中華民國科學才能青年選拔活動
七十七學年度數學競試第二階段試題
詳　解

陳獻平

時間：77年12月17日
上午8:00～9:50

一、(1)〔x〕表示小於或等於 x 的最大整數，譬如〔3〕=3，〔−3.2〕=−4。這樣用法的〔 〕稱爲高斯符號。設 n 爲一正整數，x 爲一整數，請利用高斯符號及 n，x 表示 x 除以 n 後所得的（正）餘數。

(2)現行的陽曆規定第 y 世紀第 x 年在下列的情況下爲閏年：$x \neq 100$ 而爲 4 的倍數或 $x=100$ 而 y 爲 4 的倍數。（注意：我們所指的 20 世紀是從 1901 年到 2000 年。）已知 2001 年元旦爲星期 1，請用高斯符號表出第 y 世紀第 x 年的元旦是星期幾。（星期日就是星期0。）

二、已知 x^2-2x-1 整除 $x^{18}-ax^2+b$，而 a、b 都是整數。以質數的乘積式表出 a 與 b。

三、設 x、y 爲正整數，則 $f(x,y)$ 也表示一正整數。已知 f 有下列的性質：

$f(x,x)=x$，$f(x,y)=f(y,x)$，
$(x+y)f(x,y)=y\,f(x,x+y)$。

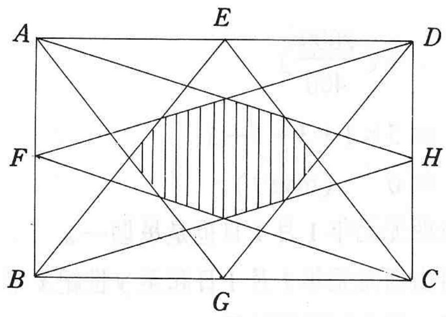
(1)計算 $f(14,52)$。

(2)請用我們常用的術語說出 $f(x,y)$ 與 x、y 的關係，並證明之。

四、設 $P(x)$、$Q(x)$ 爲兩個互質的二次式，若已知 $y=P(x)/Q(x)$ 的圖形有兩條垂直的漸近線。證明圖形只有以下三種可能：(1)有一極大點，一極小點，一拐點（或稱反曲點，轉折點…）。(2)有一極大或極小點，無拐點。(3)無極大或極小點，有一拐點。先將方程式適當的化簡，使計算與證明簡明易行。

五、試證兩個稜長都是 1 公尺的正四面體，可放入一個稜長爲 1 公尺的正立方體內。

六、如圖，E、F、G、H 爲矩形 $ABCD$ 各邊的中點。求斜線部分與矩形的面積之比。



七、在座標平面上 x 座標與 y 座標都是整數時叫做格子點。設 $n \geqslant 2$ 是一個自然數，假如我們有 n 種顏色，而將每個格子點用其中任意一種顏色塗上（例如有的點塗上紅色，有的點塗上藍色…），試證我們可以找到一個矩形（邊都與座標軸平行），四個頂點是同色的。請先討論 $n=2$ 的情形。

八、腳踏車沿直線進行，考慮固著於車（前）輪周緣之一質點P。設車輪半徑為R，以着地線為x軸，並設$x=0$時，P點在最高處。

(1)以P點相對於輪心的轉角θ表示P點之座標。

(2)畫出θ從$-\pi$到π時，P點的軌跡。

(3)將這軌跡對x軸作鏡射，得到一曲線Γ。求Γ上從底點（$\theta=0$）到轉角為θ時之弧長s。

(4)設有一單位質點在曲線Γ上運動，證明當它受到重力的作用時，必作簡諧運動。（設重力加速度為$g=9.8$米/秒^2。）

(5)若簡諧運動之周期為一秒，則R為多少？

解　答：

一、由西元元年元月1日起至2001年1月1日經過d天，則

$$d=2000\times365+\left[\frac{2000}{4}\right]-\left[\frac{2000}{100}\right]+\left[\frac{2000}{400}\right]$$

$$\equiv5\times1+3+1+5$$

$$\equiv0 \pmod 7$$

故西元元年1月1日也是星期一。

再由西元元年1月1日起至y世紀x年1月1日共經歷天數為

$$w(x,y)=365\{100(y-1)+100(x-1)\}+\left[\frac{100(y-1)+(x-1)}{4}\right]-\left[\frac{100(y-1)+(x-1)}{100}\right]+\left[\frac{100(y-1)+(x-1)}{400}\right]+1$$

