項武義先生演講一

平行與三角(上)

(Parallelism and Trigonometry)

時間：77年6月23日　　地點：臺灣大學舊數館301室

在空間的各種各樣幾何圖形之中，至精至簡者首推三角形。由此可見，歐氏幾何學以研討三角形的幾何性質爲其樞紐，實非偶然！再者，在歐氏空間的三角形的諸多性質中，最爲基本者有二，即內角和恒爲一平角與三角形的兩邊一夾角（SAS）疊合條件；它們分別是空間的**平行性**和**對稱性**在三角形上的具體表現。從定量幾何的解析觀點來看，三角形的基本結構在於它的三邊、三角之間的函數關係，這也就是大家所熟知的正弦、餘弦定律。其實，三角學就是三角形的解析幾何，而上述兩個三角定律則是整個解析幾何的“基因”（Genetic codes）所在。

和歐氏空間具有同樣的高度對稱性（亦即對於任給方向皆具有反射對稱性）的空間尙有**球空間**（spherical spaces）和**雙曲空間**（hyperbolic space）；後者也就是通常叫做非歐空間（Non-Euclidean space）者也。在球空間或雙曲空間中的三角形，也具有同樣的S.A.S.疊合條件，但是三角形的內角和則不再是一個平角，而是在前者恒大於一平角；在後者則恒小於一平角。本章將以“求同存異”的處理方式，以歐氏、球和雙曲這三種空間所共有的對稱性（亦即三角形的疊合性）爲基點，對於這三種空間的幾何作系統的比較分析，我們所要研討的中心課題就是三種幾何中的三角定律。**絕對幾何學**（absolute geometry）的創始人János Bolyai 所發現的統一正弦定律說；三種空間的正弦定律可以劃一地敍述如下：

$$\frac{\mathrm{Sin}\,A}{\odot a}=\frac{\mathrm{Sin}\,B}{\odot b}=\frac{\mathrm{Sin}\,C}{\odot c}$$

其中$\odot a$ 表示空間中以 a 爲半徑的圓周周長。本章將用抽象旋轉面的解析幾何來對於三種幾何的三角學給出統一的討論，這種統一的論證也給上述三種幾何的存在性和唯一性提供了簡單明確的研討與論證。

平行公設是歐氏幾何中的一個精微之點。自歐氏（Euclid, 300 B.C.）的幾何原本（Elements）問世以來，一直到十九世紀非歐幾何學的發明，“平行公設的眞諦何在”乃是一個困擾幾何學界二千多年的基本問題，這個耐人尋味的問題當然也是本章所要研討的主題

之一。

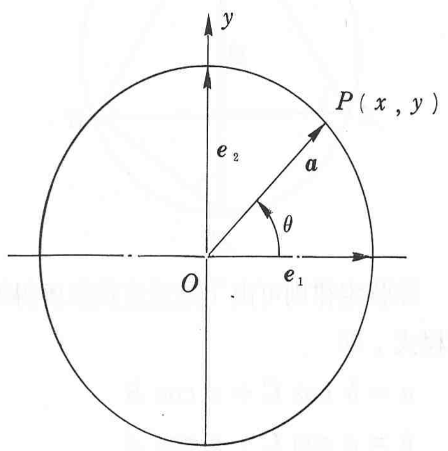
第一節　歐氏三角與球面三角

(Euclidean trigonometry and spherical trigonometry)

三角形是歐氏空間中最爲簡單基本的事物；三角形的幾何性質則是歐氏幾何學的基礎所在。再者，在它的諸多性質之中，最爲基本的就是內角和恒爲一平角與兩邊一夾角（SAS）疊合條件；從定量的解析觀點來看，它們就是三角形的三邊、三角之間的函數關係。這也就大家所熟知的三角學中的正、餘弦定律。

在球面上並非對頂（non-antipodal）的兩點之間，存在着唯一的一條最短通路，它就是過這兩點的大圓的劣弧。設A、B、C是球面上不具對頂位置的三點，則連結A、B；B、C；C、A的大圓劣弧就圍成一個球面三角形。球面三角形也有同樣的兩邊一夾角（SAS）疊合條件，但是它們的內角和則恒大於一平角。本節將先對歐氏三角學作一簡短的回顧；然後再用上一章第五節所建立的向量代數來研討球面三角學。

(一)三角函數(trigonometry function)



如上圖所示，$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$是平面上一對選定的正交坐標架，P點是以原點爲圓心的單位圓上的動點，θ是向量$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OP}$和$\boldsymbol{e}_1$之間的夾角（以弧度爲單位）。則有$P$點的坐標：

$$x=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}_1=\cos\theta,\quad y=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}_2=\sin\theta。$$

由此可見，$x=\cos\theta$，$y=\sin\theta$ 乃是單位圓的最自然的參數表達式；換句話說，正、餘弦函數就是單位圓最自然的一對描述函數，而它們的基本性質其實就是單位圓Γ的幾何性質的函數形式的表現，例如：

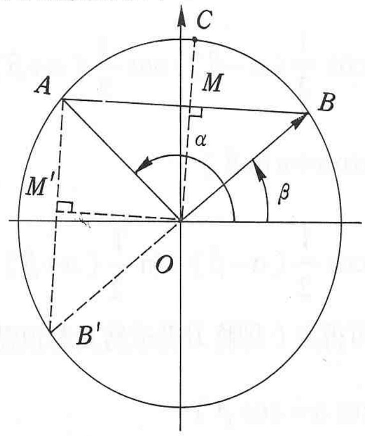
(i) $|\overrightarrow{OP}|\equiv 1 \Longleftrightarrow \cos^2\theta+\sin^2\theta\equiv 1$

(ii) Γ對於 x-軸的對稱性

$\Longleftrightarrow \cos(-\theta)=\cos\theta$,

$\sin(-\theta)=-\sin\theta$。

(iii)**和角公式**乃是Γ的**旋轉對稱性**的直接推論。茲說明如下：



如上圖所示，α、β分別是$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$ 的幅角，亦即A、B的坐標分別是：

$(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$和$(\cos\beta,\ \sin\beta)$。

由Γ的旋轉對稱性易見$|\overrightarrow{BA}|^2$和$\triangle OBA$的有向面積只和$(\alpha-\beta)$的值有關，亦即它們都是$(\alpha-\beta)$的函數，即有

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{BA}|^2&=(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2=f(\alpha-\beta)\\&=(\cos(\alpha-\beta)-1)^2+\sin^2(\alpha-\beta)\end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ \cos\beta & \sin\beta\end{vmatrix}=g(\alpha-\beta)$$

$$=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}\cos(\alpha-\beta) & \sin(\alpha-\beta)\\ 1 & 0\end{vmatrix}$$

開展上述兩式即得和角公式：

$$\begin{cases}\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\\ \sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha\end{cases}$$

(iv) **和差化積公式**乃是Γ對於每一直徑皆成**反射對稱**的直接推論，茲說明如下：

令M爲$\overline{AB}$的中點，則射線OM是$\angle BOA$的分角線，亦即它和Γ的交點C的坐標是

$$\left(\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta),\ \sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\right)。$$

再者，由$\overline{OM}\perp\overline{AB}$可見$\overrightarrow{OM}=\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\cdot\overrightarrow{OC}$。改用坐標形式表達即有

$$\frac{1}{2}(\cos\alpha+\cos\beta)=$$

$$=\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\cdot\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta),$$

$$\frac{1}{2}(\sin\alpha+\sin\beta)$$

$$=\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)。$$

同理亦可得出（即將B點改爲其對頂點B'）

$$\frac{1}{2}(\cos\alpha-\cos\beta)$$

$$=\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\cos\frac{1}{2}(\pi+\alpha+\beta)$$

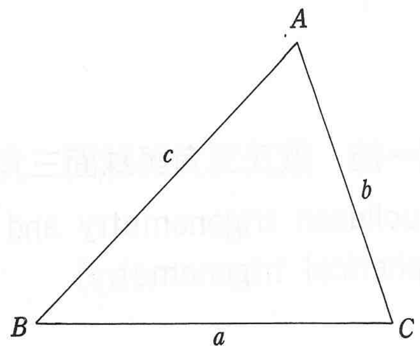
$$=-\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$$

$$\frac{1}{2}(\sin\alpha-\sin\beta)$$

$$=\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\sin\frac{1}{2}(\pi+\alpha+\beta)$$

$$=\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)。$$

(二)歐氏三角定律(laws of trigonometry)



設$\triangle ABC$爲歐氏空間的一個任意三角形，通常就以A、B、C表示其三個內角角度，以a、b、c表示其三個對邊邊長。衆所週知的正弦、餘弦定律則是三角形的上述三角、三邊這六個基本變量之間的基本函數關係，即爲

正弦定律（歐氏）：

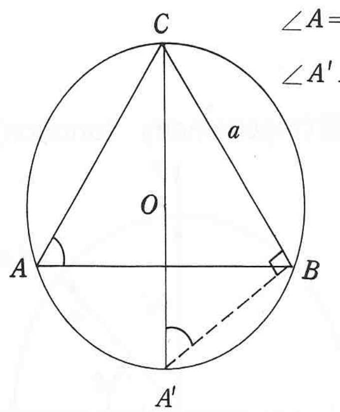
$$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}\left(=\frac{1}{2R}\right),$$

$R=$外接圓半徑。

餘弦定律（歐氏）

$$\begin{cases}a^2=b^2+c^2-2bc\cos A,\\ b^2=c^2+a^2-2ca\cos B,\\ c^2=a^2+b^2-2ab\cos C。\end{cases}$$

證：正弦定律可以由同弧所對的圓周角相等和下圖推得。



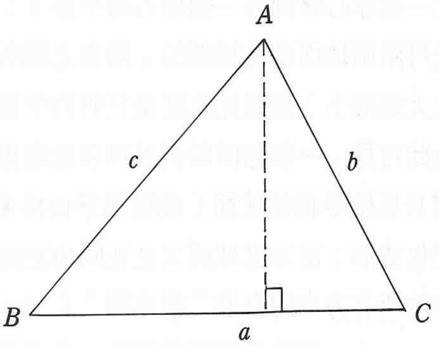
$\angle A=\angle A'$,

$\angle A'BC=\frac{\pi}{2}$。

餘弦定律則可由下述垂直投影所得的聯立方程式，即

$$a=b\cos C+c\cos B$$
$$b=a\cos C+c\cos A$$
$$c=a\cos B+b\cos A$$

求解而得。



其實，上述簡樸的三個基本關係業已構成一組足以推導所有三角形六個基本變元之間其他函數關係的基礎。例如由它們可以聯立求解 $\cos A$，$\cos B$，$\cos C$，即得餘弦定律，再作下述計算，即

$$\frac{\sin^2 A}{a^2}=\frac{1-\cos^2 A}{a^2}=\frac{1}{4a^2b^2c^2}\left[4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2\right]$$

$$=\frac{1}{4a^2b^2c^2}\cdot\left[-(a^4+b^4+c^4)+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\right]$$

因爲上式右端是 a、b、c 的對稱式，所以

$$\frac{\sin^2 A}{a^2}=\frac{\sin^2 B}{b^2}=\frac{\sin^2 C}{c^2}\left(=\frac{1}{4R^2}\right)$$

