圍攻「集合論」

黃毅英

引 言

邏輯、集合、關係和映射均在不少地區中編入了大學入學試的範圍內。事實上，這些概念是從初等數學到高等數學的橋樑；然而也是大學預科學生最感頭痛的題目之一。

這困難的原因是多方面的。首先，教材之鋪排較爲抽象和符號化，不如幾何與微積分等容易找到圖像和實例。論證方面，則動輒搬出公設來，而又不似代數的可以作計算，這些都令學生大惑不解。

在參考書方面，不是太淺易就是過於深奧。集合嘛，一群羊、一班學生、一碗米……這便是集合；父子、朋友就是關係；人的高度、年齡等便是映射。這種描述，對於吸引初學者不無幫助，但對於運算與論證，就很難從這些粗略的觀念得到裨益了。

另一類其實是大學用書，它們從公設出發，處理集、等價關係、等價類、商集等都十分嚴謹，但是，大抵每個概念用一兩句說話，甚至一個定義就交代過去了。大家在看過證明或例題時，想找類似的問題演練，其數目就差幾等於零。這顯然就是初等數學與大學數學間的一道空隙。

事實上，集合論的發明在本世紀初，而它的打進大學以下的教程則是近十年的事，其安

排是否完善是亟待商榷的，而這一道空隙卻是急需填補。

反機械式的處理

在初等數學裏，大部份的內容都對學生並不陌生。比如三角和幾何，因有圖像的關係，學生覺得這種數學是「可以看見」的。至於代數，雖然有較多的符號，但大部份都是基於數字的四則運算，可以計算，故亦不會帶來多少的恐懼感，但集合論就絕然不同了。於是，不少同學就迴避瞭解個中的意義，而索性作機械式的代入。這種做法可能源於低年班時已不積極瞭解和思考。比如學過畢氏定理後，便只知找出所謂的 a、b、和 c 以求代入，甚至不去考慮「鄰邊」、「對邊」和「斜邊」的意義，甚至連三角形是否直角也懶得考慮，這便是機械式的處理了。

到學習較抽象的集合論時，由於全面的瞭解遭遇阻力時，機械式代入的吸引力更趨強烈，對概念的眞正意義似通非通，這種做法在初時會拖得過去，但漸漸，問題便會陸續出現了。

其實所謂瞭解一個概念，未必單指智性地去接受其定義。我們實可以從多個角度去探索其定義帶來的基本特性，比如學過了集合、元素和子集後，我們可以問：空集合 ϕ 與集合 $\{\phi\}$ 是否相符？它們各有多少個元素？——我們發覺 ϕ 沒有元素，但 $\{\phi\}$ 有一個，故不等。那麼，$\{\phi\}$、$\{\{\phi\}\}$ 各有一個元素，又是否相等？既然 $\phi\cup\{\phi\}=\{\phi\}$，$\{\phi\}$ 又是否等於 $\{\phi,\{\phi\}\}$……等。

當我們面對一條等式時，更可探究各集合裏面的是些什麼形式的元素，是數字呢？序對呢？還是集合？比如冪集裏的元素便是集合了，而商集的元素便是形如 a/R 的等價類。

我們還可以追索各元素的來源，譬如 R 是由 A 到 B 的關係，S 是由 B 到 C 的關係，$S\circ R$ 裏面的元素便是形如 (a,c) ⑴ 的序對，其中 $a\in A$，$c\in C$。如要證明 $(S\circ R)^{-1}=R^{-1}\circ S^{-1}$ 時，則知應由 $(c,a)\in(S\circ R)^{-1}$ 證起。又如 $f:A\to B$，$g:B\to C$，$h:C\to A$，則 $h\circ g\circ f(x)$ 是 A 內的東西，$h^{-1}f^{-1}g^{-1}[X]$ 則是 C 的子集。其中 X 亦應是 C 的子集。

就是這樣，我們從多方面的探討，便可對任何集合均能有更深的瞭解；而若在推算上逐步看看元素所在的位置，則能協助核對有否出錯。若在證明中，兩方集合內的元素不吻合時，出錯便可肯定了。

