領悟，才能選取適合的相關知識來應用。

3.10 科學技能的應用：如使用電腦套裝軟體製作圖表。

3.20 原理或法則的應用：如選取適合的定理證明幾何問題。

4.00 **分析**：指掌握新情境，理出未明確描述的現象或其構成要素間的組合關係或原理，進而選取相關的知識來解決問題的能力。

4.10 要素的分析：指出組成整體的各要素。

4.20 關係的分析：指出假設與結論間相互關係。

4.30 原理的分析：指出事實或過程的組織原理。

5.00 **綜合**：將所學知識綜合爲新的整體的能力。

5.10 要素合成：以一種方式將要素組成一種較清晰的結構，如撰寫報告的能力。

5.20 方案設計：如提出考驗假設途徑的能力。

5.30 命題衍生：如從事數學的發現與概化的能力（也即建立數學模型的能力）。

6.00 **評鑑**：對知識價值作判斷的能力。

6.10 內證批判：依內部證據評斷，如指出論證中的邏輯謬誤。

6.20 外規評量：依外在標準來判斷，即就所要評鑑的事物或現象，選取或自行建構可資評鑑依據的模型或規準，並進行評量操作。

B.命題旨意：即分析每一題要考考生那些能力？單純數學概念的理解？抑兼考考生的計算能力、邏輯分析與組織能力？理想的大學數學聯考試題，我們認爲除了測試考生的數學概念甄別理解能力外，還應包括計算能力與分析建構能力。

1.**概念甄別力**：指對試題所考的概念能夠甄別理解的能力。我們祇分析所考的概念內容別以及有無整合性。

①實質概念：指解題時實際要用到那些數學概念。依現行之課程標準之“目”爲給定單位。

②概念統整性：指所考概念，在解題時是否牽涉不同範疇概念的統整性。依其統合及整合性分爲下列三類：

A：同範疇獨立概念。

B：異範疇之獨立概念。

C：異範疇，但概念之間彼此須有交互關係。

2.**計算能力**：指解題時除了甄別理解所考概念外，必須對式子有完整的計算能力。分爲：

A：定義、定理概念之測驗，無實際數值計算。

B：直接代公式，簡單根式、分式、多項式在三次以下，及整數的計算。

C：較複雜之根式、分式、多項式在4次（或4次以上），未知元在三個以上。

D：非直接代入之定理及方法之應用

，如棣美弗定理的應用，數學歸納之演繹證明，線性規劃之計算，堪根定理等。

E：能充分掌握及安排兩個或兩個以上D類上之方法或定理之計算順序，如牛頓法、辛普遜法等。

3.**建構能力**：指解題時除了甄別理解所測概念外，尚須測試之運用邏輯方面的分析及組織能力。在建構能力的分析方面，我們依據解題流程中的“階段性目標”爲單位，對每一階段之單位建構給以如下之分類：

A：毫無建構行為。

B：單純的循序行爲，但不含其他如C、D、E類者。

C：判斷，在解題建構過程中牽涉多種解題途徑，而適切的選擇，足以使往後的解題工作順利執行。

D：遞迴，解題時須能建構遞迴關係以供解題者。（幾條直線可以切割平面爲若干區域問題）

E：迴圈，在解題過程中，須反覆檢核每一過程與結論之關係者。（如Simpson 法的證明）

叁、分析作業規則

分析的工作在題質層次方面，遇有解法不一致時，我們採取從易、從正常（指依新教材正常教學）爲原則，但我們會附加說明有別解。解法相同，則確立解題必經的重要步驟，取得一致後，再評定各步驟所牽涉的認知活動層次，以層次最高的那一步驟，作爲該題題質層次，也即題質層次的標定，我們是比較各解題重要步驟後，採取從高原則而不是加總。又一題中如分爲兩小題，我們係以小題爲單位分別評量。後一小題如需用到前面小題所求得的資料，則前面小題的解題步驟，也必須一併納入後一小題考慮。此外題質層次係以前面分析架構中所標示的爲準。

在命題旨意方面，概念甄別力一項，我們先把解題過程中，實際要用到的數學概念內容名稱標出，再判斷解題時需不需要用到概念之間的整合。整合性確定後只作類化的標示（A、B、C）而不另給定權值。由於解法不同，所牽涉到的數學概念可能有異，因此所標示的實質概念以及概念整合性，我們是依循題質層次的解法步驟而來。「計算能力」與「建構能力」是指解題中要用到的技巧，看是否需要用到計算能力或建構能力，或者同時要兼用兩項能力。關於兩者的標定，我們採取以每一小題爲單位，按照分類中之類目一次標定。而以A、B、C、D、E五個等級表達。這五個等級的分類標準，已有“層化”現象，但仍未予以“量化”。表達時，仍依從高原則標示。試題逐題逐項分析後，把分析所得數據製成總表。後面各項數據相關圖表及討論，即是以總表的數據爲基準。

