討論類

課堂上的目的

葉東進

生活中的許多工作都是有目的的，花了我們一大半時間在課堂上的教學工作當然也該有它的目的。對有些人來說，也許它已僵化成職業性的機械化工作而談不上什麼目的，但是，生命中我們不是時常會浮起：我爲什麼而活着，這個問題嗎？就勢必也會反省：我在課堂上的目的是什麼？

或許你正忙着解釋爲什麼任何一個三角形的三個內角和總是 $180°$，而它三邊上的中線總是會交在一起；或許忙着說明 4 個人作環狀的排列可能有 6 種方法而不是 24 種；或許忙着指出函數 $y=ax+b$ 的係數 a 是如何地影響它的圖形的變化，但圖形却永遠是一條直線；或許忙着處罰學生，因爲他們考試的成績沒有讓你滿意；或許忙着嘔氣，由於學生不喜歡上你的輔導課而寧願到球場上打球。有許多的工作是不斷而且反覆地在課堂上進行着，……。但是，它們的目的是什麼？

有件事倒是很值得我們揣想究竟它隱含什麼深刻意義，便是幾個世紀以來，數學總是扮演學校教育裡的重要角色。從歷史的觀點來看，我們說科學與科技的文明其實便是數學的文明是一點也不過分。從數學的本質來看，數學之所以能夠而且必須扮演這樣的角色，可以說一點也不稀奇。

數學是人類理性發展中最偉大的結晶。數學教育的一個重要目的便是對於理性的發展作承先啓後的工作。如此看來，我們在課堂上的工作才顯示出它的意義與價值。

理性如何能夠發展？便是通過教育的環境引導學習者作有意義的思考（teach purposeful thinking)，這是數學家兼偉大的數學教育哲學家玻里雅（George Pólya）對於數學教育的目的所持的觀點。他認爲教學本身並不像一般的科學，可以按照既定的理論或是事實的規律一成不變地進行，也許更像是藝術家的工作。我們都知道，一位好的畫家在經營畫面時，不僅力求結構的平衡，同時也要求色彩與線條的和諧。可以說教學是着重人性而不是機械性。

數學家彭加萊（H. Poincaré）和克萊因（F. Klein）都提出過相同的見解，說：

按生物進化biogenetic的一項基本定律，指出個體的成長要經歷種族成長的所有階段，順序相同，只是所經歷的時間縮減。教數學和其他任何事情一樣，至少在原則上要遵照這項定律。教育之力，應是漸近的指引去學習較高一級的觀念，最後才教抽象的陳述。此種做法，可說是遵循人類從簡樸原始的情況，奮力達到高級知識水準所經的路徑。還需不時將此一原則加以說明，是因爲常有人效法中世紀的學習者，將最普遍的觀念放在一開始的時候便去

教授，並且辯稱這是唯一的科學方法。不論支持此種說法的依據爲何，但絕不是眞理。科學的教學方法只是誘導人去作科學的思考，而不是一開頭就教人去碰冷漠的，經過科學洗鍊的系統。推廣這種自然的眞正科學教學的主要障礙是缺乏歷史知識。所有一切數學觀念的產生其實是歷經漫長而緩慢的過程；所有觀念最初出現時，幾乎是草創的形式，經過長期改進，才結晶爲確定的方法而成爲大家熟悉的有系統的形式。

對於上面兩位數學家的見解，玻里雅也有類似的看法：

教師必須對他所授的內容具備充足廣濶的知識背景，清楚某些數學思想發展的歷史，能夠明白教學的重點所在，看得出各個不同模式蘊涵的實質意義。有些人喜歡在教學過程中強調嚴密的邏輯性而花上許多時間在「證明」上。玻里雅勸說：使用「證明」應該像使用金錢一樣——謹慎而節省些，特別是在達成某項結論的過程中，教學的重心應該放在如何引導學生從事猜測，作直覺的判斷，或是進行類比，對各種可能的情況作分析，甚至進行目標的探索以及思考中的頓悟。

爲了達成玻里雅所說的教學的目的，他提出教學的三個基本原則：

(1)鼓勵學生主動的參與教學活動。

(2)引起學生熱烈的學習動機。

(3)針對目標提供連貫性的教材。

底下，個人舉出一些實例來說明上述三個原則的運用：

一、鼓勵學生主動的參與教學活動：

教學並不是像電話的傳訊，教師說而學生聽，學生的參與就是要他們能夠成爲兩個角色——受話者也是傳話者。對一個人來說，數學之能夠成爲有用，是由於數學知識已發展成爲他的個體結構的一部份以及通過困阨的學習過程所歷煉出的經驗。因此教師一定要拿問題來迫使學生實際的參與教學活動，並且不能允許他們有所規避。由於課堂上並無足夠的時間讓學生作充分的參與，因此運用技巧，謹愼的安排，以保護此種學生的參與活動得能進行却是非常重要不可缺少。

