

# 數學概念漫談

戴久永

數學在國內各級學校的授課時數不可謂不多，但是學生的學習效果不理想却是有目共睹的事實。數學可說是許多學生最感頭痛的學科之一。他們認為數學內容枯燥乏味，艱澀難懂，却又不得不學，只好硬著頭皮應付。這種痛苦的學習經驗使得人人雖都知道「數學是科學之母」，但是却又多抱著「敬鬼神而遠之」的態度，對於「科學生根」實在是重大的無形障礙。

提起數學，一般人大多立即聯想到繁複的計算和解題技巧，似乎除開計算，數學不再有其他內涵。事實上，數學的內涵原本非常豐富，學校的數學課程因為受到教學時數的限制，其內容僅為數學的一小部份，同時為了系統化

，犧牲了引起動機的部份。其實數學並不是一種絕對科學（exact science），它所依據的是「直覺」。例如一項概念的指出，如果不先從文化方面去了解它是如何產生和為何產生的，那麼學生對數學不是感到沮喪和厭惡，就是把它當成教條而承受下來，成為偏狹的專業人員。這些人員對於數學的運算雖然表現得驚人，但對數學的意義和其與文化的關係，却毫無所知。固然並非所有上數學課的學生都想把數學當成他（她）們的終生事業，但是每個學生却都應該對數學有所瞭解，因為數學是人類心智的結晶，文化遺產中重要的一環，對數學一無所知，無疑是身為現代知識份子的一大缺憾。

筆者雖然是數學系畢業，但是却對文史十

分偏好，多年來的體驗，發現在文學上有許多概念與數學概念相通，不敢私自珍藏，套一句廣告辭：「好東西應與大家分享。」因此以野人獻曝的心情，敘述如下，由於文屬「漫談」，或有說理不夠嚴謹之處，敬請多多包涵。

## 由具體至抽象

數字的概念是經由具體至抽象的符號，數學的概念也是由具體的現象中提煉出來的，例如機率理論中的二項分布就是描述諸如成敗、良品與不良品、男女、生死的機率。在文學上也有相似的情形，「一語雙關」常是具體與抽象的結合。據說我國書聖晉朝的王羲之，年輕時對於書法十分著迷，不斷臨模各名家筆法，連睡覺也不例外，常不自覺地以妻子身體為「紙」，自己手指為「筆」來練字，他的太太被他打擾得覺也睡不好。有一次王妻實在忍不住了，忿忿地說：「人各有體。」意思是說，你要練字就在自己「身體」寫，不要打擾我的睡眠，王羲之聽到這句話，猛然醒悟，每個人都有自己的「字體」，何必一定要臨模他人而不自創自己風格的字體呢？因而努力自創一格，終於成為一代書法名家。在這個傳說中，身「體」與字「體」就是由具體至抽象的一個有趣實例。

## 定義的重要性

在數學課本中，每當要導入一個新概念的時候，必然會先對一些新名詞下個定義，這個動作十分重要，否則容易造成溝通不良的情形。我們首先來欣賞一則「故事」；有一位雲水行腳的僧人，聽說某禪寺的住持禪門工夫很深，很想和他較量一番。當他到達時，適逢禪師外出。侍者沙彌出來接待。「有什麼事我可以代勞？」雲水僧說：「你年紀太小，不是談禪的對手。」小沙彌說：「年紀雖小，智慧不少。」雲水僧一聽，覺得也有道理，想先和沙彌

打一個禪機。雲水僧用手指比了一個小圓圈，向前一指。侍者攤開雙手，劃了一個大圓圈。雲水僧豎起一根指頭，侍者豎起五個指頭。雲水僧再豎起三根指頭，侍者用手在眼睛上比了一比。

雲水僧大驚，誠惶誠恐地跪下向沙彌頂禮三拜，掉頭就走。他心中想著：「我比了個小圓圈，向前一指，問他胸量有多大，他攤開雙手劃了個大圈，說他的心有虛空那麼大。我伸出一指問他自身如何？他伸出五指說他奉行五戒不亂殺，不亂吃，不亂盜，不亂說，不亂淫。我再伸出三指問他三界如何？他指指眼睛，說三界就在他眼裏。一個侍者就已有如此高深的禪風，他師父的修行必定更為不可思議。」

