關於圓周率 π

余文卿・葉國榮

1.圓周率的定義及近似值

圓周率 π 是圓的周長與直徑的比，即直徑是 1 的圓周長是 π，使用積分的定義則是

$$\pi=2\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

自古以來，種種方法被運用於求 π 的近似值。以 A_n，B_n 表示單位圓的內接與外切之正 n 邊形面積，則有

$$A_n=\frac{n}{2}\sin\frac{2\pi}{n}\ ,\ B_n=n\tan\frac{\pi}{n}\ 。$$

因而 $A_n<\pi<B_n$ 。

π 的值到小數點後 200 位是

$$\begin{aligned}\pi=3.&1415926535\ 8979323846\ 2643383279\ 5028841971\\ &6939937510\ 5820974944\ 5923078164\ 0628620899\\ &8628034825\ 3421170679\ 8214808651\ 3282306647\\ &0938446095\ 5058223172\ 5359408128\ 4811174502\\ &8410270193\ 8521105559\ 6446229489\ 5493038196\end{aligned}$$

取 $\pi=3.1415926535/10000000000$，做輾轉相除法得 π 的連分數表示是

$$\pi=3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{292+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\ddots}}}}}}$$

而前面七個近似分數是

$$\frac{1}{3},\ \frac{22}{7},\ \frac{333}{106},\ \frac{355}{113},\ \frac{103993}{33102},\ \frac{104348}{33215},\ \frac{208341}{66317}$$

阿基米德考慮圓內接與外切正96邊形，而得出 $3\frac{10}{71}<\pi<3\frac{1}{7}$；而西元五世紀左右，祖冲之得出的近似值 $\frac{355}{113}$，近代更用計算機，將 π 的值計算到16,000,000位。

2. π與級數的和

π 很自然地出現在一些正項級數與交錯級數的和，如

(1) $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}+\cdots\cdots=\frac{\pi}{4}$,

(2) $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots\cdots=\frac{\pi^2}{6}$,

(3) $1-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\cdots\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}+\cdots\cdots$
$=\frac{\pi^3}{32}$,

(4) $1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\cdots\cdots+\frac{1}{n^4}+\cdots\cdots=\frac{\pi^4}{90}$,

(5) $1-\frac{1}{3^5}+\frac{1}{5^5}-\cdots\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^5}+\cdots\cdots$
$=\frac{5\pi^5}{1536}$,

(6) $1+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\cdots\cdots+\frac{1}{n^6}+\cdots\cdots=\frac{\pi^6}{945}$,

(7)一般 $1-\frac{1}{3^{2k+1}}+\frac{1}{5^{2k+1}}-\cdots\cdots$
$+\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^{2k+1}}+\cdots\cdots$
$=\pi^{2k+1}\times$有理數

(8)一般 $1+\frac{1}{2^{2k}}+\frac{1}{3^{2k}}+\cdots\cdots+\frac{1}{n^{2k}}+\cdots\cdots$
$=\pi^{2k}\times$有理數

這類的級數和可由三角級數、積分或複變方法得出，如

$$\frac{\pi}{4}=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}$$
$$=\int_0^1[1-x^2+x^4-\cdots\cdots+(-1)^n x^{2n}+\cdots\cdots]dx$$

逐項積分即得出第一個式子，這式子曾被用來計算 π 的近似值，但不很實用，若想得到100位，則需算到 10^{50} 項。

而第二個式子與一般級數

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2k}},\ k\text{ 是正整數}$$

的和是由Euler在1736年獲得，現介紹Euler得出第二式所使用的方法，考慮正弦函數的級數，

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots\cdots+\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots\cdots$$

$\sin x=0$ 的根是 0，$\pm\pi$，$\pm2\pi$，……$\pm n\pi$……

令 $x^2=y$，則

$$y\left(1-\frac{y}{3!}+\frac{y^2}{5!}-\frac{y^3}{7!}+\cdots\cdots+\frac{(-1)^{n-1}y^{n-1}}{(2n-1)!}+\cdots\cdots\right)=0$$