以下是我們的分析與討論：

肆、解題步驟與題質層次

第一部份：單一選擇題

【子】設三階方陣 $M=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 2 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 2\end{bmatrix}$ 若其乘法反元素

$$M^{-1}=\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12} & b_{13}\\ b_{21} & b_{22} & b_{23}\\ b_{31} & b_{32} & b_{33}\end{bmatrix}$$ 則

1. $b_{11}=$ (A) -1 (B) $-\frac{3}{5}$ (C) 0 (D) $\frac{3}{5}$ (E) 1 （2分）

2. $b_{13}=$ (A) $-\frac{3}{5}$ (B) $-\frac{2}{5}$ (C) 0 (D) $\frac{2}{5}$ (E) $\frac{3}{5}$ （2分）

3. $b_{22}=$ (A) $-\frac{2}{5}$ (B) $-\frac{1}{5}$ (C) 0 (D) $\frac{1}{5}$ (E) $\frac{2}{5}$ （2分）

4. $b_{23}=$ (A) -1 (B) $-\frac{1}{5}$ (C) 0 (D) $\frac{1}{5}$ (E) 1 （2分）

5. $b_{32}=$ (A) $-\frac{3}{5}$ (B) $-\frac{1}{5}$ (C) 0 (D) $\frac{1}{5}$ (E) $\frac{3}{5}$ （2分）

解題步驟	題質層次
① $\lvert M\rvert=\begin{vmatrix}1 & 0 & 2\\ 2 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -5\\ 1 & 0\end{vmatrix}=5$	①三階方陣求乘法反元素是公式方法的正確使用，訊息明確，無需擴展或推論，是屬解釋（2.20）
②M的伴隨方陣爲 $N=\begin{bmatrix}3 & -5 & 1\\ 2 & 0 & -1\\ -2 & 5 & 1\end{bmatrix}$	②求行列式值，伴隨方陣及其轉置，再代入即得，是慣例的知識（1.21）
③而 $N^T=\begin{bmatrix}3 & 2 & -2\\ -5 & 0 & 5\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$	③對應得各數值是慣例的知識（1.21）
④ $\therefore M^{-1}=\frac{N^T}{\lvert M\rvert}=\begin{bmatrix}\frac{3}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{2}{5}\\ -1 & 0 & 1\\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5}\end{bmatrix}$	④依從高原則，本題層次爲（2.20）

⑤對應得 $b_{11}=\frac{3}{5}$ 故 1 選(D)

$b_{13}=-\frac{2}{5}$ 2 選(B)

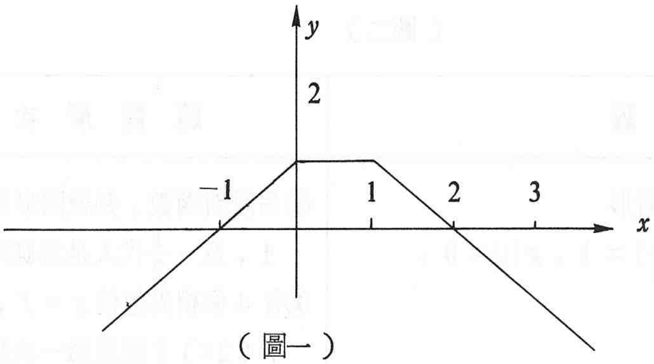
$b_{22}=0$ 3 選(C)

$b_{23}=1$ 4 選(E)

$b_{32}=-\frac{1}{5}$ 5 選(B)

【丑】 設函數 $f(x)=-\frac{1}{2}|x|-\frac{1}{2}|x-1|+\frac{3}{2}$，則圖一為下列那一個函數之圖形？

6.(A) $f(-x)$ (B) $-f(x)$ (C) $f(1-x)$ (D) $f(x-1)$ (E) $f(x)-1$ （5分）

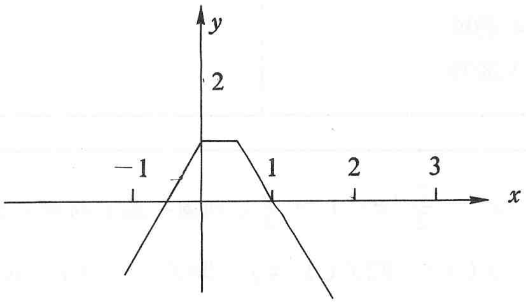


（圖一）

解題步驟	題質層次
① $f(1)=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=1$ $f(2)=-1-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=0$ $f(0)=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=1$ $f(-1)=-\frac{1}{2}-1+\frac{3}{2}=0$ ②圖一和 $f(x)$ 之圖形完全相同 而 $\begin{cases} f(-x)\neq f(x) \\ -f(x)\neq f(x) \\ f(1-x)=-\frac{1}{2}\|x-1\|-\frac{1}{2}\|-x\|+\frac{3}{2} \\ \qquad =-\frac{1}{2}\|x-1\|-\frac{1}{2}\|x\|+\frac{3}{2} \\ \qquad =f(x) \\ f(x-1)\neq f(x) \\ f(x)-1\neq f(x) \end{cases}$ 故選(C)	①觀察函數 $f(x)$ 與圖一之關係作出擴展性判斷，選擇 $x=-1$、0、1、2 代入是屬推論（2.30） ②圖一即 $f(x)$，但答案沒有，面對新情境，選一一代入作檢驗是屬應用（3.00） ③依從高原則，本題層次爲（3.00）