這也就說明了正弦定律乃是餘弦定律的代數結論。

$S.S.S.$ 疊合條件說明三角形的三邊邊長業已確定其形狀大小，所以它的其他各種幾何量都應該可以用三邊邊長加以表達。

【例 1】令△爲△ABC 的面積，則有

$$\triangle^2=\frac{1}{4}b^2c^2\sin^2 A=\frac{1}{4}b^2c^2\left[1-\cos^2 A\right]$$

$$=\frac{1}{16}\left[4b^2c^2-(-a^2+b^2+c^2)^2\right]$$

$$=s(s-a)(s-b)(s-c),$$

$$s=\frac{1}{2}(a+b+c)。$$

亦即 $\triangle=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$。

再者 $\triangle=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}abc\left(\frac{\sin A}{a}\right)$

$$=\frac{abc}{4R},$$

亦即 $R=\frac{abc}{4\triangle}$。

【例2】

如下圖所示，O 點是△ABC 的三條內角平分線的共交點，亦即其內切圓的圓心。D、E、F 分別是內切圓和 a、b、c 邊的切點，r 爲其內切圓的半徑。由切線長相等即有 $\overline{AE}=\overline{AF}=x$，$\overline{BD}=\overline{BF}=y$，$\overline{CD}=\overline{CE}=z$ 和聯立方程式：

$$x+y=c,\quad y+z=a,\quad z+x=b$$

解之即得

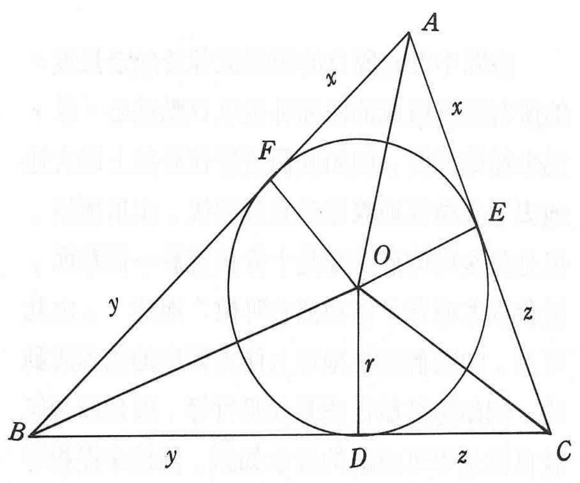
$$x=s-a,\quad y=s-b,\quad z=s-c$$

再者，不難看出

$$\triangle=r\cdot s\Rightarrow r=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

由此即得正切的半角公式

$$\begin{cases}\tan\dfrac{A}{2}=\dfrac{r}{x}=\sqrt{\dfrac{(s-b)(s-c)}{s\cdot(s-a)}}\\[2ex]\tan\dfrac{B}{2}=\dfrac{r}{y}=\sqrt{\dfrac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}}\\[2ex]\tan\dfrac{C}{2}=\dfrac{r}{z}=\sqrt{\dfrac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}\end{cases}$$

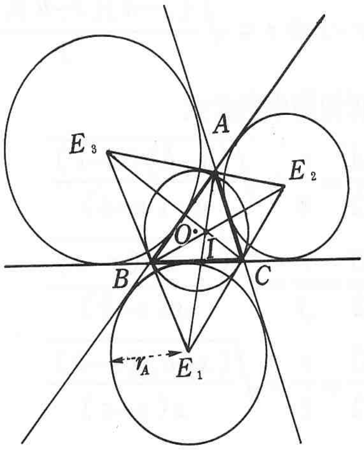


【習題】(1)試證正、餘弦的半角公式，即

$$\begin{cases} \sin\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{(s-b)(s-c)}{bc}} \\ \sin\dfrac{B}{2}=\sqrt{\dfrac{(s-a)(s-c)}{ac}} \\ \sin\dfrac{C}{2}=\sqrt{\dfrac{(s-a)(s-b)}{ab}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{s(s-a)}{bc}} \\ \cos\dfrac{B}{2}=\sqrt{\dfrac{s(s-b)}{ac}} \\ \cos\dfrac{C}{2}=\sqrt{\dfrac{s(s-c)}{ab}} \end{cases}$$

(2)試求△ABC的三邊上的傍切圓的半徑用三邊邊長表示的公式。



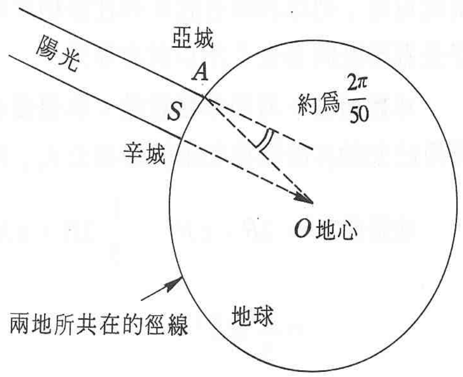
㈢球面幾何史話：

空間中和定點O的距離恒等於給定長度r的所有點所構成的曲面叫做以O點爲心、以r爲半徑的球面。例如我們所居住於其上的大地地表，其局部地貌雖然丘陵起伏，山川縱橫，但是其全局的形狀却是十分接近於一個球面，近代根本直截了當地把它叫做“地球”。由此可見，當我們要在地球上作大幅度的遠程活動時，例如遠洋航行或長程飛行等，則球面幾何就自然是不可或缺的基本知識，兩個半徑相等的球面是顯然互相全等的（位置上相差的只是把一個球心移到另一個球心的平移）；再者，任何兩個球面都是相似的，兩者之間所差的（放大或縮小）相似比也就是它們的半徑之比。由此可見，一般球面的研討可以通過相似變換歸於單位半徑的球面（簡稱爲**單位球面**）的正規化情形；而單位球面又是空間由定點指向各方的所有方向的自然“模空間”（moduli space）。球的幾何的重要性，遠在我國古代和古希臘即已充分體認，並且獲得重大成果，在這裏讓我們擇其精要，對於其中三個歷史性的“突破”，先作簡要介紹，作爲討論球面幾何的引子。

(1)**地球大小的初步估計：**遠在古希臘時代他們即已由航海、月蝕現象認識到大地整體上是一個很大的球，對於居住在這個大球上的人類，想要知道它究竟有多大的半徑，當然是一個自然的基本問題，遠在紀元前約三百年，古埃及亞歷山大城（Alexandria）的圖書館館長依刺都山尼（Eratosthenes，284－192 B.C.）就運用簡單的幾何知識和對於日光的觀察，對於地球的大小作了一次相當成功的初步估計。他當年估算而得的地球半徑，換算成現代的單位約爲7,270公里，比近代利用人造衞星測量而得的平均半徑的數據6,378公里相差僅僅是大了15%！依氏對於地球半徑的估計的想法和做法如下：

依刺都山尼是一位博學之士，他知道位於亞歷山大城正南方的辛尼城（Syene）〔亦即現在的阿斯旺大壩（Aswan Dam）的所在地〕，在夏至的正午太陽光是直射到深井的井底的。改用現代的術語來說，亦即辛尼城和亞歷山大城在緯度上相差不到1°，所以可以看做是亞城的正南方；再者辛尼城恰好位於北回歸線上（即和嘉義同是N 23$\frac{1}{2}$度），在夏至的正午的陽光是直射地面的。但是在亞歷山大城夏至正午的陽光却和深井井壁有1/50周角的斜度。他就用下述圖解，簡明扼要地解說了上

述夏至正午陽光照射角的差別的幾何意義：



把地球想成是一個半徑爲R的大球，則亞城、辛城所共在的大圓弧長爲$2\pi R$。它應該是兩地距離的 50 倍。他再用下述粗略估計來推算兩地的距離：當年的駱駝車隊（Camel Train）每天約走 100 希臘里（Stadia），由亞城到辛城共需走 50 天，所以兩地相距爲 5000 Stadia，由此推算即得

$$2\pi R = 250,000 \text{ Stadia}$$

$$R = \frac{1}{2\pi} \cdot 250,000 \text{ Stadia}$$

換算成現代的公里，約爲 7,270 公里。

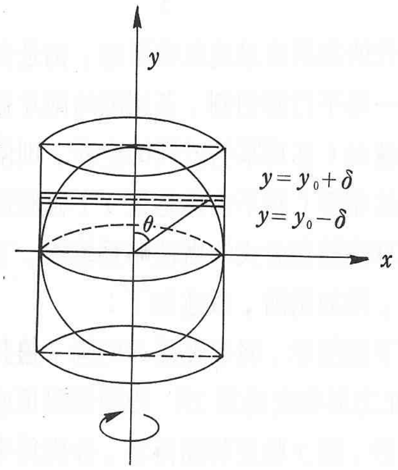
遠在二千多年前，他抓住簡明扼要的地理知識通過精闢樸素的幾何圖解，即能把地球的大小估算到只差 15%！，這實在是令人讚嘆不已的千古佳話！

⑵ **球面面積公式：**由定點指向四面八方的各種方向，“總共”究竟有多少？這個具有基本重要性的幾何度量的明確提法就是單位球面的面積有多大？它是空間的一個基本幾何常數，遠在古希臘和我國古代的幾何學家們都早就認識到它的重要性，而且也都鍥而不捨，精心鑽研而得到完美的答案。下面先介紹阿基米德（Archimedes，287 — 212 B.C.）遠在公元前三世紀在這一問題上的輝煌成就。

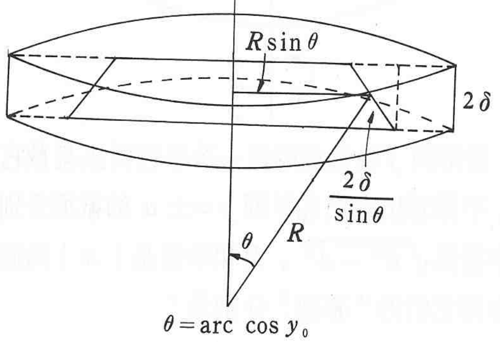
阿基米德出身於西西里島上薩拉邱斯（Syracuse）的貴族家庭，早年留學亞歷山大城，是古代最偉大的科學家，他博大精深，兼長理論、實用之學，成就卓越，名滿當年的地中海文明世界，而終其一生，他自己最引以自豪，而且還在遺囑中要在他的墓碑上銘刻留念者，則是下面所要介紹的發現與論證，亦即

“半徑爲R的球面面積和半徑爲R、高爲$2R$的圓柱面的面積相同，都等於$4\pi R^2$。”

相信他當年是先用實驗手法得出上述兩者等面積這個猜想（conjecture），然後再巧用歐都克斯所創的細分逼近法加以論證。如下圖所示，把半徑爲R的圓和它的外切正方形分別



以y-軸爲轉軸旋轉而得者，即爲一半徑爲R的球面和它的外切圓柱面。再者，$y=y_0\pm\delta$這兩條平行直線所轉成的兩個平行面在柱面和球面上分別切割出兩條極窄的面。前者是一個長爲$2\pi R$，寬爲2δ的圓環，所以其面積顯然爲$4\pi R\delta$。後者在δ非常非常小時，幾乎是一片寬爲$2\delta\cdot\frac{1}{\sin\theta}$，平均長度爲$2\pi R\sin\theta$的斜面圓環，所以其面積也幾乎是$4\pi R\delta$（如下圖所示）。由此可見，在$\delta\to 0$的無限細分下