故方程式

$$1-\frac{y}{3!}+\frac{y^2}{5!}-\frac{y^3}{7!}+\cdots\cdots+\frac{(-1)^{n-1}\ y^{n-1}}{(2n-1)!}$$

$$+\cdots\cdots=0$$

的根是 π^2，$(2\pi)^2$，$(3\pi)^2$，……，$(n\pi)^2$，……但這些根的倒數和則是第二項係數

$-\frac{1}{3!}$ 乘上 -1，即

$$\frac{1}{\pi^2}+\frac{1}{(2\pi)^2}+\frac{1}{(3\pi)^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{(n\pi)^2}$$

$$+\cdots\cdots=\frac{1}{3!}$$

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots\cdots=\frac{\pi^2}{6}$$

利用餘弦函數的級數展開

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots\cdots+\frac{(-1)^n\ x^{2n}}{(2n)!}$$

$$+\cdots\cdots$$

重覆上面的步驟，則得出

$$1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{(2n+1)^2}+\cdots\cdots$$

$$=\frac{\pi^2}{8}$$

因而上面級數減去第二個級數的兩倍，則得出

$$1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{(2n-1)^2}$$

$$-\frac{1}{(2n)^2}+\cdots\cdots=\frac{\pi^2}{12}$$

另外 π 與反正切的關係也常被用於計算 π 的值，如

$$\frac{\pi}{4}=4\tan^{-1}\frac{1}{5}-\tan^{-1}\frac{1}{239},$$

$$\pi=20\tan^{-1}\frac{1}{7}+8\tan^{-1}\frac{3}{79},$$

$$\tan^{-1}\frac{1}{p}=\tan^{-1}\frac{1}{p+q}+\tan^{-1}\frac{q}{p^2+pq+1},$$

$$\pi=48\tan^{-1}\frac{1}{18}+32\tan^{-1}\frac{1}{57}$$

$$-20\tan^{-1}\frac{1}{239}$$

3. π是無理數

到底 π 是無理數或有理數呢？答案非常明顯，一定是無理數，否則就不用費這麼大的功夫去計算近似值與近似分數了。1761 年 J.H Lambert 利用 Brouncker 所得出 π 的連分數

$$\frac{\pi}{4}=\cfrac{1}{1+\cfrac{2^2}{2+\cfrac{3^2}{2+\cfrac{5^2}{2+\cfrac{7^2}{2+\cdots\cdots}}}}}$$

而得證 π 是無理數，底下是一淺近的分析證明。

設 $f(x)$ 是 $2n$ 次多項式，則利用連續部份積分得出

$$J=\pi\int_0^1 f(x)\sin\pi x\,dx$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k\left(f^{(2k)}(c)+f^{(2k)}(1)\right)}{\pi^{2k}}$$

現取 $f(x)=\frac{x^n(1-x)^n}{n!}$，則顯然有 $f(x)=f(1-x)$，因而對任意正整數 k，$f^{(k)}(0)=(-1)^k f^{(k)}(1)$。現證明 $f^{(k)}(0)$ 是整數，利用數學歸納法可證明

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^k\left[f(x)g(x)\right]$$

$$=\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\left[\left(\frac{d}{dx}\right)^j f(x)\right]\cdot$$

$$\left[\left(\frac{d}{dx}\right)^{k-j}g(x)\right]$$

因而

$$f^{(k)}(x)=\frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\left[\left(\frac{d}{dx}\right)^j x^n\right]\cdot$$

$$\left[\left(\frac{d}{dx}\right)^{k-j}(1-x)^n\right]$$

$$但\left[\left(\frac{d}{dx}\right)^{j}x^n\right]_{x=0}=\begin{cases}0 & ,\ 0\leqslant j<n\ ;\\ n! & ,\ j=n\ ;\\ 0 & ,\ j>n\ .\end{cases}$$

故無論如何，$f^{(k)}(0)$是整數。

若π是有理數，$\pi^2=\frac{p^2}{q^2}$，p，q是正整數，則$p^{2n}J$是整數；而另一方面由

$$0\leqslant x^n(1-x)^n\sin\pi x\leqslant 1$$

而得 $0<J<\frac{\pi}{n!}$

故 $0<p^{2n}J<\frac{p^{2n}\pi}{n!}$

但 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{p^{2n}}{n!}=0$，

故n相當大時，$0<p^{2n}<1$，這與$p^{2n}J$是整數相矛盾。故得證π是一無理數。

4. π是一超越數

所謂超越數即是不滿足任意有理係數n次方程式的數（可能是複數）。要證明某一數是超越數，一般並不容易。1873年Charles Hermite（1822～1901）證明了自然對數的基底

$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots\cdots$$

是一超越數，因而得到

$$a_1e^{r_1}+a_2e^{r_2}+\cdots\cdots+a_ne^{r_n}=0$$
$$\Rightarrow a_1=a_2=\cdots\cdots=a_n=0$$