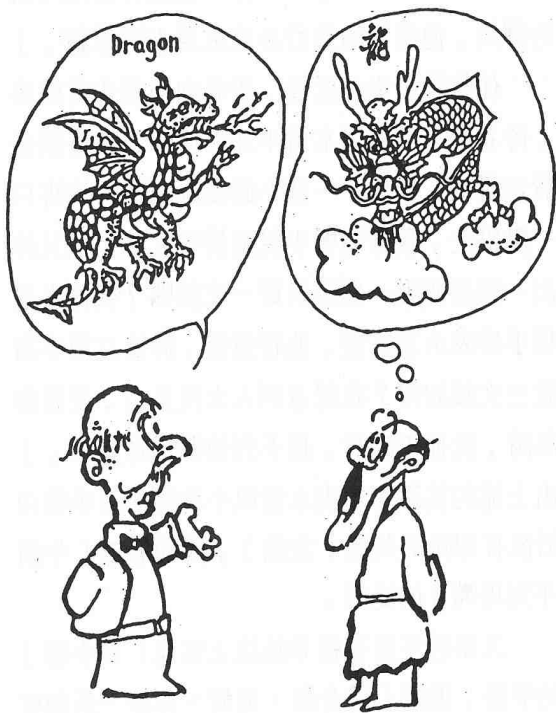
住持禪師向外返寺，侍者向他報告這件事。侍者說：「那雲水僧不知如何知道我俗家是賣燒餅的，他比了一個小圓圈說我家的燒餅只一點點大，我攤開雙手說燒餅很大唷。他又伸出一根指頭說一個燒餅賣一文錢嗎？我伸出五根手指表示五文錢。他想還價，伸出三根手指說三文錢如何？我想這個人太沒良心，便指指眼睛，說他不識貨，想不到他嚇得逃走了。」由上述的笑話可知雲水僧與小沙彌所用手勢由於沒有相同的共識（定義），因而形成「牛頭不對馬嘴」的局面。

又如近年來在報章雜誌上常見「四小龍」的字樣，美國人稱台灣、南韓、香港、新加坡為亞洲四小龍，而我國尤為龍首，報上常以此引為自豪，筆者認為這是天大的誤會，問題出



在文化上的認知，換句話說，中西的「龍」的定義不同。我們將英文中的 dragon 翻譯為「龍」，而事實上，如果查一下英文字典可知 dragon 的意思是「傳說中會噴火而且長有翅膀的怪獸。」而中國的龍則是「長的鱗蟲，與麟、鳳、龜合稱『四靈』。比喻聖哲及高出衆人之上的人士，比喻帝王。」因此嚴格的說，二者是截然不同的。對於西方的龍，凡是愛看狄斯奈卡通的人在「睡美人」中必定見識過。

西洋「龍」非中國「龍」



事實上，美國人稱台、韓、港、新為「龍」或「虎」並非讚譽而是批評，因為這些國家（或地區）的產品湧入美國市場之後，固然使消費者買到廉價的產品，但在另一方面，却也造成許多美國產業因競爭不過而倒閉，造成許多失業問題，同時也使美國成為負債的國家。據報導，美國Hudson Institute的一項民意調查顯示，有百分之四十六的美國人認為「台灣是工作的威脅」的事實就可知龍是代表「威

脅」。

## 有限與無限

有限與無限的概念在文學上也有類似的記載。大概許多人都曾經聽說過「愚公移山」的故事，山的體積固然很大，但是沙石泥土剝過不會再生，如果愚公的子子孫孫能不斷繁殖，而且願意遵守老祖宗的遺命來從事移山的工作，則這是一個以愚公子孫的「無限」來應付山的「有限」，必然會有剝產大山的一天，雖然那可能是十分久遠以後的未來了。