【丑】又圖二為下列那一函數之圖形？

7.(A) $f(x)$ (B) $f(\frac{x}{2})$ (C) $f(-\frac{x}{2})$ (D) $f(2x)$ (E) $f(-2x)$ （5分）



（圖二）

解 題 步 驟	題 質 層 次
①設圖二爲 $g(x)$之圖形 ②由 $g(0)=1$，$g(\frac{1}{2})=1$，$g(1)=0$， $g(-\frac{1}{2})=0$ ③ $g(0)=f(0)$，$g(\frac{1}{2})=f(1)$，$g(1)=f(2)$ ，$g(-\frac{1}{2})=f(-1)$ ∴ $g(x)=f(2x)$ 故選(D)	①另設新函數，判讀圖形選取 $x=0$，$\frac{1}{2}$，1，及 $-\frac{1}{2}$代入是屬應用（3.00） ②有 4 個相異值使 $g=f$，就能確是 $g(x)=f(2x)$？需認識一次絕對值圖形之性質，是屬法則的應用（3.20） ③依從高原則，本題層次爲（3.20）

第二部份：非選擇題

一、塡充題（每格5分）

1.函數 $f(t)=\sin^2 2t-3\cos^2 t$ 在 $0\leq t\leq 2\pi$ 的範圍內，其最大值為<u>(甲)</u>。

解 題 步 驟	題 質 層 次
① $f(t)=\sin^2 2t-3\cos^2 t$ $=\sin^2 2t-3\times\frac{1+\cos 2t}{2}$	①有二次及二倍角關係，辨認題目訊息，是屬解釋（2.20）

$$=(1-\cos^2 2t)-\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\cos 2t$$

$$=-(\cos^2 2t+\frac{3}{2}\cos 2t)-\frac{1}{2}$$

$$=-(\cos 2t+\frac{3}{4})^2-\frac{1}{2}+\frac{9}{16}$$

$$=-(\cos 2t+\frac{3}{4})^2+\frac{1}{16}$$

②當 $\cos 2t=-\frac{3}{4}$ 時，最大值爲 $\frac{1}{16}$

②正確使用二倍角公式，並整理後，求二次極值，考慮範圍仍在（2.20）

③依從高原則，本題層次爲（2.20）

2. 已知方程式 $\begin{cases} x+y+2z=-2 \\ x+2y+3z=\alpha \\ x+3y+4z=\beta \\ x+4y+5z=\beta^2 \end{cases}$ 有解，其中 α、β 皆為非整數之常數，則 $\alpha=$ ＿(乙)＿ ，$\beta=$ ＿(丙)＿。

解 題 步 驟（方法一）	題 質 層 次
① $\left[\begin{array}{ccc\|c} 1 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & \alpha \\ 1 & 3 & 4 & \beta^1 \\ 1 & 4 & 5 & \beta^2 \end{array}\right] \times(-1)$	①依擴展矩陣（增擴矩陣）方式求解是正確的使用公式、定理，屬（2.20） 各列化簡爲零是矩陣運算方法的知識（1.25）
$\Downarrow$	
$\left[\begin{array}{ccc\|c} 1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & \alpha+2 \\ 0 & 2 & 2 & \beta+2 \\ 0 & 3 & 3 & \beta^2+2 \end{array}\right]$ $\times(-1)$, $\times(-2)$, $\times(-3)$	②對應取值爲零是慣例的知識（1.21）其餘代入求解是簡易運算問題。
$\Downarrow$	③（方法二）中以三元四式有解的概念想到 $\triangle$、$\triangle_x$、$\triangle_y$、$\triangle_z$ 爲零是屬解釋（2.20）但要恰當的找到兩等號以解決 α、β 是屬推論（2.30）
$\left[\begin{array}{ccc\|c} 1 & 0 & 1 & -\alpha-4 \\ 0 & 1 & 1 & \alpha+2 \\ 0 & 0 & 0 & -2\alpha+\beta-2 \\ 0 & 0 & 0 & -3\alpha+\beta^2-4 \end{array}\right] \times(-1)$	④兩種解決中以從易，從正常原則取（方法一）爲正解，本題層次爲（2.20）
$\Downarrow$	
$\left[\begin{array}{ccc\|c} 1 & 0 & 0 & -2\alpha-6 \\ 0 & 1 & 1 & \alpha+2 \\ 0 & 0 & 0 & -2\alpha+\beta-2 \\ 0 & 0 & 0 & -3\alpha+\beta^2-4 \end{array}\right]$	
②聯立解 $\begin{cases} -2\alpha+\beta-2=0 \\ -3\alpha+\beta^2-4=0 \end{cases}$	