$$=365\{100(y-1)+(x-1)\}+25(y-1)+\left[\frac{x-1}{4}\right]-(y-1)+\left[\frac{y-1}{4}\right]+1$$

$$\equiv x-2y+\left[\frac{x-1}{4}\right]+\left[\frac{y-1}{4}\right]+2 \pmod 7$$

故y世紀x年元旦之星期數為$w \pmod 7$

其中$w=x-2y+\left[\frac{x-1}{4}\right]+\left[\frac{y-1}{4}\right]+2$。

二、$f(x)=x^{18}-ax^2+b$　　$a,b\in Z$

設　$x^2-2x-1=0$之二根為α,β

則　$\alpha+\beta=2$，$\alpha\beta=-1$，$\alpha^2+\beta^2=6$

$\alpha^4+\beta^4=34$，$\alpha^6+\beta^6=198$

又 $\begin{cases}\alpha^{18}-a\alpha^2+b=0\\ \beta^{18}-a\beta^2+b=0\end{cases}$

$$\Rightarrow a=\frac{\alpha^{18}-\beta^{18}}{\alpha^2-\beta^2}$$

$$=(\alpha^4+\alpha^2\beta^2+\beta^4)(\alpha^{12}+\alpha^6\beta^6+\beta^2)$$

$$=35\{(\alpha^6+\beta^6)^2-\alpha^6\beta^6\}$$

$$=5\times7\times(198^2-1)$$

$$=5\times7\times197\times199$$

$$b=\frac{(\alpha^8+\beta^8)(\alpha^8-\beta^8)}{-(\alpha^2-\beta^2)}$$

$$=-[(\alpha^4+\beta^4)^2-2\alpha^2\beta^2]\cdot(\alpha^4+\beta^4)(\alpha^2+\beta^2)$$

$$=-2^3\times3\times17\times577$$。

三、(1) $f:N\to N$ $\begin{cases}f(x,x)=x\cdots\cdots\cdots\text{①}\\ f(x,y)=f(y,x)\cdots\cdots\text{②}\\ f(x,x+y)=\dfrac{x+y}{y}f(x,y)\text{③}\end{cases}$

將③式中之y代以$y-x$，得

$$f(x,y)=\frac{y}{y-x}f(x,y-x)\cdots\cdots④$$

重覆遞迴使用④式得

$f(14,52)$

$$=\frac{52}{38}f(14,38)=\frac{52}{38}\times\frac{38}{24}f(14,24)$$

$$=\frac{52}{38}\times\frac{38}{24}\times\frac{24}{10}f(14,10)$$

$$=\frac{52}{38}\times\frac{38}{24}\times\frac{24}{10}\times\frac{14}{4}\times\frac{10}{6}\times\frac{6}{2}\times\frac{4}{2}$$

$$\times f(2,2)$$

$$=\frac{52\times 14}{2}=364$$

(2)由(1)式可推知 $f(x,y)$ 爲 (x,y) 之最小公倍數。

如令 $h(x,y)=\dfrac{xy}{f(x,y)}$ 則要證明 $f(x,y)$ 爲 x,y 之最小公倍數與證明 $h(x,y)$ 爲 x,y 之最大公因數等價。

此時原條件可改寫成

$$\begin{cases} h(x,x)=x \\ h(x,y)=h(y,x) \\ h(x,x+y)=h(x,y) \end{cases}$$

但此三式即爲輾轉相除法原理。

故 $h(x,y)=$「x,y 之H.C.F.」

如所欲證。

四、$f(x)=\dfrac{\text{二次式}}{\text{二次次}}=\text{常數}+\dfrac{\text{一次以下}}{\text{二次式}}$

因有二垂直漸近線，故分母有兩個相異實根（零點）。

1° 由 y 軸上的平移可設常數爲 0，再由 x 軸之伸縮及平移，可設分母爲 x^2-1，作部份分式得

$$f(x)=\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+1}$$

且 $BC\neq 0$（互質條件）。

由伸縮 y 軸可設 $B=+1$（否則將 y 變號）

故 $f'(x)=\dfrac{-1}{(x-1)^2}+\dfrac{-C}{(x+1)^2}$

$$f''(x)=\frac{2}{(x-1)^3}+\frac{2C}{(x+1)^3}。$$

2° $f'(x)=0$ 則 $(x+1)^2=-C(x+1)^2$

（甲）若 C 爲負則此方程式有解

$$x+1=\pm\sqrt{-C}(x-1)$$

（甲上）$C=-1$ 時只有一根 $x=0$

此時 $f''(x)=2\left[\dfrac{1}{(x-1)^3}-\dfrac{1}{(x+1)^3}\right]=0$ 無解，此爲情況(2)，0 爲極大值。