，上述兩細條窄面根本是等面積的！這也就證明了上述猜想。

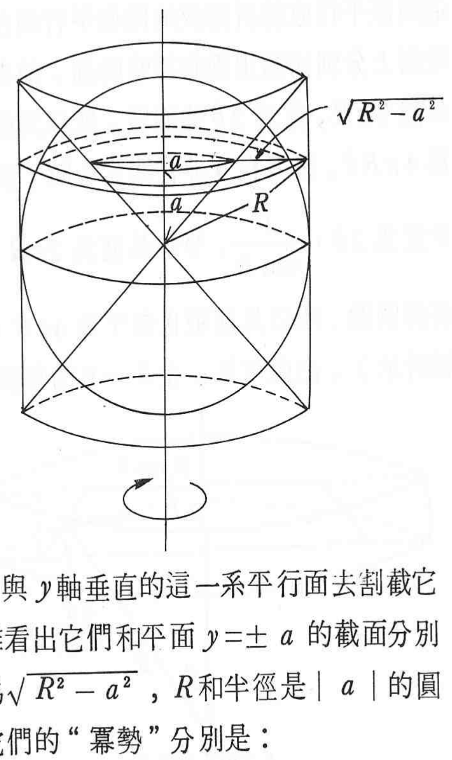
(3)**球體的體積公式**：對於體積的研究是我國古代幾何學的精華，而球體體積公式的探索則是自劉徽、祖冲之一直到祖暅一脈相承的主攻課題。世代鍥而不捨的研討，及至祖暅集其大成，總結而得下述原理，並且用以求得球體體積公式，即

祖暅原理：冪勢既同，則積不容殊！

球體體積公式：$V=\frac{4}{3}\pi R^3$。

改用現代的術語來敍述祖暅原理，則是當兩個形體被一系平行面切割，若相應的兩片截面**總是等面積的**（亦即冪勢既同的定義）則兩者的體積必然相等（積不容殊是也）！祖暅當年用它來求球體體積公式的辦法略爲繁複，下面沿用其意，稍加精簡，改述如下：

如下圖所示，將半徑爲R的圓，邊長爲$2R$的正方形和底邊爲$2R$的兩個對頂直角等腰三角形，繞y軸旋轉而得者，分別爲半徑爲R的球體，半徑爲R高爲$2R$的圓柱體和兩個對頂的半徑爲R高爲R的正圓錐體。



若用與y軸垂直的這一系平行面去割截它們，不難看出它們和平面$y=\pm a$的截面分別是半徑爲$\sqrt{R^2-a^2}$，R和半徑是$|a|$的圓，亦即它們的“冪勢”分別是：

$\pi(R^2-a^2)$，πR^2和πa^2。

由此可見，把球和錐合起來和柱體相比較，恰好是冪勢既同者也！所以就有等式：

球體體積＋對頂錐體體積＝柱體體積

再用已知的柱體體積和錐體體積公式，即得

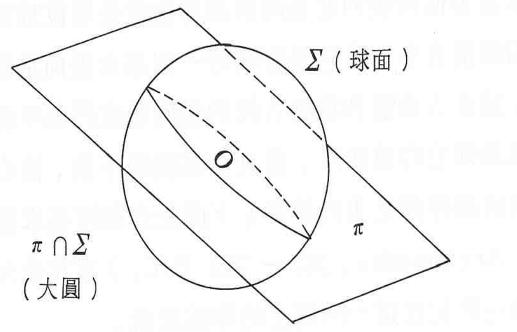
$$球體體積=2R\cdot\pi R^2-\frac{1}{3}2R\cdot\pi R^2$$

$$=\frac{4}{3}\pi R^3。$$

因爲球體可以想成是無數個以球心爲頂點的小錐體組合而成，所以球體體積等於$\frac{1}{3}R$·球面面積。由此可見，上述球體體積公式和球面面積公式是相通的。中西古文明都認識到球的基本重要性，而且異途同歸，也都成功地獲得圓滿解答，的確是耐人尋味發人深思的一件事了。

(四)球面三角(spherical trigonometry)

球面是空間中最爲勻稱完美的曲面，它繼承了空間中保持球心不變的所有對稱性。例如對於任一過球心點的平面π，空間對於π的反射對稱當然是保持球面自相對應的，所以它局限在球面上的作用就是球面對於π和球面所交的這個大圓的**反射對稱**（Reflection symmetry with respect to a great circle）。（如下圖所示）



我們可以把球面和歐氏平面的基本性質作如下的對比：

歐　氏　平　面	球　　　面
兩點定一直線	非對頂兩點定一大圓
直線段是兩點之間最短通路	大圓劣弧是非對頂兩點之間的最短通路
平面對於任給一條直線皆爲反射對稱的	球面對於任給一個大圓皆爲反射對稱的
三點定一三角形	非對頂三點定一球面三角形
兩邊一夾角對應相等（ $S.A.S.$ ）是三角形疊合的充要條件	兩邊一夾角對應相等（ $S.A.S.$ ）也是球面三角形疊合的充要條件
三角形的內角和恒等於一個平角	球面三角形的內角和恒大於一個平角

兩相比較，球面與平面的幾何性質可以說大同小異，相同之處在於大圓具有和直線幾乎相同的性質，在於同樣的反射對稱性和三角形疊合條件；而它們相異之處則在於兩個大圓恒交於兩個對頂點；對頂兩點之間的最短通路不再是唯一的，而是無窮多個半大圓；再者，球面三角形的內角和並非一平角而是恒大於一平角的!

【習題】

(1)試用球面對於任給一個大圓的反射對稱性,推論球面三角形 $S.A.S.$ 疊合條件。（參照平面幾何的情形）

(2)試用球面對於任給一個大圓的反射對稱性,推論球面對於其上任給一點皆爲旋轉對稱的。（參照平面幾何的情形）

(3)在半徑爲 R 的球面上，和定點的（球面）距離等於 a 的點所成的曲線弧長是多少？

(4)試證和球面上任給兩點 P、Q（球面）等距的點集就是大圓弧 $\overset{\frown}{PQ}$ 的垂直平分大圓。（它是空間中直線段 $\overline{PQ}$ 的垂直平分面和球面的交截）。

(5)平面幾何中的等腰三角形定理是否也可以有相當的球面幾何等腰三角形定理？試討論之。（參看第一章對於等腰三角形的討論）

(6)試用球面三角形的 SAS 疊合條件和你所得的球面等腰三角形定理,推導球面三角形的 $A.S.A.$ 和 $S.S.S.$ 疊合條件。

大體上來說，定性的球面幾何具有和平面幾何同樣的疊合定理和對稱性，但是缺了在平面幾何中基於內角和或平行的那一部份。現在讓我們接着研討定量的球面幾何，看一看其中的基本定理何在？回顧在定量的平面幾何中，基本定理在於矩形面積公式、勾股定理和相似三角形定理，但是在球面幾何中，它們不是消失得了無踪跡可尋,就是變成大異其趣的了！所以我們得要改弦更張，改從球面三角形的角邊關係的定量分析入手（因爲三角形的疊合條件乃是球面幾何與平面幾何的相同之所在！）。再者，有鑒於半徑不同的兩個球面之間所差者只有一個相似的放大或縮小。所以下面對於單位（半徑的）球面的定量研討，其實已經充分體現其一般性。因此，在下面的討論中，我們總是把半徑取定爲1！

定理1：設 $\overset{\frown}{\triangle} ABC$ 是單位球面上的一個三角形，則

$$\angle A+\angle B+\angle C-\pi=\overset{\frown}{\triangle} ABC \text{ 的面積。}$$

證明：將 $\overset{\frown}{AB}$ ， $\overset{\frown}{AC}$ 這兩個大圓劣弧延長，相交於 A 點的對頂點 A'（這樣兩個半大圓所夾成的球面區域通常叫做一個梭形（lune）），易見它的面積應該等於全球面的 $\dfrac{\angle A}{2\pi}$ 倍，由前述阿基米德所證者，單位球面的總面積爲 4π ，所以頂角爲 $\angle A$（弧度）的梭形的面積是 $2\angle A$ 。若用 $\overset{\frown}{\triangle} ABC$ 表示以 A、B、C 爲頂點的球面三角形的面積； A'、B'、C' 分別表示 A、B、C 的對頂點。則由下圖所示，即有

$$\overset{\frown}{\triangle} ABC+\overset{\frown}{\triangle} A'BC=2\angle A$$

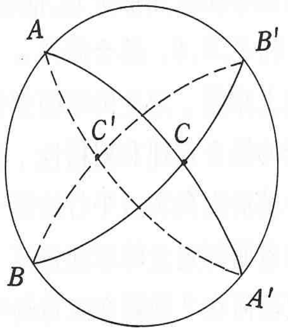
$$\overset{\frown}{\triangle} ABC+\overset{\frown}{\triangle} AB'C=2\angle B$$

$$\overset{\frown}{\triangle} ABC+\overset{\frown}{\triangle} ABC'=2\angle C$$

$$\overset{\frown}{\triangle} ABC'=\overset{\frown}{\triangle} A'B'C \text{〔兩者互爲對頂〕}$$

$$\overset{\frown}{\triangle} ABC+\overset{\frown}{\triangle} A'BC+\overset{\frown}{\triangle} AB'C$$

$$+\widehat{\triangle}A'B'C = \text{半球} = 2\pi$$



將前三式相加，然後再用後兩式代換，即得

$$\begin{aligned}
&3\widehat{\triangle}ABC+\widehat{\triangle}A'BC+\widehat{\triangle}AB'C+\widehat{\triangle}ABC'\\
&=2\cdot\{\angle A+\angle B+\angle C\}\\
&=2\widehat{\triangle}ABC+\{\widehat{\triangle}ABC+\widehat{\triangle}A'BC+\\
&\quad\widehat{\triangle}AB'C+\widehat{\triangle}A'B'C\}\\
&=2\widehat{\triangle}ABC+2\pi
\end{aligned}$$

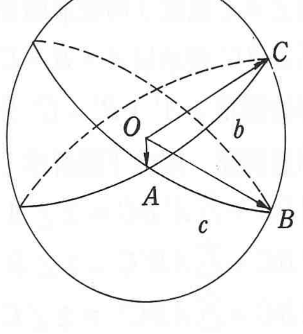
由此易得

$$\angle A+\angle B+\angle C-\pi=\widehat{\triangle}ABC \quad \text{〔證畢〕}$$

平面幾何中三角形的各種恒等條件說明了平面三角形的唯一性，把這種唯一性定理提升到有效能算的角、邊定量關係，即爲三角學中的正、餘弦定律。下面我們要把球面三角形的唯一性定理也提升成角、邊之間有效能算的定量關係，這也就是我們即將研討的球面三角的正、餘弦定律（sine and cosine laws in spherical trigonometry）。

分析：

如下圖所示，O點是單位球的球心，A、



B、C是球面三角形$\widehat{\triangle}ABC$的頂點。我們可以用$\mathbf{a}=\overrightarrow{OA}$ $\mathbf{b}=\overrightarrow{OB}$ $\mathbf{c}=\overrightarrow{OC}$ 這三個單位向量來表達它們的位置。則球面三角$\widehat{\triangle}ABC$的三個角度和邊長可以分別用向量代數表達如下：

令a、b、c分別表示$\widehat{\triangle}ABC$中A、B、C的對邊弧長。則易見a就是$\mathbf{b}$、$\mathbf{c}$之間的夾角弧長，b就是$\mathbf{a}$、$\mathbf{c}$之間的夾角弧長，c就是$\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$之間的夾角弧長。所以即有

$$\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}=\cos a,\ \mathbf{a}\cdot\mathbf{c}=\cos b,\ \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\cos c$$

令$/\!\!/(\mathbf{a},\mathbf{b})$,$/\!\!/(\mathbf{b},\mathbf{c})$，$/\!\!/(\mathbf{c},\mathbf{a})$分別表示它們所張的平行四邊形，則$\angle A$（$\angle B$，$\angle C$）分別就是$/\!\!/(\mathbf{a},\mathbf{b})$和$/\!\!/(\mathbf{a},\mathbf{c})$（$/\!\!/(\mathbf{b},\mathbf{c})$和$/\!\!/(\mathbf{b},\mathbf{a})$，$/\!\!/(\mathbf{c},\mathbf{a})$和$/\!\!/(\mathbf{c},\mathbf{b})$）之間的兩面角。由此可見

$$\begin{aligned}
&/\!\!/(\mathbf{a},\mathbf{b})\cdot/\!\!/(\mathbf{a},\mathbf{c})\\
&=|/\!\!/(\mathbf{a},\mathbf{b})|\cdot|/\!\!/(\mathbf{a},\mathbf{c})|\cdot\cos A\\
&=\sin c\cdot\sin b\cdot\cos A
\end{aligned}$$