③得 $\beta=2\alpha+2$ 代入 $\Rightarrow 4\alpha^2+5\alpha=0$ $\alpha=0$ 或 $-\dfrac{5}{4}$ ④ $\because \alpha\notin Z\Rightarrow \alpha=-\dfrac{5}{4}\Rightarrow \beta=2-\dfrac{5}{2}=-\dfrac{1}{2}$	

解 題 步 驟(方法二)	
① $\because \triangle=\begin{vmatrix}1&1&2\\1&2&3\\1&3&4\end{vmatrix}=0$ $\therefore$ 方程式有無限多解 ② $\begin{vmatrix}1&1&-2\\1&2&\alpha\\1&3&\beta\end{vmatrix}=0\Rightarrow -2\alpha+\beta+2=0$ $\begin{vmatrix}1&1&-2\\1&2&\alpha\\1&4&\beta^2\end{vmatrix}=0\Rightarrow \beta^2-3\alpha-4=0$ ③聯之解 α、β 得 $\begin{cases}\alpha=-\dfrac{5}{4}\\ \beta=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$	

3. 設 L 為通過(0,0,1)與(1,2,5)兩點之直線,則 x 軸上距離 L 最近之點為(丁),而 x 軸與 L 之距離為(戊)。

解 題 步 驟	題 質 層 次
① L 方向向量(1,2,4) x 軸方向向量(1,0,0) ② L 上點 Q(t,$2t$,$4t+1$) x 軸上點 P(s,0,0) ③ $\overrightarrow{QP}$=($s-t$,$-2t$,$-4t-1$) ④ $\overline{PQ}$ 為公垂線段時距離最短。 ($s-t$,$-2t$,$-4t-1$)·(1,2,4) $=0\Rightarrow s=21t+4$ ($s-t$,$-2t$,$-4t-1$)·(1,0,0) $=0\Rightarrow s=t$	①空間處理是求向量,找點一連串的正確使用公式(2.20) ②距離最近要想到公垂線性質使用內積是屬推論(2.30) ③依從高原則,本題層次為(2.30)

⑤$\therefore s=t=-\frac{1}{5}$

⑥$P\left(-\frac{1}{5},0,0\right)$、$Q\left(-\frac{1}{5},-\frac{2}{5},\frac{1}{5}\right)$

⑦x 軸與 t 之距離$=\sqrt{\frac{4}{25}+\frac{1}{25}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$

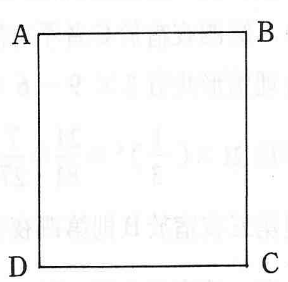
⑧(丁)塡$\left(-\frac{1}{5},0,0\right)$

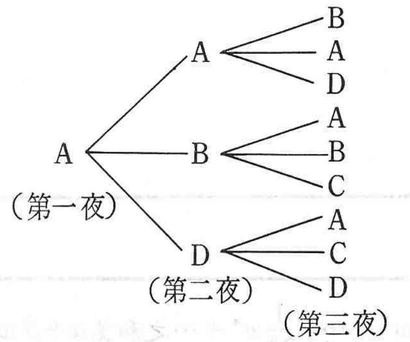
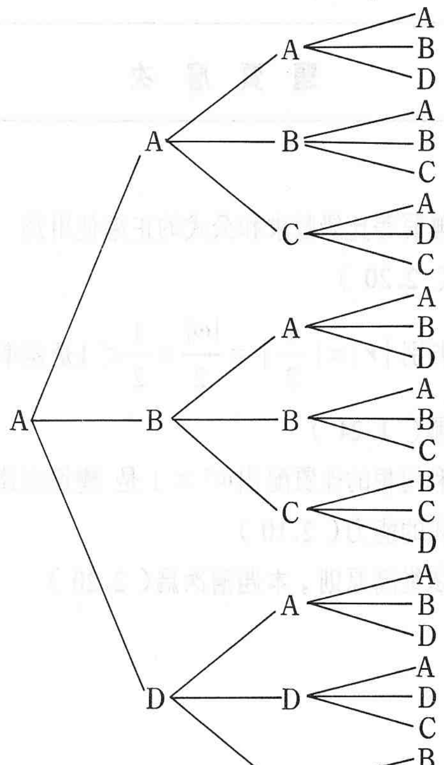
(戊)塡 $\frac{\sqrt{5}}{5}$

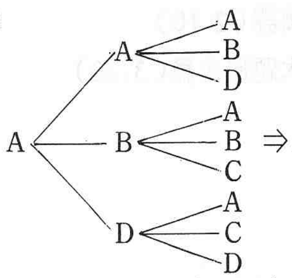
4.設ω為$x^3=1$之一虛根，若無窮級數$1+\frac{1}{2}\omega+\frac{1}{4}\omega^2+\cdots+\frac{1}{2^n}\omega^n+\cdots$之和為$\alpha+\beta\omega$，其中$\alpha$、$\beta$皆為實數，則$\alpha=$(己)，$\beta=$(庚)。