對付抽象

抽象是數學的一大特色，亦是其強處。不過，數學的抽象，也是不少同學感到恐懼的。要對付抽象的概念，首先要多利用繪圖作表示，還要回歸到實例中的根源，因為抽象的概念就是由這些實例提昇出來的。

在較淺白的參考書裏，我們找到不少的實例。比方說等價關係，就有數字的同餘、同奇偶；幾何上的全等，有同一投影；序對 (a,b)，(c,d) 之適合 $ad=bc$（分數的相等）等等一大堆。但對於較深的概念和等價類、商集等，則大多數的參考書再「不屑」舉出太多的實例了。但我們大可以充分利用以上的實例。比如問：對同餘這等價關係，1 的等價類是什麼呢？它的商集有多少個元？又如在證過商集是一劃分後，我們亦可將實例套入反覆研究。就以同餘來說，我們可以問：$1/R$ 和 $2/R$ 何以不相交呢？以模 3 的同餘而言，$1/R$ 與 $4/R$ 又何以可以相交呢？

在證明題目時，我們若將之化作較簡單的

⑴在一些文獻中，關係的定義為 (A,B,G)，其中 $G\subset A\times B$。今採取 $A\times B$ 的子集為關係的定義。

等價命題時，抽絲剝繭，則有助於瞭解個中原委。比如當證明 $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$ 時，我們知道只須證明 $x\in A\cup(B\cap C) \Longleftrightarrow x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$ 就夠了。這實質便是利用了邏輯運算中之分配律。故此，集合論的分配律，通過建立等價命題的方式，借助邏輯上的分配律便可證明了。

又例如，要證明對於 A 的等價關係 R，商集 A/R 是一分割時，我們亦可仔細分析，就知必須證明兩件事：一所有 A 內的元素必存於某一 a/R 內；二 a/R 與 b/R 若不相等，則不會相交。對於第一件事，任一元素 a 必存於自身的等價類 a/R 內，這是由於反身性之故。至於第二件事，若 $a/R\cap b/R\neq\phi$，則有 $x\in a/R\cap b/R$，由 xRa 與 xRb 得知 aRb 而得到到 $a/R=b/R$，這是遞移性之故。

就是這樣，要證明命題甲，原來只須證明較簡單的命題乙；而證乙則要證丙等等……層層剖釋，原先的命題甲就不難得出了。

再舉一例：對於 $f:A\to B$ 及 $X\subset A$，證明 $X\subset f^{-1}[f[X]]$。我們先作多角度分析：X 是 A 的子集，$f[X]$ 是 B 的子集，$f^{-1}[f[X]]$ 則再是 A 的子集了。要證明 $X\subset f^{-1}[f[X]]$，應在 X 取出任意元素 x 出發，設法證明它必在 $f^{-1}[f[X]]$ 中。建立等價命題：要證 $x\in f^{-1}[f[X]]$，即要證 $f(x)$ 在 $f[X]$ 中，x 既存於 X，則 $f(x)$ 存於 $f[X]$ 乃無可置疑了。

集合恆等式的證明

以上陳述有關集合的證明，所涉及的集合是有特定意思的。比如 $f[X]$ 便不是一般的集合。對於形如

$$(A\Delta B)\setminus(A\cap C)$$

$$=((A\cup B)\setminus(A\cap B))\setminus((A\cap C)\setminus B)$$

等涉及任意集合 A、B、C 的恒等式，我們是可以用維恩圖（Venn diagram）求證。若認爲維恩圖只屬於一種示意圖，不夠嚴格，我們是可以用分配律、狄摩根律等從右邊逐步推到右邊。但這種方法是甚爲繁複的。

以下介紹的方法，是用了維恩圖的意念，而又十分嚴格的，我們發現維恩圖證題的原理是將集合分成各個區域（region）去考慮，而邏輯證明上的眞值表有着異曲同工之妙。以上式爲例，我們先用定義除去 Δ 及 $\setminus$。左邊即爲

$$((A\cap B')\cup(B\cap A')\cap(A\cap C)'$$ (2)