（甲下）$0<-C\neq 1$ 時，$f'(x)$ 有兩根。其時 $f''(x)$ 有異號，故此爲情況(1)，因爲 $f''(x)=0$ 也有一實根，即

$\dfrac{x+1}{x-1}=\sqrt[3]{-C}$ 處（且與 $f'(x)=0$ 根不同）

（乙）若 $C>0$ 則 $f'(x)=0$ 無解，但

$$f''(x)=2\left(\frac{1}{(x-1)^3}+\frac{C}{(x+1)^3}\right)$$

有一解 $\dfrac{x+1}{x-1}=-\sqrt[3]{C}$ 此爲情況(3)。

五、將正方體之各頂點座標化如圖示，又二個頂點爲 V_1,V_2 之正四面體。其底置於平面 $OABC$ 及 $DEFG$ 上。

使 $\angle AOP=\angle COQ=\angle EFR=\angle GFS=15^\circ$

則 $\overrightarrow{OP}=(\cos 15^\circ,\sin 15^\circ,0)$

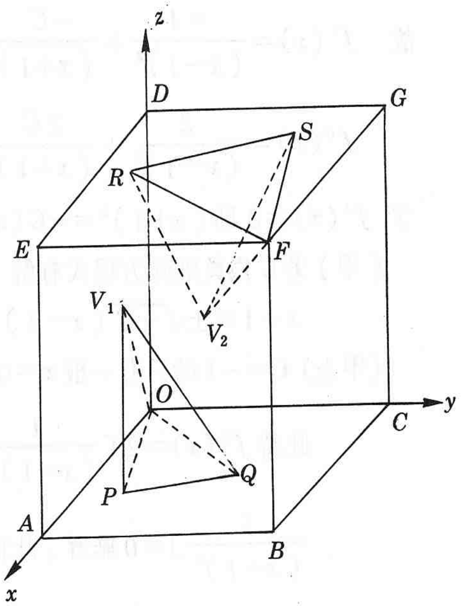
$\overrightarrow{CQ}=(\sin 15^\circ,\cos 15^\circ,0)$

R 與 Q、P 與 S 對於正立方體之中心 $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ 成對稱。

$\therefore$ $R=(1-\sin 15^\circ,1-\cos 15^\circ,1)$

$S=(1-\cos 15^\circ,1-\sin 15^\circ,1)$

$\overrightarrow{PQ}\,/\!/\,\overrightarrow{RS}$



頂點$V_1=(\frac{\sqrt{6}}{6},\frac{\sqrt{6}}{6},\frac{\sqrt{6}}{3})$

$\overrightarrow{PQ}=(1,-1,0)$

$\overrightarrow{PR}=(-1+\frac{\sqrt{6}}{2},-1+\frac{\sqrt{6}}{2},-1)$

平面$PQRS$之方程式為

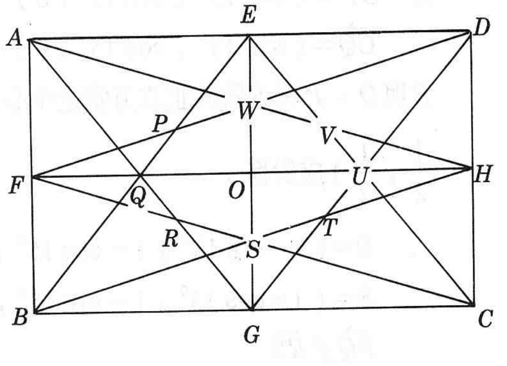
$$x+y+(\sqrt{6}-2)z=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\Rightarrow z=\frac{x+y-\frac{\sqrt{6}}{2}}{2-\sqrt{6}}$$

$$\because\ \frac{\sqrt{6}}{3}<\frac{\frac{\sqrt{6}}{6}+\frac{\sqrt{6}}{6}-\frac{\sqrt{6}}{2}}{2-\sqrt{6}}=\frac{3+\sqrt{6}}{6}$$