再者，由第一章的定理，即有

$$\begin{aligned}
\sin c\cdot\sin b\cdot\cos A&=/\!\!/(\mathbf{a},\mathbf{b})\cdot/\!\!/(\mathbf{a},\mathbf{c})\\
&=\begin{vmatrix}\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}, & \mathbf{a}\cdot\mathbf{c}\\ \mathbf{b}\cdot\mathbf{a}, & \mathbf{b}\cdot\mathbf{c}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & \cos b\\ \cos c & \cos a\end{vmatrix}\\
&=\cos a-\cos b\cdot\cos c
\end{aligned}$$

同理可得

$$\sin a\cdot\sin b\ \cos C=\cos c-\cos a\cdot\cos b$$
$$\sin c\cdot\sin a\ \cos B=\cos b-\cos c\cdot\cos a$$

這也就是我們所要探討的球面三角餘弦定律。

球面三角餘弦定律：球面三角形$\widehat{\triangle}ABC$的三個角和三個邊之間滿足下列函數關係：

$$\begin{cases}\sin b\sin c\cos A=\cos a-\cos b\cos c,\\ \sin a\sin b\cos C=\cos c-\cos a\cos b,\\ \sin c\sin a\cos B=\cos b-\cos c\cdot\cos a。\end{cases}$$

由上述基本關係出發，就容易推導其他常用、好用的球面三角公式。例如

球面三角正弦定律：

$$\frac{\sin A}{\sin a}=\frac{\sin B}{\sin b}=\frac{\sin C}{\sin c}$$

證明：

由 $\cos A=\frac{1}{\sin b\sin c}(\cos a-\cos b\cos c)$ 計算 $\left(\frac{\sin A}{\sin a}\right)$,即有

$$\frac{\sin^2 A}{\sin^2 a}=\frac{1}{\sin^2 a\sin^2 b\sin^2 c}\cdot\{\sin^2 b\sin^2 c-(\cos a-\cos b\cos c)^2\}$$

其中分母部分業已是 a 、 b 、 c 的對稱式，而分子部份則用如下之變形，即

$$\begin{aligned}分子&=\{(1-\cos^2 b)(1-\cos^2 c)-[\cos^2 a-2\cos a\cos b\cos c+\cos^2 b\cos^2 c]\}\\&=1-(\cos^2 a+\cos^2 b+\cos^2 c)+2\cos a\cos b\cos c\end{aligned}$$

所以其實也是 a 、 b 、 c 的對稱式。由此易見，同樣的計算可得 $\frac{\sin^2 B}{\sin^2 b}$ 和 $\frac{\sin^2 C}{\sin^2 c}$ 也當然等於上述對稱式，亦即有

$$\frac{\sin^2 A}{\sin^2 a}=\frac{\sin^2 B}{\sin^2 b}=\frac{\sin^2 C}{\sin^2 c}$$

但是 $\frac{\sin A}{\sin a}$ ， $\frac{\sin B}{\sin b}$ ， $\frac{\sin C}{\sin c}$ 顯然都是正的，所以由它們的平方相等即可得出它們本身也是相等的！這就推導出球面三角的正弦定律。

球面三角的半角公式：

在平面三角的討論中（例 2），我們利用三角形的三條角平分線共交於一點和內切圓的幾何，直截了當地求得用邊長表達半角的正、餘弦和正切的公式。現在讓我們改用球面三角的餘弦定律直接用三角公式推導球面三角形的相當的半角公式：

分別以 $\cos A=2\cos^2\frac{A}{2}-1=1-2\sin^2\frac{A}{2}$

代入餘弦定律即得

$$\begin{aligned}2\sin b\sin c\cos^2\frac{A}{2}&=\cos a-\cos b\cos c+\sin b\sin c\\&=\cos a-\cos(b+c)\\&=2\sin\frac{1}{2}(b+c-a)\sin\frac{1}{2}(a+b+c)\end{aligned}$$

亦即

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin s}{\sin b\cdot\sin c}}\ ,$$

$$s=\frac{1}{2}(a+b+c)$$

以及

$$\begin{aligned}2\sin b\sin c\sin^2\frac{A}{2}&=-\cos a+\cos b\cos c+\sin b\sin c\\&=\cos(b-c)-\cos a\\&=2\sin\frac{1}{2}(a+b-c)\sin\frac{1}{2}(a-b+c)\end{aligned}$$

亦即

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b\ \sin c}}$$

相除即得

$$\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s\cdot\sin(s-a)}}$$

這也就是球面三角中常用好用的半角公式，即

$$\begin{cases}\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b\ \sin c}}\\ \sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-c)}{\sin a\ \sin c}}\\ \sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)}{\sin a\ \sin b}}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin s\cdot\sin(s-a)}{\sin b\ \sin c}}\\ \cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{\sin s\cdot\sin(s-b)}{\sin b\cdot\sin c}}\\ \cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{\sin s\cdot\sin(s-c)}{\sin a\cdot\sin b}}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s\cdot\sin(s-a)}}\\ \tan\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-c)}{\sin s\cdot\sin(s-b)}}\end{cases}$$

$$\tan\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)}{\sin s\cdot\sin(s-c)}}$$

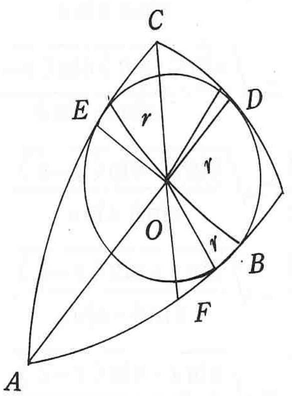
值得注意的是，上述球面三角的正弦定律和三組半角公式；它們和平面三角中相當的公式所差別的總是在所有涉及邊長的地方改用它的正弦函數值，這是耐人尋味值得深思之處。其中的深意將在往後展現。再者，在平面三角的討論中，我們利用了內切圓半徑和面積之間的簡單關係，亦即$\triangle=r\cdot s$，先得出

$$r=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

然後再用幾何關係 $\tan\dfrac{A}{2}=\dfrac{r}{(s-a)}$ 來求得 $\tan\dfrac{A}{2}$的表式。很自然我們可以在這裏問一問：是否可以用上述半角公式，反過來用以求得球面三角的內切圓半徑的公式呢？爲此，讓我們先討論一下球面幾何的“分角線”。

【例1】

和兩個大圓等距的點所成的軌跡就是它們的“分角大圓”。由此易證一個球面三角形$\widehat{\triangle}ABC$的三條內角分角大圓共交於一點。此點和三邊的距離相等，亦即以此點爲圓心。以上述共同距離r爲“半徑”的圓乃是$\widehat{\triangle}ABC$的**內切圓**。

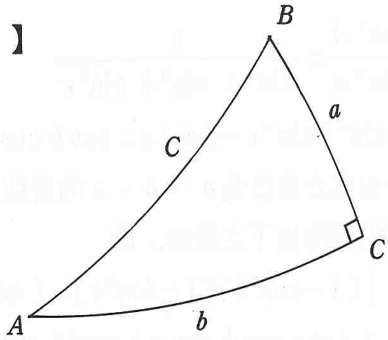


【例2】

設D、E、F分別是$\widehat{\triangle}ABC$的內切圓和a、b、c邊的切點O點爲內切圓圓心。則有大圓圓弧$\widehat{OD}$，$\widehat{OE}$，$\widehat{OF}$分別和$\widehat{BC}$，$\widehat{AC}$，$\widehat{AB}$互相垂直，而且容易由“切線長”相等推導而得

$$\begin{cases}\widehat{AE}=\widehat{AF}=(s-a)\\ \widehat{BD}=\widehat{BF}=(s-b)\\ \widehat{CD}=\widehat{CE}=(s-c)\end{cases}$$

【例3】



設$\widehat{\triangle}ABC$的$\angle C=\dfrac{\pi}{2}$，則球面三角的正、餘弦定律簡化爲下列形式：

$$\begin{cases}\sin a=\sin c\sin A\\ \sin b=\sin c\sin B\end{cases}\quad〔\sin C=1〕$$

$$\begin{cases}\cos c=\cos a\cos b\quad〔因爲\cos C=0〕\\ \sin c\sin b\cos A=\cos a-\cos b\cos c\\ \sin c\sin a\cos B=\cos b-\cos a\cos c\end{cases}$$

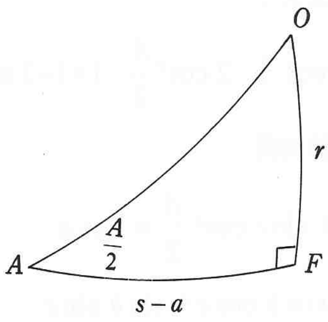
由此可得

$$\begin{aligned}\tan A&=\frac{\sin b\ \sin c\ \sin A}{\sin b\ \sin c\ \cos A}\\ &=\frac{\sin b\ \sin a}{\cos a-\cos b\cos c}\\ &=\frac{\sin a\ \sin b}{\cos a-\cos a\ \cos^2 b}=\frac{\tan a}{\sin b}\end{aligned}$$

【例4】

將上述公式用在$\widehat{\triangle}AFO$上，即有

$$\tan\frac{A}{2}=\frac{\tan r}{\sin(s-a)}$$



亦即

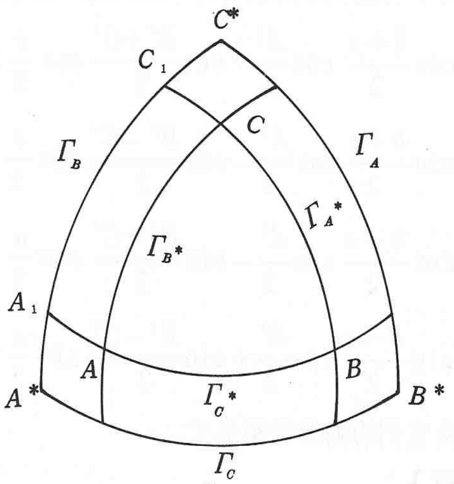
$$\tan r=\sin(s-a)\cdot\tan\frac{A}{2}$$

$$=\sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s}}$$

這也就是所求的球面三角形內切圓半徑用三邊邊長表達的公式。

球面三角的極對偶性(Polar Duality)

對於球面上給定一點A，和它的球面距離為$\frac{\pi}{2}$的點集構成一個大圓Γ_A，兩者之間的關係一如地球上的極點和赤道者也，所以我們就把Γ_A叫做A點的赤道圓（A和它的對頂點A'具有相同的赤道圓），如下圖所示：



對於任給球面三角形$\widehat{\triangle}ABC$，其三個頂點A、B、C的赤道圓Γ_A，Γ_B，Γ_C交截而得另一個球面三角形$\widehat{\triangle}A^*B^*C^*$，亦即

$$A^*\in\Gamma_B\cap\Gamma_C,\ B^*\in\Gamma_A\cap\Gamma_C,\ C^*\in\Gamma_A\cap\Gamma_B$$