解題步驟	題質層次
$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{2^i}\omega^i=\frac{1}{1-\frac{\omega}{2}}=\frac{2}{2-\omega}$ $=\frac{2(4+2\omega+\omega^2)}{(2-\omega)(4+2\omega+\omega^2)}$ $=\frac{2(4+2\omega+\omega^2)}{8-\omega^3}$ $=\frac{2(3+\omega+1+\omega+\omega^2)}{8-1}$ $=\frac{2(3+\omega)}{7}=\frac{6}{7}+\frac{2}{7}\omega$ $\therefore \alpha=\frac{6}{7}\quad \beta=\frac{2}{7}$	①無窮等比級數求和公式的正確使用爲（2.20） ②判別$\lvert r\rvert=\left\lvert\frac{\omega}{2}\right\rvert=\frac{\lvert\omega\rvert}{2}=\frac{1}{2}<1$是規準知識（1.24） ③利用根的性質配出$\omega^3=1$是變換表達公式的能力（2.10） ④依從高原則，本題層次爲（2.20）

5.有一人流浪A、B、C、D四鎮間，此四鎮相鄰關係如右圖，假設每日清晨，此人決定當日夜晚留宿該鎮，或改而前往相鄰任一鎮之機率皆為$\frac{1}{3}$。若此人第一夜宿於A鎮，則第三夜亦宿於A鎮之機率為(辛)，而第五夜此人宿於A鎮之機率為(壬)；宿於B鎮之機率為(癸)。

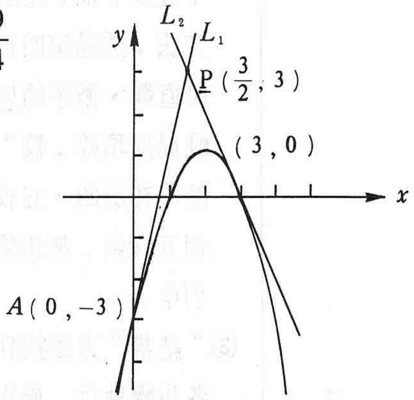


解 題 步 驟	題 質 層 次
①用樹形圖解  ②∴第三夜亦宿於A之機率爲$\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$ ③  ④第五夜宿於A則第四夜則只能宿於A、B、D∴第四夜宿於C者不可能，共有6種。 故合理情形共有 $3\times 9-6=21$ 種， 機率爲 $21\times(\frac{1}{3})^4=\frac{21}{81}=\frac{7}{27}$。 ⑤同理第五夜宿於B則第四夜宿於D不可能， 有7種，機率爲 $(27-7)\times(\frac{1}{3})^4=\frac{20}{21}$	①狀況有限亦有規則，用樹形圖形是最佳方式。處理現實情況把樹形圖的知識應用於新情境是屬(3.00) ②探討第五夜宿於A需理出來明確描述之現象及構成要素的關係是屬分析(4.20) ③第五夜宿於B層次同上 ④依從高原則，(辛)爲(3.00) (壬)爲(4.20) (癸)爲(4.20)

解 題 步 驟（另解）	題 質 層 次
①  P（第 3 夜在A｜第 1 夜在A）$=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$ $\Rightarrow P$（第 3 夜在B｜第 1 夜在A）$=\frac{2}{9}$ P（第 3 夜在C｜第 1 夜在A）$=\frac{2}{9}$ （第一夜）（第二夜）（第三夜）P（第 3 夜在D｜第 1 夜在A）$=\frac{2}{9}$ ②同理可求出第三夜與第五夜之關係得 P（第 5 夜在A｜第 3 夜在A）$=\frac{1}{3}$ P（第 5 夜在A｜第 3 夜在B）$=\frac{2}{9}$ P（第 5 夜在A｜第 3 夜在C）$=\frac{2}{9}$ P（第 5 夜在A｜第 3 夜在D）$=\frac{2}{9}$ ③（第一夜）（第三夜）（第五夜） $A \xrightarrow{\frac{1}{3}} A \xrightarrow{\frac{1}{3}} A \Rightarrow P_1=\frac{1}{9}$ $A \xrightarrow{\frac{2}{9}} B \xrightarrow{\frac{2}{9}} A \Rightarrow P_2=(\frac{2}{9})^2=\frac{4}{81}$ $A \xrightarrow{\frac{2}{9}} C \xrightarrow{\frac{2}{9}} A \Rightarrow P_3=\frac{4}{81}$ $A \xrightarrow{\frac{2}{9}} D \xrightarrow{\frac{2}{9}} A \Rightarrow P_4=\frac{4}{81}$ $P=\frac{7}{27}$　（壬）填$\frac{7}{27}$ ④（第一夜）（第三夜）（第五夜） $A \xrightarrow{\frac{1}{3}} A \xrightarrow{\frac{2}{9}} B \Rightarrow P_1=\frac{2}{27}$ $A \xrightarrow{\frac{2}{9}} B \xrightarrow{\frac{1}{3}} B \Rightarrow P_2=\frac{2}{27}$ $A \xrightarrow{\frac{2}{9}} C \xrightarrow{\frac{2}{9}} B \Rightarrow P_3=\frac{4}{81}$ $A \xrightarrow{\frac{2}{9}} D \xrightarrow{\frac{2}{9}} B \Rightarrow P_4=\frac{4}{81}$ $P=\frac{20}{81}$　（癸）填$\frac{20}{81}$	①透過第三夜求出第五夜狀況的方法，牽涉將各要素組成一種清晰“結構”的能力，是屬要素的合成，已達綜合層次（5.10） ②此種“結構”一找到，可對整題作通盤掌握，並有“引申性”可再往下發展。而（正解）的方法，透過第四夜，是較直觀、循序的思考，較局部瑣碎，較“不自然”在第四、五夜間，相互探索，無法類推或引申。 ③“結構”方法找到後的各步驟執行，層次皆較低；步驟①是應用（3.00）步驟②是要素的分析（4.10）③、④是代用公式。依從高原則，另解標（5.10） ④兩種解法依從易原則，本題層次取低訂為（4.20）