右邊即爲

$$((A\cup B)\cap(A\cap B)')\cap((A\cap C)\cap B')'$$

要證明左邊等於右邊，只須證明 $x\in$ 左邊 $\Longleftrightarrow x\in$ 右邊。若以 p、q、r 分別表以下命題

$$p\equiv x\in A$$
$$q\equiv x\in B$$
$$r\equiv x\in C$$

即須證

$$((p\wedge\sim q)\vee(q\wedge\sim p))\wedge\sim(p\wedge r)$$
$$\equiv((p\vee q)\wedge\sim(p\wedge q))\wedge\sim((p\wedge r)\wedge\sim q)$$

用眞值表即可證得。

邏輯的陳述

邏輯學的學習目的，除了爲了建立集合運算外，最主要是能協助我們達至一個合理的推演和陳述。比方說

$$\sin X=\frac{1}{2}=30^\circ$$

這種學生常見的謬誤便是一種不合理的計算答案方式。又例如

(2)於此，假定 $A,B,C\subset X$ 而 M' 表 $X\setminus M$。

$$\begin{cases} x+\ \ y+\ \ z=4 & \cdots\cdots\cdots\cdots ① \\ 2x+3y+\ \ z=6 & \cdots\cdots\cdots\cdots ② \\ x-\ \ y+3z=7 & \cdots\cdots\cdots\cdots ③ \end{cases}$$

$\therefore 2x+4y=5$

則是一種不清的陳述。旁人難以瞭解 $2x+4y=5$ 是由 $3\times$①－③而來的。在獲得求出答案的方法後，有條理的舖排和合乎邏輯的陳述是相當重要的。首先，我們必須將前後兩句或式子用適當的符號（如＝、⇒、⟺等）加以連貫。如

$$(x+1)^2+8x+23$$
$$=x^2+2x+1+8x+23$$
$$=x^2+10x+24$$
$$=(x+4)(x+6)$$

而，

$$(x^2+1)+8x+23=0$$
$$\Longleftrightarrow x^2+2x+1+8x+23=0$$
$$\Longleftrightarrow x^2+10x+24=0$$
$$\Longleftrightarrow x=-4 \text{ 或 } -6$$

；還有，我們應在適當的地方加上解釋或自己的意圖，比方說求穿過（0，0），對於圓 $(x-a)^2+y^2=b^2$ 切線的方程：

$$y=mx$$
$$(x-a)^2+(mx)^2=b^2$$
$$(1+m^2)x^2-2ax+a^2-b^2=0$$
$$a^2=(1+m^2)(a^2-b^2)$$
$$\frac{a^2}{a^2-b^2}-1=m^2$$
$$m=\pm\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

則毫不清楚了，其實，他的意思是：

設切線方程爲 $y=mx$，

代入圓的方程中，得

$$(x-a)^2+(mx)^2=b^2$$
$$\Longleftrightarrow (1+m^2)x^2-2ax+a^2-b^2=0$$

判別判別式＝0，故

$$a^2=(1+m^2)(a^2-b^2)$$
$$\Longleftrightarrow \frac{a^2}{a^2-b^2}-1=m^2$$
$$\Longleftrightarrow m=\pm\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

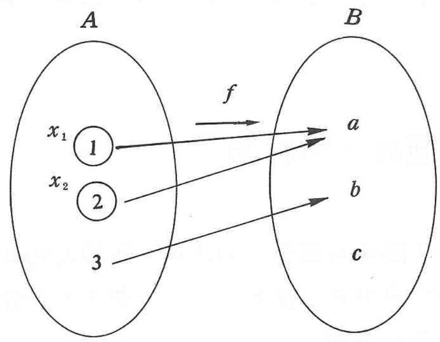
在代數裏，我們若想試驗推演有否錯誤，可將一些特定數字代入，如

代 $n=1$

$((n+1)^2+3(n-2)^2)^2$	49
$=(n^3+2n+1+3n^2-12n+12)^2$	49
$=(4n^2-10n+13)^2$	49
$=16n^4+100n^2+169-80n^3+260n+104n^2$	569
$=16n^4-80n^3+204n^2+260n+169$	569

故知。第三步錯了。這種方法，對集合論一樣適合，在推算的過程中，我們可以用眞值表或維恩圖去驗證。對於映射的推算，我們依舊可代入一些特定的函數；但由於對射（bijection）是比較「完美」的，我們可以代入一些非單射（not injective）或非蓋射（not surjective）的映射驗證。茲舉一例如下：