容易看到$A\in\Gamma_{B^*}\cap\Gamma_{C^*}$，$B\in\Gamma_{A^*}\cap\Gamma_{C^*}$，$C\in\Gamma_{A^*}\cap\Gamma_{B^*}$。其實$\widehat{\triangle}ABC=(\widehat{\triangle}A^*B^*C^*)^*$，亦即$A^{**}=A$，$B^{**}=B$，$C^{**}=C$。換句話說，$\widehat{\triangle}ABC$和$\widehat{\triangle}A^*B^*C^*$是互為極對偶的一對球面三角形。

引理： 設$\widehat{\triangle}ABC$和$\widehat{\triangle}A^*B^*C^*$是互為極對偶的一對球面三角形，它們的三邊三角分別為

$$a,\ b,\ c\text{ 和 }\angle A,\ \angle B,\ \angle C$$
$$a^*,\ b^*,\ c^*\text{ 和 }\angle A^*,\ \angle B^*,\ \angle C^*$$

則有關係式

$$\begin{cases}\angle A+a^*=\angle B+b^*=\angle C+c^*=\pi\\ \angle A^*+a=\angle B^*+b=\angle C^*+c=\pi\end{cases}$$

證明：

如前圖所示，令A_1，C_1分別是$\Gamma_C{}^*$和$\Gamma_A{}^*$和Γ_B的交點。所以$\widehat{A_1C_1}$的弧長就是$\angle B$。再$\widehat{A_1C}{}^*=\frac{\pi}{2}$，$\widehat{A^*C_1}=\frac{\pi}{2}$。所以即有

$$\pi=\widehat{A^*C_1}+\widehat{A_1C^*}=\widehat{A^*C^*}+\widehat{A_1C_1}$$
$$=b^*+\angle B$$

同理可證：$a^*+\angle A=C^*+\angle C=\pi$。

再用極對偶性（$\widehat{\triangle}A^*B^*C^*)^*=\widehat{\triangle}ABC$，即得

$$a+\angle A^*=b+\angle B^*=c+\angle C^*=\pi$$

推論1： 在球面幾何中，若$\widehat{\triangle}A_1B_1C_1$和$\widehat{\triangle}A_2B_2C_2$的三內角對應相等，則它們的三邊亦必對應等長，所以它們是恒等的。

證明： 今$\widehat{\triangle}A_1{}^*B_1{}^*C_1{}^*$和$\widehat{\triangle}A_2{}^*B_2{}^*C_2{}^*$分別是$\triangle A_1B_1C_1$和$\triangle A_2B_2C_2$的極對偶三角形，由假設

$$\angle A_1=\angle A_2,\ \angle B_1=\angle B_2,\ \angle C_1=\angle C_2$$

和上述引理即得

$$a_1{}^*=\pi-\angle A_1=\pi-\angle A_2=a_2{}^*$$
$$b_1{}^*=\pi-\angle B_1=\pi-\angle B_2=b_2{}^*$$
$$c_1{}^*=\pi-\angle C_1=\pi-\angle C_2=c_2{}^*$$

所以$\widehat{\triangle}A_1{}^*B_1{}^*C_1{}^*$和$\widehat{\triangle}A_2{}^*B_2{}^*C_2{}^*$是三邊對應等長的，因此它們是恒等的，即有$\angle A_1{}^*=\angle A_2{}^*$，$\angle B_1{}^*=\angle B_2{}^*$，$\angle C_1{}^*=\angle C_2{}^*$。再用上述引理即得$a_1=a_2$，$b_1=b_2$，$c_1=c_2$，亦即$\widehat{\triangle}A_1B_1C_1\cong\widehat{\triangle}A_2B_2C_2$。

推論2： 任何球面三角中的公式中，若作下述代換，即

$$\begin{cases}a\longrightarrow\pi-\angle A,\ b\longrightarrow\pi-\angle B,\\ \quad c\longrightarrow\pi-\angle C\\ \angle A\longrightarrow\pi-a,\ \angle B\longrightarrow\pi-b\\ \quad\angle C\longrightarrow\pi-c\end{cases}$$

則所得者依然普遍成立。〔因爲它其實就是它原公式運用到極對偶球面三角形上的形式！〕

由此可見，假若我們預先在所有球面三角的各種公式之中，把所有涉及內角的地方一律改用外角表達，即所得的公式在角（外角之角！）邊互換之下，即爲其極對偶公式。具體的做法是令 A'，B'，C' 分別是$\overset{\frown}{\triangle}ABC$的外角，即 $A'=\pi-A$，$B'=\pi-B$，$C'=\pi-C$。則有

球面正弦定律： $\dfrac{\sin A'}{\sin a}=\dfrac{\sin B'}{\sin b}=\dfrac{\sin C'}{\sin c}$。

球面餘弦定律：

$$\begin{cases}\sin b\sin c\cos A'=\cos b\cos c-\cos a\\ \sin c\sin a\cos B'=\cos c\cos a-\cos b\\ \sin a\sin b\cos C'=\cos a\cos b-\cos c\end{cases}$$

球面半角公式：

$$\sin\frac{A'}{2}=\sqrt{\frac{\sin s\sin(s-a)}{\sin b\sin c}}$$

$$\sin\frac{B'}{2}=\sqrt{\frac{\sin s\sin(s-b)}{\sin a\sin c}}$$

$$\sin\frac{C'}{2}=\sqrt{\frac{\sin s\sin(s-c)}{\sin a\sin b}}$$

$$\cos\frac{A'}{2}=\sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b\sin c}}$$

$$\cos\frac{B'}{2}=\sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-c)}{\sin a\sin c}}$$

$$\cos\frac{C'}{2}=\sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)}{\sin a\sin b}}$$

$$\tan\frac{A'}{2}=\sqrt{\frac{\sin s\sin(s-a)}{\sin(s-b)\sin(s-c)}}$$

$$\tan\frac{B'}{2}=\sqrt{\frac{\sin s\sin(s-b)}{\sin(s-a)\sin(s-c)}}$$

$$\tan\frac{C'}{2}=\sqrt{\frac{\sin s\sin(s-c)}{\sin(s-a)\sin(s-b)}}$$

我們可以用 S' 表示 $\dfrac{1}{2}(A'+B'+C')$。則上述公式的極對偶形式就是在 $\{A',B',C',S'\}\longleftrightarrow\{a,b,c,s\}$ 的互換公式。例如將上述球面半角公式互換所得者，就是直接用三外角表達三邊的“球面半邊公式”。再者，我們自然還可以去探索一組自相極對偶的球面三角基本公式。

【例5】

由上述球面半角公式出發，即可得出

$$\begin{cases}\sin(s-a)\cos\dfrac{A'}{2}=\sin a\cos\dfrac{B'}{2}\cos\dfrac{C'}{2}\\[2ex] \sin s\cos\dfrac{A'}{2}=\sin a\sin\dfrac{B'}{2}\sin\dfrac{C'}{2}\\[2ex] \sin(s-b)\sin\dfrac{A'}{2}=\sin a\sin\dfrac{B'}{2}\cos\dfrac{C'}{2}\\[2ex] \sin(s-c)\sin\dfrac{A'}{2}=\sin a\cos\dfrac{B'}{2}\sin\dfrac{C'}{2}\end{cases}$$

以及它們的輪換對稱形式。由上述四式的加、減組合，再用三角函數的和、差化積公式即可得出下列自相極對偶的球面三角基本公式：

$$\begin{cases}\cos\dfrac{b+c}{2}\cos\dfrac{A'}{2}+\cos\dfrac{B'+C'}{2}\cos\dfrac{a}{2}=0\\[2ex] \sin\dfrac{b+c}{2}\cos\dfrac{A'}{2}-\cos\dfrac{B'-C'}{2}\sin\dfrac{a}{2}=0\\[2ex] \cos\dfrac{b-c}{2}\sin\dfrac{A'}{2}-\sin\dfrac{B'+C'}{2}\cos\dfrac{a}{2}=0\\[2ex] \sin\dfrac{b-c}{2}\sin\dfrac{A'}{2}+\sin\dfrac{B'-C'}{2}\sin\dfrac{a}{2}=0\end{cases}$$

以及它們的輪換對稱形式。

【註】：

(i) 以上這一組自相極對偶的公式業已構成球面三角的基本公式。換句話說，由它們出發，即可推導所有其他球面三角的公式。

(ii) 上述球面三角公式是天文學家丹倫伯（J. B. J. Delambre）在 1807 首先發表的。隨後不久又被莫爾外德（Mollweide）重新發現。再者，高斯（F. Gauss）也在他較晚的工作中獨立發現之。所以在球面三角的書本中，往往把上面這一組公式和他們三位中的某一位

連結起來。

【習題】

(1)試由上述這組自對偶的球面三角公式，反過來推導球面三角的半角公式和半邊公式。

(2)然後再用球面半角公式來推導球面三角的正、餘弦定律。

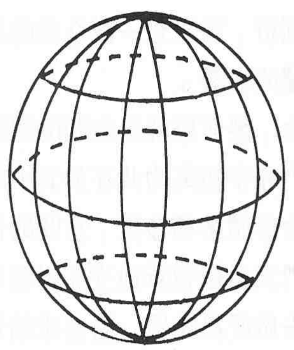
(3)試求下列球面三角形的三角形的三邊邊長，它們的三個內角分別是：

$$\{\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\},\{\frac{2\pi}{3},\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\}$$

$$\{\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\},\{\frac{3\pi}{4},\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}\}。$$

(4)試求上述球面三角形的極對偶三角的角與邊。

(5)把地球的半徑取定爲長度的單位，北極取爲地球球面的基準點，經度爲0的經線爲基準方向。試問這樣取定的球面極坐標（r,θ）和通常用的經緯度之間的關係式是什麼？



(6)對於上述極坐標，試求以（r_0，θ_0）爲圓心，半徑爲R的球面圓的方程式。（先溫習一下平面極坐標中圓的方程式）。

(7)對於上述球面極坐標試求過（r_0，θ_0）而且和$\theta=\theta_0$這條經線的夾角是α_0的大圓方程式。（先溫習一下平面極坐標中直線的點角式。）

(8)對於上述球面極坐標，試求過非對頂的兩點（r_0，θ_0）和（r_1，θ_1）的大圓方程式。

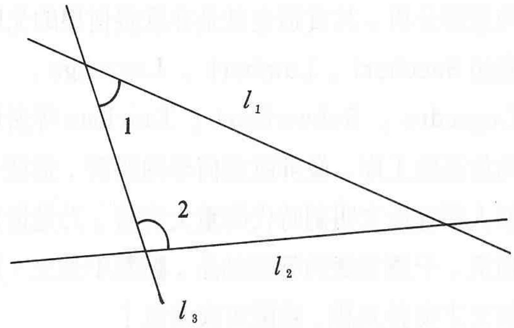
(9)試求（r_0，θ_0）和（r_1，θ_1）這兩點之間的球面距離公式。

(10)試求和（r_0，θ_0）、（r_1，θ_1）這兩點具有球面等距離的大圓方程式。

第二節　平行公設的研討與非歐幾何學的發現

在歐基里德（Euclid，300 B.C.前後）所著的《幾何原理》（Elements）中，開宗明義地所列述的公設之中的第五公設（fifth postulate）如下：

在平面上的二條直線ℓ_1、ℓ_2若和第三條直線ℓ_3相交，若同傍內角之和小於一個平角（亦即如下圖所示的∠1＋∠2小於一平角）則ℓ_1、ℓ_2必然相交於ℓ_3的該側之一點。



