約瑟芬的鑽石

黃光明

傳說中[1]拿破輪證明了下一定理：

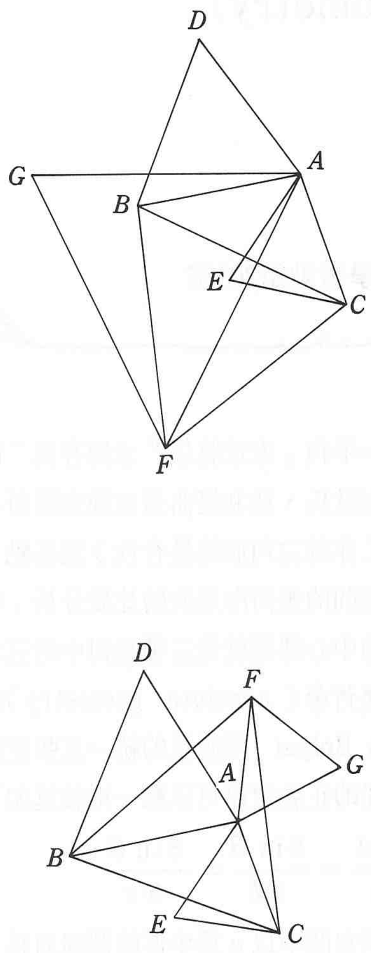
定理一：在一個任意三角形的三條邊上各向外作一等邊三角形，則此三個等邊三角形的重心也相連成等邊三角形。

這一個等邊三角形通稱爲「拿破輪外三角」。之後耶格隆姆[2]把定理一中「向外」一詞換成「向內」，也得一「偶定理」，所得的等邊三角形稱爲「拿破崙內三角」。

如果在某些邊上向外，在其它邊上向內作等邊三角形，是否會得到類似的結果？勤快的讀者可能已經開始作圖起來，聰明的讀者則會想到如果答案是肯定的話，則拿破輪的弟弟拿好輪一定早已想到，還會等到兩百年後的我們來發現嗎？的確如此，天下沒有這麼容易的事，但同時天下也沒有難事，如果一介武夫拿破輪能定出一些簡單的規則從而造出一個等邊三角形的話，我們就不能略爲變動規則造出更多

的等邊三角形嗎？以下請看我們的手段。

定理二：令ΔABC爲一任意三角形，令ΔABD爲向外，ΔACE爲向內的等邊三角形，令ΔBCF爲向外（或向內）的等邊三角形，令ΔAFG爲一等邊三角形且G與D在AF線的同側（或異側），則ΔDEG爲一等邊三角形（見圖一）。



圖一

證明：很容易驗證$\Delta GAD=\Delta FAB$，$\Delta EAG=\Delta CAF$，$\Delta DAE=\Delta BAC$，故$|DG|=|BF|$，$|GE|=|FC|$，$|ED|=|CB|$。因此$\Delta DEG=\Delta BCF$並爲一等邊三角形，證畢。

我們可以改變定理二中每條邊向外或向內的規定（但向外和向內必須兩者都有），而造出六個等邊三角形來。這六個三角形成對的配置成三個鑽石形（即菱形，英文同一字），爲了紀念拿破輪和約瑟芬偉大的愛情，我們稱這些菱形爲「約瑟芬鑽石」，以和「拿破輪三角」先後輝映於世。

參考資料

(1) H. S. M. Coxeter and S. L. Greitzer, *Geometry Revisited*, *New Mathematical Library* Vol. 19, Random House, New York, 1967.

(2) I. M. Yaglom, *Geometric Transformations*, *New Mathematical Library*, Vol. 8, Random House, New York, 1962.

—本文作者任職於美國AT&T Bell實驗室—