證明： 對於 $f:A\to B$ 及 X_1，$X_2\subset A$，$f[X_1]\cap f[X_2]\subset f[X_1\cap X_2]$。我們考慮 $A=\{1,2,3\}$，$B=\{a,b,c\}$，$f:A\to B$ 爲非單射 $f(1)=f(2)=a$，$f(3)=b$，又設 $X_1=\{1\}$，$X_2=\{2\}$，從圖中可見 $f[X_1\cap X_2]=f[\phi]=\phi$；$f[X_1]\cap f[X_2]$



$=\{a\}\cap\{a\}=\{a\}$，故式子肯定是錯的了，但錯在那裏呢？讓我們分析以下的「證明」：

	用以上的例
$y\in f〔X_1〕\cap f〔X_2〕$	設 $y=a$
$\Rightarrow y\in f〔X_1〕\wedge y\in f〔X_2〕$	$y=a$
$\Rightarrow y=f(x)$，$x\in X_1$	$y=f(1)$，
$\wedge\ y=f(x)$，$x\in X_2$	$y=f(2)$，
	$1\neq 2$
$\Rightarrow y=f(x)$，$x\in X_1\cap X_2$	
$\Rightarrow y\in f〔X_1\cap X_2〕$	$X_1\cap X_2=\phi$

可知，錯在第二步，我們只能推出

$$y=f(x)\,,\ x\in X_1\wedge y=f(x')\,,\ x'\in X_2\,,$$

而不能斷定 $X=X'$ 。

這種做法不只能測出邏輯上的謬誤，亦是製造反例的最佳方法。

完整定義問題

在集合論的題目常有要求證明某映射（或集合）是完整的定義了（well-defined）。這本來是個極有趣的問題。比如說，定義 $f(x)$ 作 x^2+1 ，$f(x)$ 又那會有定義不完整之理呢？問題之出現是來自隱（implicit）定義的方式，例如

1. 已知 $f:A\to B$，對於任一 $b\in B$，定義 $g(b)$ 爲 a，其中 $f(a)=b$。這裏，若 f 非蓋射，即有些 b 非形如 $f(a)$，故 $g(b)$ 便沒有定義了。
2. 定義 $y=f(x)$ 如下：
   $$\cos(xy)+\sin(x+y)=3 。$$
   這裏，左邊最大是 2，故不可能等於 3。故根本找不到適合上式的 x，y。
3. 對於兩集 A，B，取 B 中之任意元素 b_0，定義 $f:A\to B$ 作恒常映射（costant mapping）：$f(a)=b_0$，$\forall a\in A$。但若 $B=\phi$ 時，此映射便沒有定義了。

另一類需要處理完整定義的是涉及等價關係的商集。若 R 是集 A 中的等價關係，在定義 $f:A/R\to B$ 時，我們須測看 f 與 R 是否相容（compatible）。比如對於模 3 同餘的等價關係，若定義 $f(a/R)=a^2+1$ 則不可能了。

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\eta"] \arrow[dr, "\hat{f}"'] & A/R \arrow[d, "f(?)"] \\ & B \end{tikzcd}$$

因爲 $1/R=4/R$，而根據上式，$f(1/R)$ 和 $f(4/R)$ 卻分別是 2 和 17 。這就好像定義整班的高度。對於每一班學生，我們任意抽出一位同學，量一量其高度，便叫這高度作爲全班的高度。現小明與大明同於中三甲班，他們的高度分別爲 1.5 米和 1.7 米，究竟我們應把中三甲的高度定作 1.5 米關是 1.7 米呢？

這問題就等於已有 $\hat{f}:A\to B$ ，問是否存在 $f:A\to B$ 使得 $f\circ\eta=\hat{f}$，其中 $\eta:A\to A/R$ 爲自然蓋射（natural surjection）。其充要條件便是

$$aRb\Rightarrow\hat{f}(a)=\hat{f}(b) 。$$

將這問題稍爲轉變便可得到下圖：已有等價關係 $\hat{R}$ 與自然蓋射 $\eta:A\to A/\sim$，$\iota:B\to B/E$，其中 $\eta(a)=a/\sim$，$\tau(b)=b/\equiv$；問是否有 R 使得

$$aRb\Rightarrow\eta(a)\,\hat{R}\,\tau(b) 。$$

這就好像定義「友班」的問題。從兩班中任意各取一人，若兩人爲朋友，則稱該兩班爲友班。若兩人不和，則稱「非友班」。今大明與小明同於三甲班、大華與小華則同於三乙班。大明和大華是好友，小明和小華則不友好，那麼，究竟三甲和三乙是友班呢還是非友班呢？故此種定義並不完整，除非同班同學的意見一致