二、在拋物線 $y=x^2+4x-3$ 上，分別以 $(0,-3)$ 及 $(3,0)$ 兩點為切點作切線。試求由此二切線與拋物線所圍成區域之面積。（10分）

解 題 步 驟	題 質 層 次
①設A（0,−3）　B（3,0）	①欲求切線，先求斜率是正確的去使用公式

過A之切線為 L_1　過B之切線為 L_2 ②A、B代入⇒為圖上兩點 ③ $y'=-2x+4$ $m(L_1)=4$, $m(L_2)=-2$ ④故 L_1 為 $y=4x-3$, L_2 為 $y=-2x+6$ ⑤兩切線交點 $P\left(\frac{3}{2},3\right)$ ⑥面積 $=\int_0^{\frac{3}{2}}[(4x-3)-(-x^2+4x-3)]dx$ $+\int_{\frac{3}{2}}^{3}[(-2x+6)-(-x^2+4x-3)]dx$ $=\int_0^{\frac{3}{2}}x^2dx+\int_{\frac{3}{2}}^{3}(x^2-6x+9)dx$ $=\frac{1}{3}x^3\Big\|_0^{\frac{3}{2}}+\left(\frac{1}{3}x^3-3x^2+9x\Big\|_{\frac{3}{2}}^{3}\right)$ $=\frac{9}{4}$  	，列出方程式(2.20) ②欲求面積，先求交點要選取適用的知識處理幾何問題(3.20) ③積分列式是為轉譯(2.10) ④依從高原則，本題層次為(3.20)

三、試證 $\frac{\ell n(n+1)}{n+1}<\frac{\ell n n}{n}$ 對所有大於2之自然數 n 均成立。　(10分)

解題步驟	題質層次
①設 $f(x)=\frac{\ell n x}{x}$ ②則 $f'(x)=\frac{x\frac{1}{x}-\ell n x}{x^2}=\frac{1-\ell n x}{x^2}$ ③ $\because x\geq 3$　$\therefore \ell n x>1$ 即 $f'(x)<0$ 恒成立 故 $f(x)$ 恒為減函數 ④故得證 $\frac{\ell n(n+1)}{n+1}<\frac{\ell n n}{n}$	①要證明此不等式，需選取適合的相關知識來設定 $f(x)$ 是屬應用(3.00) ②求得 $f'(x)$ 後需觀題意"對所有大於2之自然數 n"⇒ $x\geq 3$ 屬要素之分析(4.10) ③得知減函數後得證是解釋(2.20) ④依從高則，本題層次為(4.10)

四、1.

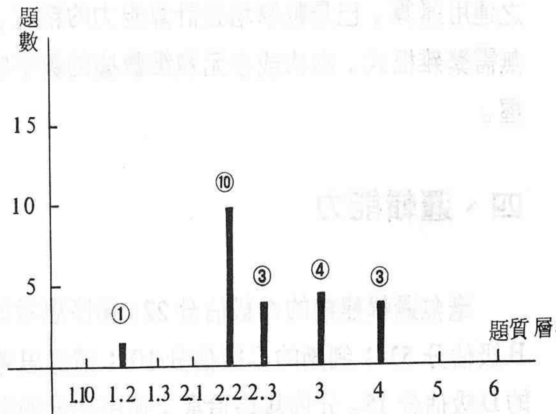
<table>
<tr><td colspan="2">求橢圓 $x^2+4y^2=1$ 與圓 $16x^2+16y^2=9$ 之交點。（2分）</td></tr>
<tr><td>解　題　步　驟</td><td>題　質　層　次</td></tr>
<tr><td>①$\begin{cases} x^2+4y^2=1 \\ 16x^2+16y^2=9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2=1-4y^2 \\ x^2+y^2=\frac{9}{16} \end{cases}$
$1-4y^2+y^2=\frac{9}{16}$
$1-3y^2=\frac{9}{16} \Rightarrow -3y^2=-\frac{7}{16}$
$\therefore y=\pm\frac{\sqrt{21}}{12}$
②$y=\frac{\sqrt{21}}{12}$ 代入 $\Rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{15}}{6}$
③$y=\frac{\sqrt{21}}{12}$ 代入 $\Rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{15}}{6}$
④交點 $(\frac{\sqrt{15}}{6},\frac{\sqrt{21}}{122})(-\frac{\sqrt{15}}{6},\frac{\sqrt{21}}{12})$
$(\frac{\sqrt{15}}{6},-\frac{\sqrt{21}}{12})(-\frac{15}{6},-\frac{\sqrt{21}}{12})$</td><td>①二元二次聯之求交點，算來累人，層次不高是慣例的知識。（1.21）</td></tr>
</table>