這也就是出名的平行公設，在《幾何原理》中，二條直線平行（parallel）的定義是：共面而且不相交。然後再用上述公設來證明：過直線ℓ的線外一點P，有唯一的一條和ℓ平行的直線。再者，在該書往後的好些基本定理如：三角形的內角和恒等於一平角、面積公式、畢氏定理、相似三角形定理等等，其證明都直接依賴於上述平行公設！但是自《幾何原理》問世以來，兩千多年中有許多幾何學家如古代的Ptolemy、Pappus、Proclus和近代的Saccheri（1667—1733），Lambert（1728—1777），Lagrange（1736—1813），Legendre（1752—1833）等等，都對於上述平行公設的“不證自明”感到不自在；而且也都勞神苦思，鍥而不捨地試着對它提出一個僅僅依賴於其他“公理”（axioms)的證明。爲什麼世世代代的幾何學家們對於歐氏幾何體系中的其他各條公理都欣然接受，認爲都是不證

自明無可置疑的；但是唯獨對於“平行公設”這一條，却又始終感到不自在，務必證之而後快呢？歸根究底，其實乃是當年對於公理化（axiomatization）這個方法論的本質的瞭解還不夠透徹和對於平行公設的眞正幾何內涵未能洞察其眞諦的緣故。平行公設深奧的幾何意義，兩千多年來一直是引人入勝却又是百思不解的謎，只有在非歐幾何學的發現和創建之後才算眞相大白。

本節將對於這一段發人深思的史話作一簡要的介紹。爲此，我們將先分析一下歐氏幾何體系，並且概括幾何學的本質和公理化這個方法論的要點。然後再對於平行公設作正反兩面的邏輯分析。其實這也就是非歐幾何學的先驅者如 Saccheri，Lambert，Lagrange，Legendre，Schweikart，Taurinus 等所做的奠基性工作。像非歐幾何學的發明，這樣一個人類理性文明劃時代的重大突破，乃是世代相承，千錘百鍊的智慧結晶，斷然不是三、兩個天才突發異想，幾蹴可成者也！

(一)歐氏幾何體系的本質探討與結構分析：

在希臘文中，幾何學（Geometry）的字面本意就是測地之學。幾何學是古希臘文明的驕傲，也是人類理性文明中的瑰寶，它是在繼承於古埃及和古巴比侖文明的測量知識的基礎上，再歷經三、四百年世代相承，鍥而不捨，精益求精的研究探討總結而得的智慧結晶，歐幾里德所著的《幾何原本》則是古希臘幾何學的一部集其大成的巨著。古代文明的遺產歷經戰亂災變，泰半遺佚而不可考，所幸歐氏這本“寶書”尚能輾轉流傳至今，使得兩千多年來的後之來者，不但能得睹先哲們當年治學的風采，而且也給世世代代的後學之士提供了啓廸心智的明燈，研討科學的典範。因此通常也就根本把古希臘幾何學叫做歐氏幾何學（Euclidean Geometry）。

《歐氏幾何原本》（Euclid's Elements）的總體結構是把當年的幾何基礎理論編組成一個條理井然的**演繹體系**（deductive system），亦即是以一組極爲簡樸基本的概念和性質爲基礎，從而邏輯推衍空間的所有其他重要的性質和常用的事實。當年把這樣一組邏輯論證所依據的基點叫做公理（Axioms）或公設（Postulates），所以後世把這種治學方法叫做**公理化的演繹法**。歐氏幾何原本就是這種治學方法的先河與典範。其實，像這樣一本遠在兩千多年前寫就的書，若用近代嚴謹的數理邏輯來詳加研判，當然還是有好些地方必須要稍加補充和修正的。因此，嚴格地來說，本節所要研討的“歐氏幾何體系”並不是歐氏原本的面貌，而是歷代學者精益求精，妥加完善後的幾何體系。例如在希伯爾特（D. Hilbert）所著的《幾何基礎論》（Foundation of Geometry）中，他就對於歐氏幾何體系作了一次徹底的整理和詳盡的剖析，對於想一觀全貌的讀者，它是很值得一讀的名著。

平實而論，幾何學就是空間的認識論，是研究探索我們和宇宙萬物共存於其中的空間的學科。空間的形體多種多樣，空間的性質多彩多姿，而它們又錯綜複雜地交互影響著；但是當我們下功夫做好抓本質，精益求精地探索空間各種性質之中的至精至簡，做好性質上的以簡御繁工作，則又可以整理出一套條理井然的知識體系。由此可見，公理化的演繹法的本質其實就是在性質層面上，以邏輯推理爲工具，把以簡御繁的功夫做得至精至簡。這樣不但可以使得知識體系更加有系統有條理，而且也大大拓展了理解的深度和視野的廣度。以歐氏幾何體系爲例，其用來以簡御繁的基本性質大體上可以歸結爲下列五系：

I 連結公理（Axioms of Connection）：關於空間中的基本事物**點**、**直線**和**平面**之間的連結和從屬關係，有下述幾點基本性質，即

(i)兩點定一直線，亦即過空間任給相異

兩點A、B，恆存在一條唯一的直線，通常就以符號AB表之。

(ii)不共線三點定一平面，亦即過空間任給不共線的三點A、B、C，存在一個唯一的平面通常就以(ABC)表之。

(iii)若A、B是平面α上的兩點，則直線$AB\subset\alpha$。〔平面的平直性〕。

(iv)若α、β這兩個平面具有一個公共點A，則它們至少還有另外一個公共點，(亦即相交的兩個平面交於一條直線)。

(v)空間中至少有不共面的四點。

〔(iv)、(v) 兩點的幾何內涵是空間的維數是3。〕

Ⅱ次序公理(Axioms of Order)：關於共在一條直線上的相異三點A、B、C，它們之間的基本次序關係是其中有且有一點位於其他兩點之間。再者，連結相異兩點A、B的"直線段(通常用符號$\overline{AB}$表之)"亦即A、B這兩個端點和直線AB上所有位於A、B之間的點所構成的點集。

(i)直線ℓ上的任給一點P把該直線分割成兩段半線，亦即$\ell\setminus\{P\}=\ell_+\cup\ell_-$使得$A$、$B$居於$P$點的同側的充要條件是$P$不位居$A$、$B$之間，即

A、$B\in\ell_+$(或ℓ_-) $\Longleftrightarrow P\notin\overline{AB}$；

〔A、B居於P點的異側的充要條件則是$P\in\overline{AB}$〕。

(ii)平面α上的任給一條直線ℓ把該平面分割成兩片，亦即$\alpha\setminus\ell=\alpha_+\cup\alpha_-$使得$A$、$B$居於直線$\ell$的同側的充要條件是$\overline{AB}$和$\ell$不相交，即

A、$B\in\alpha_+$(或α_-) $\Rightarrow\overline{AB}\cap\ell=\phi$

(空集合)

〔A、B居於直線ℓ的異側的充要條件則是$\overline{AB}\cap\ell\neq\phi$。〕

〔(ii)亦稱為Pasch公理，這也是當年歐氏原本所列的公理體系的缺漏之一。〕

Ⅲ疊合公理(Axioms of Congruence)：關於線段之間的等長度和角區之間的等角度(亦即能夠互相疊合)的基本性質如下：

(i)在直線ℓ上P點的兩側各有唯一一點Q、Q'點，使得$\overline{PQ}$、$\overline{PQ'}$和一條給定線段$\overline{AB}$等長，用符號$\overline{PQ}\equiv\overline{AB}\equiv\overline{PQ'}$表之。

(ii)設A、B、C和A'、B'、C'分別是ℓ、ℓ'上的三點，而且分別有B點位於A、C之間和B'點位於A'、C'點之間。若

$\overline{AB}\equiv\overline{A'B'}$，$\overline{BC}\equiv\overline{B'C'}$ 則有

$\overline{AC}\equiv\overline{A'C'}$

〔長度的可加性〕。

(iii)在平面α上直線ℓ的兩側，各有唯一一條由ℓ上給定點P射出的射線r和r'，使得角區$\angle(\ell_+,r)$、$\angle(\ell_+,r')$和一個給定角區能夠相疊合(亦即角度相等)。

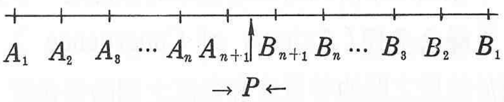
(iv)兩個三角形$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$若有兩邊一夾角(亦即$S.A.S.$)分別對應相等，則它們已經能夠互相疊合，亦即全等，以符號$\triangle ABC\equiv\triangle ABC$表之。

Ⅳ連續公理(Axioms of Continuity)：

(i)對於任給兩條直線段$\overline{AB}$、$\overline{CD}$，總存在有一個夠大的整數n使得$n\cdot\overline{AB}$比$\overline{CD}$長(亦即由n段和$\overline{AB}$等長的直線段首尾相連而成者要比$\overline{CD}$更長一些)。

〔上述關於長度度量的基本性質通常稱之謂阿基米德公理，其實歐都克斯早就用它來建立其比值理論(theory of proportion)，論證其逼近原理(參看第一章)〕

(ii)直線的連續性：設$\{A_n\}$和$\{B_n\}$是直線ℓ上兩個順序左、右對進的點列(如下圖所示)。



則必定存在一個分界點P，使得右進點列$\{A_n\}$皆位於其左側而左進點列$\{B_n\}$則皆位於其右側。

V. **平行公理**，亦即前述的平行公設。〔它和平行線的唯一性，三角形內角和恒為一平角等基本性質密切相關。〕

在上述五組公理中，以疊合公理和平行公理的幾何涵義最爲精微而且影響深遠。前者乃是空間對稱性在基本幾何事物如直線段、角區和三角形上的具體表現。其實它們是和空間（或平面）對於每一給定方向皆爲反射對稱這個基本性質是邏輯等價的。後者的眞諦則在於空間的“平直性”（flatness），亦即空間的“曲率”（curvature）恒等於零，和空間的單連通性（simply connectedness）。但是一個空間本身的曲率乃是一個相當深刻的概念，遠遠不像一條曲線的曲率這樣顯而易見，這也就是爲什麼平行公理的眞諦，要等到非歐幾何學的發明和微分幾何學的發展之後才眞正眞相大白。

再者，在歐氏幾何學這個演繹體系的整體結構上，疊合公理和平行公理可以說是論證的主要依據。在第一章的討論中即已指出定性幾何的兩個要點就是“全等形”和“平行”；前者的基礎在於疊合公理而後者的基礎則在於平行公設（或者是和它邏輯等價的三角形內角和定理）。而定量幾何中的基本定理如矩形、三角形的面積公式、勾股定理和相似三角形定理的論證依據，都必須建立在上述二組公理的（參看下面的討論）。假如對於歐氏的幾何原本的整體結構詳加分析的話，就可以看到下述耐人尋味的兩點：

(1)歐幾里德本人顯然也對於平行公設感到不很自在，因爲在該書中有意識地把平行公設的運用推遲到不得不用時才開始引用（它在頭二十八個命題的論證中是不用平行公設的）。

(2)歐氏充分認識到平行公設是整個定量幾何的理論基礎中不可或缺的基石之一。而且用它可以使得很多論證大爲簡化。由此可見，提出平行公設這個幾何基礎論的重要支柱，乃是十分精到的一個創見！其後兩千多年對於平行公設的研討，其實更顯得歐氏當年選用它的高明之處。

(二)平行公設的邏輯探討：

現在讓我們再來對於平行公設在歐氏幾何這個演繹體系中所扮演的角色，作一番較深入的邏輯探討。大體上，我們可以從下述三個方面去研討它，即

(i)那些重要的幾何定理是可以不用平行公設就能加以論證的？（亦即只要用到公理I～IV就能加以證明者也）

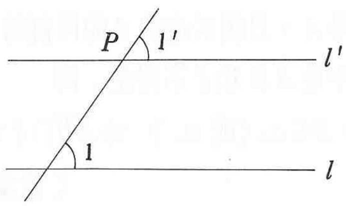
(ii)那些重要的幾何定理是必須要用到平行公設才能加以證明的？

(iii)在平行公設不成立的假設下，又會有那些有意思的幾何推論呢？

其實，把上述三方面詳加研討，下夠功夫，則非歐幾何學的發明也就是水到渠成順理成章的事了。下面將擇其精要，對於非歐幾何學的催生者如Saccheri，Lambert，Lagrange，Legendre，Schweikart，Taurinus，Gauss等的所思所得作一簡要的介紹。