例：一個有關排列組合的問題。

有甲、乙、丙、丁、戊、己等 6 個人分配住進 A、B、C 三個房間，規定每個房間最多住 4 人，若甲、乙同房，有多少種分配方法？

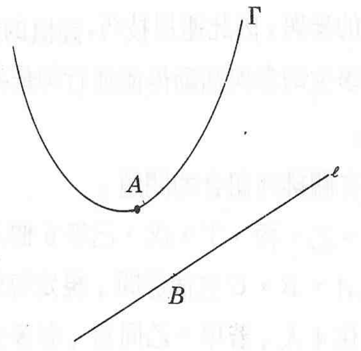
學生當然已經學習過一些有關排列組合的基本觀念與方法，但是教師不須急着在黑板上解它，先要學生試着解看看。結果可能會出現幾種不同的解答，此時教師也不必急着對個別的解答作出眞確或錯誤的判定，不妨問問其他學生。讓他們表達對這個解答的意見，這種情況下必然會引起學生的紛紛議論，等到每一種解答都經歷了上面同樣方式的意見諮詢，最後，整個課堂必將烘起一股熱烈的氣氛，全班學生形成數個小群體各自堅持着自以爲是的結論，焦急而期待着教師作出最後的判決。但是整個活動並不在判決的那一刻結束。從諮詢的過程中，教師已經知道了學生的某些偏向的思考，從而指出它們的錯誤所在並提出正確的方法，使這段教學活動達到最高潮。

二、引起學生熱烈的學習動機：

教材的乏味，學習過程的缺乏成就，沒有明顯的探索目標以及把握不定學習的方向，都會帶給學生疲倦而漸漸失去學習的興趣與熱忱，也就將導致教學的失敗。猜測與嘗試是人類的兩項巨大潛能。教師要鼓勵學生、幫助他們，使他們瞭解自己在學習的過程中實際上是扮着猜測與嘗試的角色。

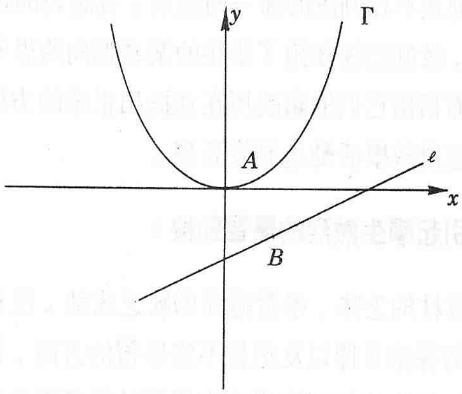
例：有一顆彗星，它的軌跡是一條拋物線 Γ（見圖），現在發射一顆觀測衛星，它的軌跡是一條直線 ℓ。假定 Γ 與 ℓ 是在同一個平面上。由於要取得最佳的觀測位置，我

們必須預先算出（確定）衛星到達的位置，與



彗星經過的位置，恰好使Γ與ℓ之間的距離最短，也就是彗星經過A點而同時衛星到達B點是最佳的觀測位置。我們問學生，B點的確實位置怎樣找到？
這是一個有趣的問題。

當然，問題的解法常常因爲學生所學的教材不同而有不同。比如說，學到座標幾何的同時，學生會嘗試去設計一個座標系統，使Γ的代數表式（例如）爲 $y=x^2$，而ℓ的表式（例如）爲 $x-2y-2=0$。因爲A點在Γ上，它的位置可以用 (t, t^2) 表示，因此A到ℓ的距



離欲爲最小，也就是下列的式子

$$\frac{|2t^2-t+2|}{\sqrt{5}}$$

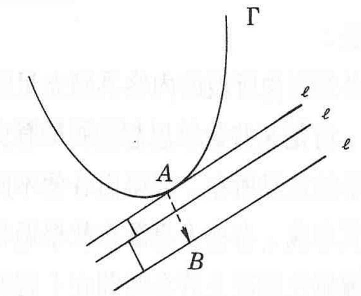
爲最小。

經過計算，知道在 $t=\frac{1}{4}$ 時上式的值最小，也就是說A的位置是 $(\frac{1}{4}, \frac{1}{16})$，而B是A點在ℓ上的投影，所以B的位置是 $(\frac{11}{5}, -\frac{307}{80})$。

同樣的問題，如果讓學過綜合幾何的國三學生來處理，便是一道非常有意思的問題。

教師可以指導學生作一些合理的探索與猜測：

改變ℓ的位置而不變其方向使ℓ更接近Γ，看看會發現什麼現象？ℓ愈接近Γ，最佳觀測距離便愈縮短，當ℓ接觸到Γ的那一點位置也就是A點的所在，這個時候A點即是B點，因此在ℓ退回到它原來的位置時，A點就跟着退回到所欲尋找的B點位置，這眞是一趟探索之旅！