四、2.

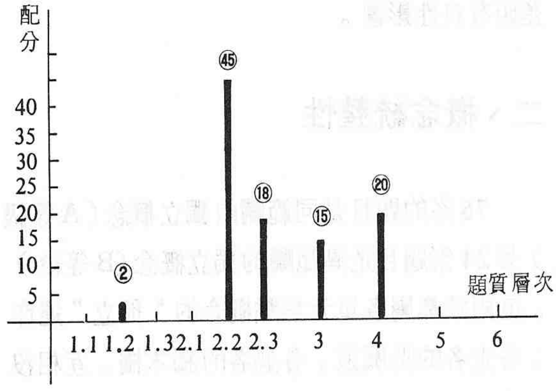
<table>
<tr><td colspan="2">求一二次曲線，使其通過點 $(0,\frac{1}{3})$ 以及上述諸交點，並請判別此曲線為何種圖形。（8分）</td></tr>
<tr><td>解　題　步　驟</td><td>題　質　層　次</td></tr>
<tr><td>①設 $K(x^2+4y^2-1)+16x^2+16y^2-9$
$=0$ 爲所求。
$\because$ 過 $(0,\frac{1}{3})$
$\therefore \frac{5}{9}K-\frac{65}{9}=0 \Rightarrow K=-13$
②$\therefore -13(x^2+4y^2-1)+16x^2+16y^2-9$
$=0$
$3x^2-36y^2+4=0, 3x^2-36y^2=-4$
$\therefore -\frac{x^2}{\frac{3}{4}}+\frac{y^2}{\frac{1}{9}}=1$ 爲一雙曲線</td><td>①依圓系之觀念推論到錐線系是（2.30）
②點代入求 K 值（1.21）
③整理方程式判讀爲雙曲線是分類的知識（1.23）
④依從高原則，本題層次爲（2.30）</td></tr>
</table>

七十八年度大學聯考自然組數學科試題分析總整理表

題號	配分	册數	章數	實質概念	概念統整性	計算能力	邏輯能力	題質層次
〔子〕1	2	理(下)	2	矩陣，乘法反元素	A	B	A	2.20
2	2	理(下)	2	矩陣，乘法反元素	A	B	A	2.20
3	2	理(下)	2	矩陣，乘法反元素	A	B	A	2.20
4	2	理(下)	2	矩陣，乘法反元素	A	B	A	2.20
5	2	理(下)	2	矩陣，乘法反元素	A	B	A	2.20
〔丑〕6	5	一	3	一次函數，絕對值折線圖形	A	D	B	3.00
7	5	一	3	一次函數，絕對值折線圖形	A	D	B	3.20
〔塡一〕1.(甲)	5	二	3	二倍角公式，二次極值	A	D	B	2.20
2.(乙)	5	理(下)	2	擴展矩陣運算	A	B	A	2.20
3.(丙)	5	或(三)	2	擴展矩陣運算	A	B	A	2.20
3.(丁)	5	三	1	空間向量，公垂線性質，內積公式	A	D	C	2.30
3.(戊)	5	三	1	空間向量，公垂線性質，內積公式	A	D	C	2.30
4.(己)	5	一	2	無窮等比求和，三次方根性質	B	B	B	2.20
4.(庚)	5	一	2	無窮等比求和，三次方根性質	B	B	B	2.20
5.(辛)	5	四	2	機率、樹形圖解	A	B	D	3.00
5.(壬)	5	四	2	機率、樹形圖解	A	B	D	4.20
5.(癸)	5	四	2	機率、樹形圖解	A	B	D	4.20
〔非二〕二	10	理(上)	3	切線求法，定積分求面積	B	D	B	3.20
〔非二〕三	10	理(上)	2	導函數，減函數	B	D	B	4.10
〔非二〕四1.	2	三	4	二次圖形求交點	A	B	A	1.21
〔非二〕四2.	8	三	4	錐線系，二次圖形判別	B	D	B	2.30