另外，我國神話說月亮中有一位吳剛被罰砍伐桂木，如果能砍倒桂木則可獲得自由。然而這棵桂木却十分神奇，每當斧頭離身之後，被砍的地方立即又完全癒合，看來吳剛先生非自力救濟，拒絕工作，否則只好承受「無限」的折磨了。希臘神話中也有類似的故事，希臘神祇中有一位名叫普羅米修斯(Promethues)，見到人類過著黑暗的日子，因而自天上盜火給人類，天王宙斯(Zeus)大為震怒，令部下將他釘在一個山涯邊，並且令一隻神鷹啄破他的胸膛，吃食他的肝脾。但是第二天受傷的部位又完全長好，神鷹又來啄食，令他遭受日復一日無限期的痛苦。

## 模式應用

數學模式的應用必須特別注重假設條件是否確實滿足，否則隨便套用的結果必將是GIGO (garbage in, garbage out)。在過去人們把數學視同真理，如今才知道數學是有其先決條件的。

從前有個人與朋友出遠門，經過一處叢林，他的朋友所帶東西不慎落在草地上，一時找不到，朋友在東西掉落的大略位置的樹枝上掛下一條帶子，做為尋找的中心，結果果然在附近找到了。他對朋友的聰明非常佩服。有一次

他要坐船過江辦事，在途中不慎把一柄劍掉到江中。當時他因為急於要達目的地，沒有立刻找人跳下水去尋所失的劍，而是「仿效」他的朋友的方法，用利器在船舷刻上一個記號，記認墜劍的地方，想等待辦完了事，才憑著船舷上的記號找人潛下水裡尋找那柄失劍。這個人，在墜劍處刻著記號，以為這個辦法很聰明，可以憑著記號把失去的劍尋回，結果是當然不會找到的。因為渡江的小舟不停地移動，而不像大樹是固定不動的，因此他用朋友的找東西「模式」就不可行了。這是著名的「刻舟求劍」的成語。下面我們來談另一個刻舟的「曹冲秤象」的故事。

在微積分中求面積或體積的方式是將所欲計算的面積或體積分成許多小方塊而後相加的和即為近似值，當方塊分得越細，所得近似值與真值越接近。各位或許曾經聽過「曹冲秤象」的故事，有人送曹操一頭大象，曹操對大象的體重很感興趣，可是却没有秤那麼大動物的秤，他的小兒子想出了將象牽到船上，而後在船邊刻上吃水的深度，然後再搬上許多沙石，直到沙石的重量與象重相同為止，也就是沙石使船吃水的深度與載象相同刻度為止。其次再分次秤沙石重量，總和就等於象重。曹冲利用「同義」(equivalent)的數學概念將不可分秤的大象轉換為可分次秤的沙石，確實是聰明之舉。

## 其他

我國成語故事中還有如「烏頭馬角」是空集合的概念。事出於燕太子丹在秦國為人質，

他想要回國，秦王說「烏鴉白頭與馬生角，則放你歸國。」表示不可能，因為那是一個空集合。另外我們也可用成語轉彎罵人，非常符合梁實秋先生主張的罵人不帶髒字的「原則」。有一則笑話說，甲將其大作交給其國文老師批改，老師在其文後批著「六竅已通」四個字，甲生大喜，乙生看了却說：「且莫高興太早，請問人有幾竅？」甲生不假思索，脫口而出：「當然是七竅。」再想一下，才恍然大悟，原來老師的本意是文章「一竅不通」。另一個笑話說，某人笑他的暴發戶朋友只會講究排場，給他的朋友一張字條，上面寫了四個字，(if and only if)。他的朋友看得莫名其妙，原來他的本意是說他的朋友為「衣服 and only 衣服」，除了衣服為名牌之外，腦子却空空如也，並沒有什麼內涵。

閒扯了許多「廢話」，還是趕快結束吧！不過筆者個人淺見認為如果在學習數學時，能設法將數學概念與文化「掛鉤」，或許會增加許多學習上的趣味，也就不會對數學過於排斥了，不知您以為如何？

—— 作者現任教於交通大學工業工程  
與管理系 ——