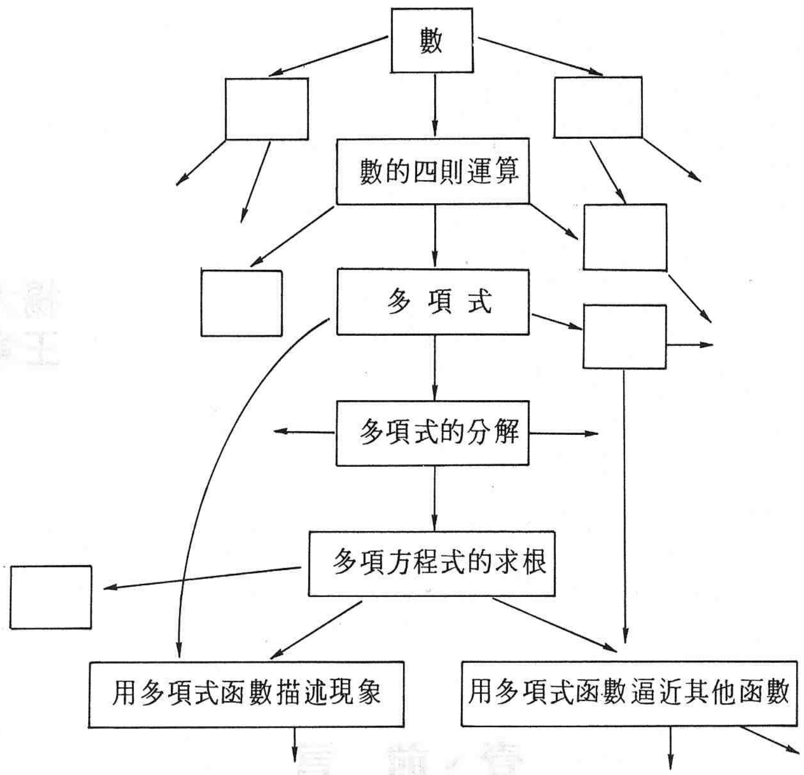
三、針對目標提供連貫性的教材：

長程的教學目標必須配以連貫性的素材，當素材分割成分段素材時，分段有分段的目標，但是這些分段目標却能連貫而被統合，指向原有的長程目標。通過這樣的素材的設計，教學裡的探險活動才能知其所該止而不致迷失方向，學生因此得以自然而活潑地游走於直覺與發現的活動當中。

例： 多項式函數是所有函數裡面最基本的一個。由於它的結構最爲單純，因此常被用來描述一些自然現象或是作爲其他函數的近似，所以學習如何利用多項式函數描述現象或作逼近，便是一個長程的教學目標。在這個目標範圍內，勢必就得對多項式函數本身作一番瞭解的功夫，以便熟悉這個工具的掌握，也就因此而確立了一個中程的教學目標——瞭解多項式函數 $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\cdots\cdots+a_1x+a_0$；然而多項式函數運用之所在往往在尋找那些滿足 $a_n x^n$

$+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots\cdots+a_1x+a_0$等於某一常數 c 的 x 值，就是說在求解多項方程式的根的問題。通過分解，我們希望把一個高次的多項式拆成幾個更爲簡單的一次或二次式的乘積，如此一來，解決了一次或二次式的根的問題便也就解決了高次式的根的問題（至於無法分解的，就又朝另一個目標前進探索，比如數的近似、根的近似、數值分析等，以求解決之路）。因此學習如何分解因式便是一個較爲短期的目標，而因式定理或餘式定理也就在這個目標分段的流程中顯現出它該有的角色的地位。如果更把目標往前推移，那麼最近程的目標便是如何熟習數的四則運算了。

把上面所敍的流程圖解如下：



上面流程圖的架構，宛如一條大河，從源頭（數）起始，經過分支再分支而形成了許多的支流。支流衆多，主流可見而脈絡則清楚明白。教師的工作便是引領學生按預定的目標游走於河流中的諸島，作探索、作猜測、作發現、作瞭解，而尋幽攬勝的過程中便已習得了如何作出有目標、有意義的思考了。

參考文獻

1. John A. Dossey：Learning, Teaching, and Standard；*Mathematics Teacher*, April 1988.
2. 洪萬生：數學史與數學教育；科學月刊，十五卷五期。
3. 玻里雅（George Pólya）：怎樣解題；長橋，張憶壽譯。

——本文作者任教於新竹科學園區實驗高中——