其中a_1，a_2，……a_n是有理數，而r_1，r_2，……，r_n是相異正整數或零。

1882年，F. Lindeman推廣Hermite的定理，允許a_1，a_2，……，a_n；r_1，r_2，……，r_n是代數數，即

若r_1，r_2，……，r_n 是n個相異代數數，且a_1，a_2，……，a_n 是n個代數數，則

$$a_1e^{r_1}+a_2e^{r_2}+\cdots\cdots+a_nr^n=0$$
$$\Rightarrow a_1=a_2=\cdots\cdots=a_n=0\text{。}$$

利用上面的定理與有名的尤拉公式，即可很快得證π是一超越數，尤拉公式是

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$$

特別是 $e^{i\pi}=\cos\pi+i\sin\pi=-1$。

因而$e^{i\pi}+1=0$，即$e^{i\pi}+e^0=0$；若π是代數數的話，則$e^{i\pi}$與e^0 的係數應是0；但事實不然，故只好π是超越數了。

5. π的數值計算的歷史（西方）

荷蘭數學家Adriaan Anthoniszoon（1527～1607）找到π的近似值355/113，這也是祖冲之在五世紀所發現的，這數值正確到小數點第六位。

上面這紀錄很快被Francois Viète打破，1593年他利用

$$\frac{2}{\pi}=\prod_{n=2}^{\infty}\cos\frac{\pi}{2^n}$$
$$=\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots\cdots$$

而計算π值正確到第九位。但同一年，Adriaen van Rooman（1561～1615）利用2^{30}（＝1,073,741,824）邊形而計算到第15位。三年後，這紀錄又被另一荷蘭人Ludolph van Ceuleu（1539～1610），他是Leyden 大學的數學與軍事學教授。在他的一篇論文中，他使用60×2^{33}邊形而得出20位數，在1615年他死後才發表的論文中，更計算到35位數。

十七世紀，隨著微積分的發明而可將π表成無窮級數與連分數。天文學家Abraham Sharp（1651～1742）利用反正弦級數而得到72位數；而在1706年John Machin（1680

～1752）利用兩反正切的差而計算到100位，而De Lagny（1660～1734）在1717年更加入27位。這127位的紀錄維持到1794年，這年Vega（1754～1802）利用尤拉新發現的反正切級數計算到140位，並指出De Lagny的計算數值的第113位是7而不是8。

1844年，Johann Martin Zacharias Dase（1824～1861）利用

$$\frac{\pi}{4}=\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{5}+\tan^{-1}\frac{1}{8}$$

與級數展開，計算π值到205位，而前面200位是正確的。而在這之前，1824年，Willian Rutherfold 計算到208位，但自第153位以後的數字跟Dase的不一樣。1847年，Thomas Clausen出版了248位的計算並肯定Dase的計算是對的。

計算π的旋風一直持續不斷，1853年，Rutherforl得到440位，1855年，Richter計算到500位，而1873～1874年Willian Shranks更添加到707位，他本人可能認爲這紀錄會維持一段時間，而事實上也是如此。但1945年，Ferguson發現Shranks 的計算從第527位有誤；而在1946年，他出版了620位數的，而在1947年，更延伸到710位，同一年更算到808位，這紀錄一直保持到1949年，緊接着是計算機時代的來臨。

十八世紀與十九世紀期間，計算π值的推進方式是以十、百來計，而進入二十世紀的計算機時代，則推進方式，則以千、萬來計，到1983年爲止，已計算π的值到16,000,000位，而計算所用時間如表1所示。

表1　邁入計算機時代，對於π的計算

年　　度	時　　間	位　　數	每位計算時間
1949	～70小時	2,037	～2　分
1958	100分鐘	10,000	0.6　秒
1961	8.43小時	100,000	1/3　秒
1973	23.3小時	1,000,000	1/12　秒
1983	＜30小時	16,000,000	＜1/155秒

參考資料

1. W. W. Rouse Ball and H. S. M. Coxeter, *Mathematical Recreations & Essays*.
2. Petr Beckmann, *A history of π*.
3. H. B. Griffths and P. J. Hilton, *Classical Mathematics*.
4. *Encyclopedic Dictionary of Mathematics*, The MIT Press.
5. *The Mathematical Intelligencer*, vol. 7, No. 3, 1985.