圖(一)題質層次與題數分配雙向圖



圖(二)題質層次與配分雙向圖

伍、綜合評議

一拿到題目，就可直覺的感受到，今年的題目出的是“四平八穩”沒有繁雜的運算，沒有考古題，沒有兜來轉去的邏輯判斷；每題似乎都是單純的唯一解決，有些是課本習題的類似題，有些是各單元焦點概念的典型範例。我們笑談：“數學傳播的編輯今年要頭痛了。因爲沒什麼好評的，投稿者必少。”但站在學生應考的立場，面對一份沒有驚濤駭浪、沒有高山疊障的考題，發揮三年所學，輕舟平渡重重關，未始不是一樁功德。逐題去評，今年從缺；整體來議尚有可爲。試就題質層次、概念統整性、計算能力、邏輯能力及册章分佈這五個構面，依分析總整理表，評議如下：

一、題質層次

(一)與得分的關係：

由圖(一)、圖(二)中，中度理解（2.20）題數最多，佔分最重（45分）而向兩端呈不均等分佈（左輕右重），對大專聯招以選才爲主目標的總結性評量試題而言，是可以被接受的，因爲這可以拉開高低標的差距。我們始終堅信，題質層次的“層化”現象，是影響得分的最重要因素。而中度理解（2.20）以下的總分應接近低標。是故今年的低標應在30至35分之間。由於計算能力部分，全面沒有C等級，影響我們以往對高標的評估認定。還要努力才能有突破。

(二)與配分的關係

有關配分技巧方面，一般看到的習慣，都是選擇題每題兩分，填充題每題5分，計算證明題每題10分。眞不知這樣的配分習慣，有何理論基礎？如果是診斷性評量試題，是可以平均配分，小差異配分或依題型配分，但對於大學聯招試題，還是應以難易度調整配分爲佳。高題質層次者，應配以較高的配分權值。我們可以想像，當“某年某月的某一天”聯考試題的每一小題配分都有變化時，有的2分、3分有的5、7、9、10分，人人都會一新耳目的注意到命題委員的細心與精緻，進而對，爲何會如此，產生更濃烈進一步探究的欲求。

今年的配分，中度理解（2.20）以下有11題，佔分47，平均每題4.3分。高度理解（2.30）以上的有10題，佔分53，平均每題5.3分。差距較去年爲小（去年差距2分），但比前年爲佳（前年差距0.3分），對拉開高低標

差距有良性影響。

二、概念統整性

76%的題目是同範疇內獨立概念(A等級)另24%題目是異範疇的獨立概念(B等級)。這兩類都屬各單元焦點概念的“孤立”運作,各走各的陽關道,各過各的獨木橋。互相沒有“化學反應”,沒有交互影響的關係。有C等級的題目,才會饒富興味;幾何圖形裏有三角函數的變化,內中再嵌對數運算;或複數幾何裡有極限概念……。當然不宜多,在有限的題數限制下“盡量”涵蓋三年所學而不致偏頗,C等級考題是一個常見的好方法。今年一題未見,眞乃不夠“深入”;只得“淺出”。

三、計算能力

這三年的自然組試題,前年是數據繁瑣,對式子運算要完整掌握甚爲不易;去年是有簡化,堪稱可喜;今年是更簡單化到全面避開C等級的地步,更加可賀。因爲有B等級的代入公式運算及D等級的“完整掌握”定理,方法之運用運算,已是數學培養計算能力的精髓。無需繁雜根式,高次或多元複雜數據的數字掌握。

四、邏輯能力

毫無邏輯建構的A級佔分22;循序思考的B級佔分53;判斷的C級佔分10;遞迴思考的D級佔分15。分佈甚爲恰當,循序佔分過半也很合理。

五、册章分佈

一至六册佔分分別爲20,5,20,15,20,20,各册雨露均霑,章節或有所失,也無傷了。這個社會最怕“分配不公”。到處充滿了“聯考不考,我就不教”的邏輯;學生到處聽“明牌”一聯考會考,我就簽這一“題”的風氣,聯招命題雖不必負這種責任,但能不愼乎?強求各單元主題都涵蓋是無謂的,但多運用統整性手段以求章節分佈的更妥適,也是一法。

陸、結　語

連續三年對自然組試題作試題分析,很深刻的看清楚命題的演變。自前年“相當地憂慮”過低的平均分數,會斲傷全國青年學子數學的動機,到今年很“欣喜”的看到數學科高低標擺脫各科中倒數第一的惡夢;高低標差距拉開到15分左右;題質層次合理,用邏輯、計算能力、册章分佈各種角度的檢驗都“四平八穩”深感命題委員的用心與進步。反觀試題分析技術本身這一年來,無甚進境反陷於心餘力絀的困境。原期望建立一套預警式的評估系統—能在命題後,考生作答前,預先知道此次考試能出現如何的結果——這個目標的達成顯然尙有許多路要走。但很可能影響得分的因素已掌握了80%。企盼有興趣的高明人士,能參加我們給予指導;或有學校單位,以學生在校試題與成績作相關統計模式的進一步探索,才能完成這一個心願。