I. 公理I～IV的某些重要幾何推論：

(1)平面上過線外一點，*存在*一條和原給直線不相交的直線。

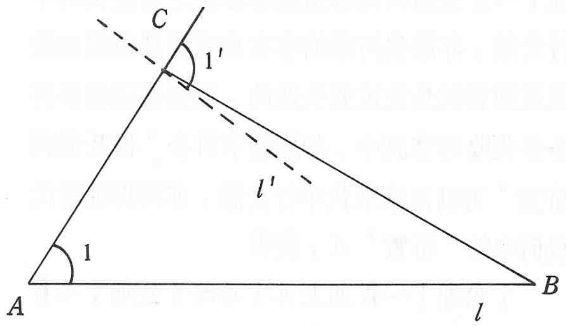


如上圖所示，過P點使得同位角$\angle 1=\angle 1'$的那條直線ℓ'是不可能和ℓ相交的。〔因爲可以由$\ell\cap\ell'\neq\phi$和SAS可推論$\ell\cap\ell'$至少有

兩點！其詳細論證留作習題。〕

(2)三角形的外角恒大於其任一內對角。

〔若動用平行公設，則三角形的內角和恒等於一個平角，所以即有外角等於它的兩個內對角之和，當然是大於其中任給一個內對角的。其實上述不等關係是不必動用平行公設就可以推導的。參考下圖，讀者試自證之。〕



〔如上圖所示，假若C點的外角是$\leqslant A$點的內角，則前述使得同位角相等，亦即$\angle 1=\angle 1'$的直線ℓ'的位置是和CB相重或位於其“內側”。所以ℓ'和ℓ必須相交（此點用公理Ⅱ即可證得），這是和(1)相矛盾的！〕

(3)三角形的內角和恒$\leqslant$一個平角，亦即不大於一平角：

【證明】：

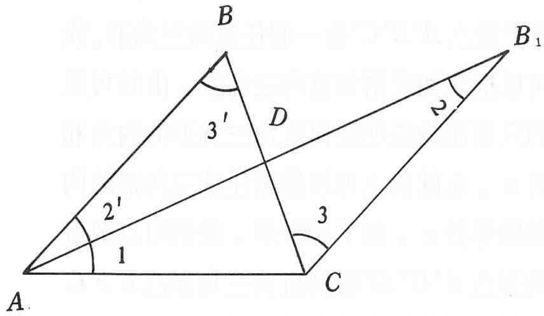
設$\triangle ABC$的三個內角之中，以$\angle A$為最小，如下圖所示。取A點的對邊中點D，連結$\overline{AD}$並延長一倍，使得$\overline{AB_1}=2\cdot\overline{AD}$，連結$\overline{B_1C}$。則由所作可見$\triangle ADB$和$\triangle B_1DC$是全等的。所以即有

$$\angle 2=\angle 2'\ ,\ \angle 3=\angle 3'\ 。$$

亦即新的三角形$\triangle AB_1C$的內角和等於原先的三角形$\triangle ABC$的內角和，而且$\triangle AB_1C$中較小的兩個內角之和等於$\angle A$，即

$$\angle 1+\angle 2=\angle 1+\angle 2'=\angle A\ 。$$

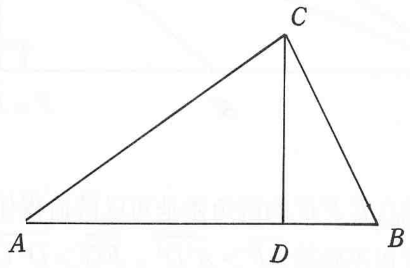
由此可見$\triangle AB_1C$的最小內角至多只有$\triangle ABC$的最小內角的一半。因此只要逐次選用其最小內角進行上述作圖，這樣就可以在保持內角和不變的條件下，使得第n次之所作的最小內角肯定是小於或等於$2^{-n}\cdot\angle A$，因此是顯然趨於0的。再由外角恒大於任一內對角即可得證$\triangle AB$的內角和$\leq$一個平角。



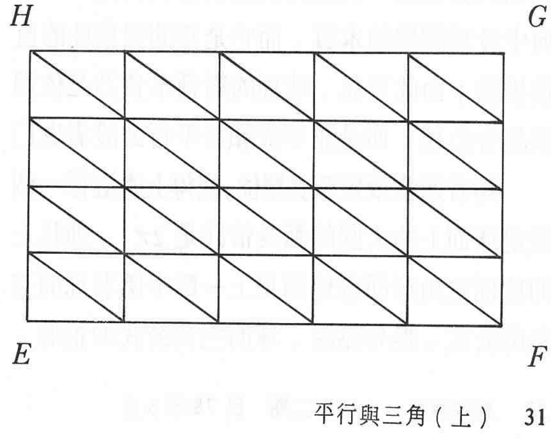
(4)若在空間中存在有一個內角和等於一個平角的三角形，則任何一個三角形的內角和都必然恒等於一個平角。

【證明】：

設有一個三角形$\triangle ABC$的內角和等於一個平角，我們要把上述假設和(3)結合起來證明

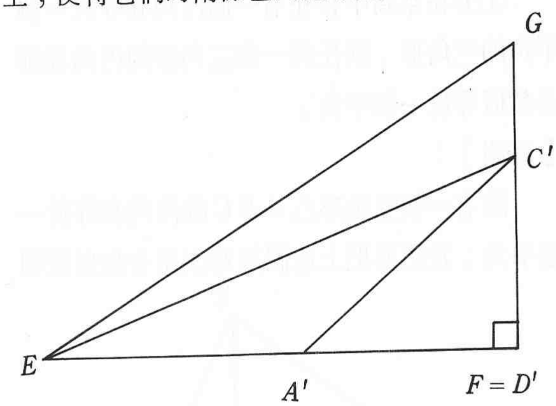


任何一個三角形的內角和都也恒等於一個平角。若$\triangle ABC$本身不是一個直角三角形，則可以把它用一條垂線切成兩個直角三角形。易見$\triangle ACD$和$\triangle CBD$的內角和都也是π。〔因為兩者和是一個平角加上兩個直角，所以是2π；而每一個三角形的內角和則又都必須$\leq\pi$。〕用這樣一個內角和為π的直角三角形，就可以如下圖所示的併法，構造一個長、寬都可以任意地大的四邊形，它的四個內角都是直角。



把上述足夠大的"四直角"四邊形再用對角線分割成兩個直角三角形。則顯然其內角和也是等於π的。

現在設$\triangle A'B'C'$是一個任意的三角形，我們也可以把它切成兩個直角三角形。由此可見，我們只要能夠證明任何直角三角形的內角和恒等於π，也就馬上可以推論任意三角形的內角和都恒等於π。如下圖所示，我們可以把直角三角形$\triangle A'C'D'$移到直角三角形$\triangle EFG$上，使得它們的兩條直角邊相重。



因爲$\triangle EFG$的直角邊是可以構造得任意大的，所以不妨設$\overline{EF}>\overline{A'D'}$，$\overline{FG}>\overline{D'C'}$。再者，結合(3)即可得出

$\triangle EFG$的內角和$=\pi$

$\Rightarrow\triangle EFC'$的內角和$=\pi$

$\Rightarrow\triangle A'D'C'$ 的內角和$=\pi$

(5)空間中和定點O的距離恒等於r的點集叫做一個"半徑爲r的球面"。它和過球心O點的一個平面的交集叫做該球面上的一個大圓。由於空間對於每一平面皆成反射對稱，不難推論球面對於其上任一大圓亦成反射對稱。〔球面對於其上任一大圓的反射對稱性乃是球面幾何中最爲關鍵的本質，而它是空間對稱性的直接推論；由此可見，球面的對稱本質乃是依賴於疊合公理，而是並不依賴於平行公設者也!〕

(6)若適當取定弧長單位，使得上述這樣一個給定球面上的大圓的弧長恰好是2π，則其上的球面三角形同樣地滿足上一節中所有球面三角的公式。換句話說，球面三角公式的推導，其實是可以完全不用到平行公設的！〔這是 Lagrange 的一個重大發現，我們將在下兩節中再給出其證明。〕

Ⅱ歐氏幾何中依賴於平行公設的基本性質舉例：

從歐氏幾何原本問世一直到非歐幾何學的發明，這兩千多年中有很多幾何學家試着用公理Ⅰ～Ⅳ去邏輯推導這個務必證之而後快的平行公設。非歐幾何學的存在事實勝於雄辯地說明這種嘗試是注定要失敗的。但是在這樣許許多多失敗的嘗試中，却發現有許多"歐氏幾何事實"可以用來取代平行公設，亦即那種歐氏幾何中的"事實"A，使得

{公理Ⅰ～Ⅳ加上A} $\Longleftrightarrow$ {公理Ⅰ～Ⅳ加上平行公設}

亦即上述兩組命題是邏輯等價的。其實像上述能夠用來取代平行公設的"歐氏幾何事實"是多得不勝枚舉的，在第四節中，我們將證明**任何一個在非歐幾何學中不成立的歐氏幾何事實都是一個能夠用來取代平行公設者**。下面只是列舉幾個常用、常見者，意在說明歐氏幾何中絕大部份重要定理的論證都是**必須要用到平行公設的**。例如：

(1)三角形的內角和恒等於一平角。

(2)平面上過直線ℓ外一點P，只有一條和直線ℓ不相交的直線（亦即平行線的唯一性）。

(3)三角形面積公式（亦即$\triangle=\dfrac{1}{2}$底×高）。

(4)勾股定理。

(5)相似三角形定理。

(6)圓冪定理。

(7)三角形的面積可以任意大（亦即沒有上界）。

(8)存在有兩個三內角對應相等但是不全等的三角形。

(9)圓周周長L和圓面積A之間具有關係 $L^2=4\pi A$。

⑽歐氏平面的等周不等式（Isoperimetric inequality）是：

$$L^2 \geqslant 4\pi A$$

亦即歐氏平面中的任何一個區域（region）的邊界長L和面積A之間都具有上述最佳不等式關係。

⑾歐氏幾何正弦定理。

⑿歐氏幾何餘弦定理。

⒀三角形面積公式：

$$\triangle = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

⒁三角形內切圓半徑公式：

$$r = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

⒂每個三角形都有一個外接圓。

總之，絕大部份定量歐氏幾何中常用的基本事實，其基礎都必須要根植於平行公設的。由此可見平行公設在歐氏幾何學這個邏輯體系中的重要性實在是既深且廣的。

㈢非歐幾何學的發明：

由歐氏幾何原理問世一直到十九世紀初葉非歐幾何學的發明，其間經歷二千多年的蘊釀探索，而世世代代幾何學家們鍥而不捨地研討的焦點就是平行公設的眞諦何在？早期在歐氏的幾何原本問世後不久的那三、五百年中，如Ptolemy，Pappus，Proclus 等即已致力於試證平行公設。基本上，他們的邏輯研討所得的理解，其實也就是類似於前面所述者：認識到好些基本幾何事實和平行公設之間的邏輯等價性。及至十八世紀，如Saccheri Lambert，Schweikart，Taurinus等，他們對於平行公設的研究已經逐漸轉向探索："平行公設不成立"這個假設究竟會有些什麼和歐氏幾何大異其趣的結論。誠然，當年他們致力於上述探討的初衷其實是希望能夠在這個方向推導得某種"矛盾"，亦即希望由"反證法"的途徑來達成試證平行公設的願望，殊不知這種想要追求的"矛盾"，其實是根本不存在的，但是他們的勞神苦思却又不是徒勞無功的。因爲他們當年所推導而得的那些和歐氏幾何大異其趣的結論，其實就是"非歐幾何空間"的性質！由此可見，他們的工作中實在業已蘊育着非歐幾何學的啓示與萌芽。