即V_1在$PQRS$平面之下方，故此二正四面體確實可放入正立方體中。連接$\overline{AC}$、

六、$\overline{BD}$、$\overline{EG}$、$\overline{FH}$，ΔOEF中，W，Q各為



$\overline{EO}$，$\overline{FO}$之中點，$\therefore P$為ΔOEP之重心，Q，W各為矩形$AFOE$邊上之中點，可證APO共線$\Rightarrow\Delta OPQ=\frac{1}{2}\Delta OPF=\frac{1}{6}OFE$

$=\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\square ABCD=\frac{1}{48}\square ABCD$

$=\Delta OPW$，再由對稱性，$\therefore PQRSTUVW$

$=8\times\frac{1}{48}\square ABCD=\frac{1}{6}\square ABCD$。

七、(1) $n=2$時，考慮平面上有3×1之方格點，以a，b表示二種顏色，其塗法有如下之8種情形。

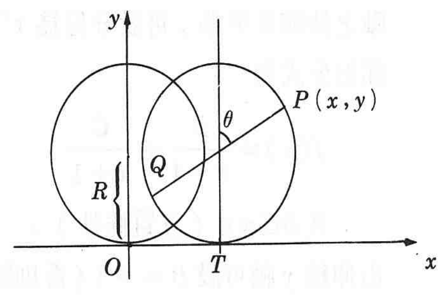
a	a	a	b	a	b	b	b
a	a	b	a	b	a	b	b
a	b	a	a	b	b	a	b

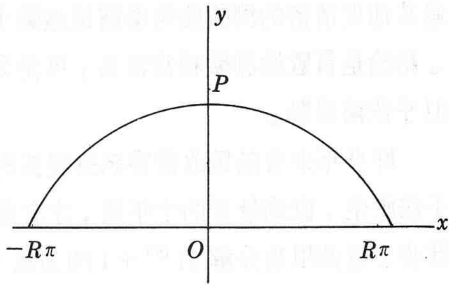
在平面上一個以a，b二色塗好的方格點中，任取3×9的長方形方格，由鴿籠原理知必有二行為相同之着色，又顏色只有二種，故每行必有二格點為同色，因而可得四項為同色之矩形。

(2)對一般的n而言，考慮一個$(n+1)\times 1$的方格點，用n色去塗它，有n^{n+1}種塗法，在一個用n色塗好的方格點而言，任取一個有$(n+1)\times(n^{n+1}+1)$個方格點的長方形來看，必有二行的顏色完全一樣，又同一行中有某二色重複出現，因此有一個四頂同色的矩形。

八、(1) $\overline{OT}=\overset{\frown}{QT}=R\theta\Rightarrow$

$$\begin{cases} x=R\theta+R\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)=R(\theta+\sin\theta) \\ y=R+R\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)=R(1+\cos\theta) \end{cases}$$





(2) $-\pi \leqslant \theta \leqslant \pi$，$P$ 剛好滾過一個圓周長。

(3) Γ：$\begin{cases} x = R(\theta + \sin\theta) \\ y = -R(1 + \cos\theta) \end{cases} \quad -\pi \leqslant \theta \leqslant \pi$

$$弧長\ S = \int_0^{\theta} \sqrt{x'^2(\theta) + y'^2(\theta)}\, d\theta$$

$$= R\int_0^{\theta} \sqrt{2 + 2\cos\theta}\, d\theta$$

$$= 2R\int_0^{\theta} \left|\sin\frac{\theta}{2}\right| d\theta$$

$$= 4R\sin\frac{\theta}{2} \quad (0 \leqslant |\theta| \leqslant \pi)$$

(4)今曲線對 $\theta = 0$ 為對稱

$$而 \begin{cases} \dfrac{dx}{d\theta} = R(1 + \cos\theta) \\ \dfrac{dy}{d\theta} = R\sin\theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\sin\theta}{1 + \cos\theta} = \tan\frac{\theta}{2}$$

$S = 4R\sin\dfrac{\theta}{2}$ 於 $|\theta| \leqslant \pi$ 。

故加速度之切向成分為

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = -g\sin\frac{\theta}{2} = -\left(\frac{g}{4R}\right)S$$

即簡諧振動。

(5)週期 $T = 2\pi \Big/ \sqrt{\dfrac{g}{4R}} = 1$ 秒

$R = \dfrac{g}{16\pi^2} = 0.062$ 公尺

——本文作者任教於嘉義高中——