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "R"] \arrow[d, "\eta"'] & B \arrow[d, "\tau"] \\ A/\sim \arrow[r, "\hat{R}(?)"] & B/\equiv \end{tikzcd}$$

---

(3)即前序加上反對稱，即

$$x\hat{R}y\wedge y\hat{R}x\Rightarrow x=y 。$$

，即

$$a \sim a' \wedge b \equiv b' \wedge a\widehat{R}b \Rightarrow a'\widehat{R}b'$$ 。

今再舉一例以說明：

集A內一關係R若反身（reflexive）及遞移（transitive），則稱之爲前序（pre-order）。設R爲A之一前序。於A定義～如下：

$$x \sim y \text{ 當且僅當 } xRy \text{ 及 } yRx$$

證明～爲等價關係。

再於$A/\sim$中定義R如下：

$$(x/\sim)\widehat{R}(y/\sim) \text{ 當且僅當 } xRy。$$

證明$\widehat{R}$的定義完整且爲一次序[3]。

要證明定義完整即要證。

$$y \sim x' \wedge y \sim y' \wedge yRy \Rightarrow x'Ry'$$ 。

結　語

一個較佳的學習集合論的方式可能是先於較低班時先有第一次的接觸，對集合論的基本概念和發展歷史有所認識，到預科時才作較嚴格的論證（螺旋式教學）。由於學生在學習上遭遇的困難，不少亦是當初數學發展時遇到的難題，數學史家指出：透過學科發展的重演（對發展史的認識）有助於瞭解建立理論之動機、其應用和續漸系統化和公理化的過程。瞭解集論的發展，我們可以明白將一切用集合表達的理由，將序對(a, b)硬寫成$\{\{a\},\{a,b\}\}$，$f: A \to B$定義成(A, B, G)，0定義成ϕ，1定義成$\{\phi\}$，2定義成$\{\phi,\{\phi\}\}$……，以及$Z=\{(0, x): x \in Z^+\} \cup \{\phi\} \cup \{(1, x): x \in Z^+\}$，$Q=(Z \times Z \setminus \{0\})/\sim$（$(a, b) \sim (c, d)$，若$ad=bc$）等的背景。無論如何，集合論的發展和第三次數學危機本身就是件極有趣味的歷史威脅。

参考書目

1. N.Y. Wong, Set Theory as a Language, *Hong Kong Science Teachers' Journal* (8) 1980.
2. N.Y. Wong, Some More Applications of the Truth Tables, *Mathematic Bulletin* (9) 1985.
3. N.Y. Wong (Exam phobiac), Hints to getting Higher Scores in A.L. Pure Mathematics Examinations, *Mathematics Bulletin* (11) 1986.
4. N.Y. Wong, The First Lesson in Set Language, *Mathematics Bulletin* (13) 1987.
5. 黃毅英，數學之解難技巧，東方日報 1987 年 8 月 2 日。
6. 黃毅英，學習數學的歷程，東方日報 1987 年 9 月 2 日。
7. 黃毅英，再不懼怕抽象，東方日報 1987 年 10 月 2 日。
8. 黃毅英，圖像與意念，東方日報 1987 年 11 月 2 日。
9. 黃毅英，數學學習過程中之觸類旁通，數學傳播，十一卷四期，民 76 年 12 月。
10. 黃毅英，數學之驗證，數學通報，十五卷，1988 年
11. 黃毅英，眞值表在證明集論等式上之應用，數學傳播，十二卷二期，民 77 年 6 月。
12. M.K. Siu & F.K. Siu. History of Mathematics and its relation to Mathematics Education, Int. J. Math. Ed. Sci. Technol (10) 1979.

—本文作者任職於香港數理教育學會—