在簡單地介紹非歐幾何學的發現的這一段史話之前，讓我們先明確一下"非歐幾何學"（Non-euclidean Geometry）這個名詞的意義。在前面業已證明任何滿足公理Ⅰ—Ⅳ的空間之中，其三角形的內角和只有"恒等於平角"和"恒小於平角"這兩種可能性。以公理Ⅰ—Ⅳ和三角形內角和恒等於平角爲其特徵性質的空間就是歐氏空間，而以公理Ⅰ—Ⅳ和三角形內角和恒小於平角爲其特徵性質的空間則叫做非歐空間（Non-euclidean Space）。非歐幾何學就是研討非歐空間的各種幾何性質和定理的學科。

在耶穌會傳教士Girolams Saccheri（1667～1733）所著的一本命名爲《Euclides ab omni naevo viudicatus》的小册子中，他就業已從"內角和恒小於平角"這個"反平行"的假設推導出好些當年令他難以置信的"非歐幾何命題"。後來，Johann Heinrich Lambert（1728—1777）進而證明：在假想的非歐空間中，兩個三角形的面積之比等於它們的內角和小於平角的"虧額"（defect）之比。而且他還把這個耐人尋味的結果和當年業已熟知的球面幾何知識中，"球面三角形的面積＝半徑平方×內角和的盈額"這個事實作類比。因此他還感嘆地說：從這裏我幾乎可以推斷，平行公理不成立的那種幾何應該可以發生在半徑是虛數的球面上！"

Ferdinand Karl Schweikart（1780—1859）和Franz Adolf Taurinus（1794—1874）叔姪兩位繼續Saccheri和Lambert的工作，在1820 前後業已致力於研討並構造這種內角和恒小於平角的幾何了，他們把這種當

年還籠罩着“假想性”這個神秘的面紗的幾何學叫做 astral geometry，他們努力的方向是研討其應有的三角定律和解析幾何，而且把他們所得的初步成果寫信向當代的數學泰斗 Carl Friedrich Gauss（1777—1855）請教，可惜的是他們這種極有意義和很有前途的方向並沒有得到高斯的讚賞和鼓勵，就此半途而廢了。

平實而論，由平行公設的試證，“反平行”的假設的邏輯探討，一直到非歐幾何學的發現和創建，乃是千、百年世代相承精益求精的研討成果，千錘百鍊的智慧結晶，實非三、兩人所獨創，也大可不必在此作“個人的功績先後之爭”。其實，到了十九世紀二、三十年代，非歐幾何學已經到了水到渠成，呼之欲出的成熟時機了。所以 János Bolyai（1802—1860），Carl Friedrich Gauss 和 Nikolai Ivanovich Lobachevsky（1792—1856）都在那一段時期，各別發現非歐幾何學，實在是相當自然，不足為奇的現象。茲簡略地介紹他們三位各別在這方面所作的重大貢獻。

János Bolyai 的貢獻：János Bolyai 是匈牙利人，Wolfgang Farkas Bolyai 之子，他父親早年和高斯有同窗之誼，潛心研討平行公設之試證多年，所以他也很早就從事於“平行公設”方面的研究，可以說乃是家學淵源。但是從他們父子的書信來看，Wolfgang 其實是勸阻 János，希望他不要再鑽進“平行公設之論證”這個徒耗他自己半生精力的科研難題的，可是 János 乃是初生之犢，英氣奮發的二十來歲的新銳，他自有他嶄新的想法和毅力。在他寫給其父親的 1823 年十一月廿三日的信中，他已經充分自信地知道他所要創造的“新幾何”業已成功在望的了。他把他重大的創作，簡要精鍊地寫成一篇叫做“絕對幾何學”（The Science of Absolute Space）的短文（僅僅只有廿六頁），作為附錄形式發表在他父親所著的一本叫做 Tentamen Juventutem Studiosam in Element Matheseos（拉丁文，可以譯為《好學青年基礎數學讀本》的書中（1831 初版）。“絕對幾何學”僅僅以公理 I～IV 為出發點，簡鍊精到地論證了一系列重要深刻的定理。這些定理顯然是不論平行公設是否成立都是“絕對”成立的。（這也就是他稱之為絕對幾何的原因）。其中他所證的絕對幾何正弦定律堪稱一絕。

Bolyai 正弦定律：在歐氏、非歐或球面這三種幾何中的任給三角形△ABC，其角邊關係都滿足

$$\frac{\sin A}{\odot a}=\frac{\sin B}{\odot b}=\frac{\sin C}{\odot c}$$

其中 a、b、c 分別是 A、B、C 的對邊邊長；$\odot a$、$\odot b$、$\odot c$ 則分別表示該空間中分別以 a、b、c 為其半徑的圓周周長。〔我們將在下一節中給出上述定律的統一證明，並且討論它在上述三種幾何學中的基本重要性。〕

János Bolyai 這篇長僅 26 頁的論文原文是用拉丁文寫的，在 Roberto Bonola 所著的 Non-Euclidean Geometry, Dover 1955（reprint），書中把它翻譯為英文列於附錄。是一篇精到美妙的千古奇文，在此鄭重推介讀者找來好自欣賞一番。

Nikolai Ivavovich Lobachevsky 的貢獻：Lobachevsky 是俄國人，早年就讀於 University of Kazan，在 1826—46 間任教於該校。他在 1829 到 1855 關於非歐幾何學發表過多篇論文和幾本專著，例如：

(1)“On the Foundations of Geometry”, Kazan Journal（1829—30）。

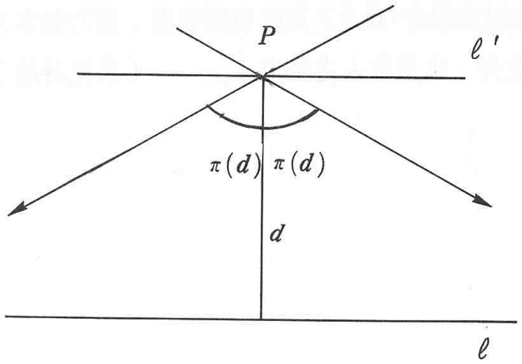
(2)“New Fomdations of Geometry with a Complete Theory of Parallels”, Kazan Journal（1835—37）。

(3)Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallelinien（1840，德文書）。

(4)Pangéométrie（1855，法文書）。

他的基本想法是直截了當地採用平行公設

不成立爲基本起點，有系統地研討這種非歐空間的幾何性質，特別是其中直角三角形的三角定律（亦即直角三角形的角邊之間的函數關係）。所以他採取的主攻方向是非歐空間的三角學和解析幾何學，例如在非歐空間中的一個平面上，其平行公理改爲：過直線ℓ外一點P和

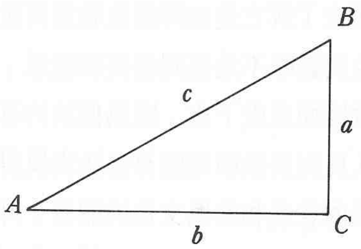


ℓ共面而不相交的直線有無窮多條，如上圖所示，不交線和相交線之間有兩條分界者，它們叫做過P點的ℓ的左、右平行線。它們和由P點引向ℓ的垂線之間的夾角是P點到ℓ的距離d的函數$\pi(d)$。他證明上述函數滿足公式

$$\tan\frac{\pi(d)}{2}=e^{-\frac{d}{k}}$$

其中k是一個全空間的幾何常數。運用上述基本的幾何函數，他求得非歐空間的直角三角形的三角公式如下，即

$$\begin{cases}\cot\pi(a)=\cot\pi(c)\cdot\sin A\,,\\ \sin A=\cos B\,\sin\pi(b)\,,\\ \sin\pi(c)=\sin\pi(a)\,\sin\pi(b)\,。\end{cases}$$



假若用上述決定$\pi(d)$的公式代入第一式，即可得出

$$\sinh\frac{a}{k}=\sinh\frac{c}{k}\sin A$$

〔上述公式其實也就是Bolyai正弦定理中的特殊情形，即$\sin C=\sin\frac{\pi}{2}=1$，$\odot a=2\pi\cdot k\sinh\frac{a}{k}$，$\odot c=2\pi k\sinh\frac{c}{k}$ 的情形，請參看下面兩節的討論。〕

Carl Friedrich Gauss 的貢獻：高斯是當年舉世公認的最偉大數學家，他在數學各分支中都有重大深刻的貢獻。因此他對於幾何基礎論中這樣一個重大的基本問題一直在鍥而不捨地下功夫研究，而且在這方面有很深刻的造詣，完全是可想而知的，但是令人難以理解的是他在這方面始終秘而不宣，不曾發表過片言隻字，只有在他死後整理他的遺稿及書信中，世人才能眞正看到他在平行公設的探討和“非歐空間”的奧秘的確是早已知之甚詳，造詣良多的了，例如在1817年他給W. Olbers的信中就寫着：我是愈來愈相信歐氏幾何的必然性是無法證明的；在1824年給F.A. Taurinus 的信中又寫着：三角形內角和恒小於平角的假設可以導致一種奇異的幾何，它和我們熟悉的歐氏幾何相當不同，但是它是全然合理的，而且我自覺已充分掌握了它的基本性質……，我試圖從這種非歐幾何推導矛盾，亦即它的不合理性，總是徒勞無功的。而其中有一點和我們習常的概念相悖的是這種空間具有一個絕對的度量單位。再者，在1829年寫給F.W. Bessel的信中，他也提起他因爲怕會引起無謂的紛爭和非議而不想發表他在非歐幾何學上的發現。總之，高斯也在1820—30年代業已想到了非歐幾何學，而且也充分掌握了它的重要本質，例如絕對度量單位的存在，半徑爲r的圓周周長是$2\pi k\sinh\frac{r}{k}$，以及上述公式$\tan\frac{\pi(d)}{2}=e^{-\frac{d}{k}}$ 等等。但是他因爲要避免無謂的紛爭而保密不發表的作法却不幸地反而是導致後來“個人功績的先後之爭”的主因。〔註〕

〔註〕：當年在 János Bolyai和 Nikolai Ivauovich Lobachevsky二位青年後學

各別把他們重大的新發現寄給高斯這位當年舉世公認的數學泰斗評品時，使得他們這兩位新銳十分吃驚和失望的是：高斯宣稱他早已發現了非歐幾何，只不過他一直還沒有下功夫把它整理發表罷了！這使得 János Bolyai 終生氣憤難平，以他早年即已光芒燦爛的數學才華，自從那短短的26頁的劃時代傑作之後，就此絕筆於數學，令人浩嘆；而 Nikolai Lobachevsky 則終其一生，因當代數學界一直置其如此重要的發現於不顧而深以爲憾，引恨而終。平實而論，以高斯當年無比崇高的地位，而且自己一直把自己的所思所得秘而不宣，也始終沒有整理成體系井然的手稿。實在大可不必和兩位青年後生爭先後之功。他當年沒能一本理當從善如流的學者、長者之風度獎掖後進，實乃他本人之失，也是世人之失也。 （未完待續）