# 以複數爲座標的解析幾何淺論(Ⅵ)

## 第六章　二次曲線之參數方程式

許振榮　呂素齡

### §6.1　橢圓和双曲線之參數方程式

橢圓之標準方程式爲

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (b<a)$$

如果令 $b^2=a^2(1-\mu^2)$，則

$$\mu^2=\frac{a^2-b^2}{a^2}, \quad 1>\mu$$

故

$$\mu=\pm\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\pm\frac{c}{a},$$

$$c=\sqrt{a^2-b^2}$$

而 $(\pm c, 0)$ 爲二焦點之座標。

雙曲線之標準方程式爲

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

若令　　$b^2=a^2(\mu^2-1)$，則

$$\mu^2=\frac{a^2+b^2}{a^2}, \quad \mu>1$$

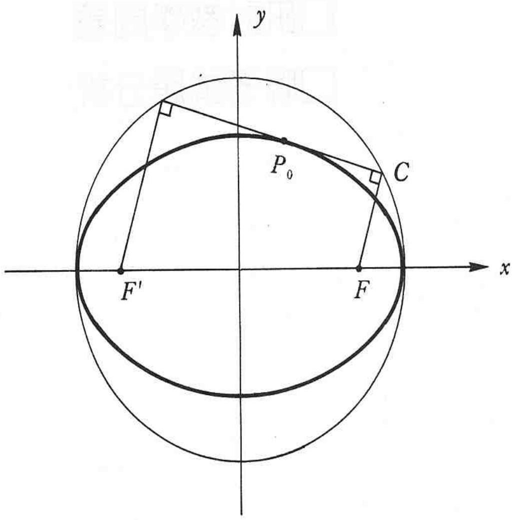


圖 6-1

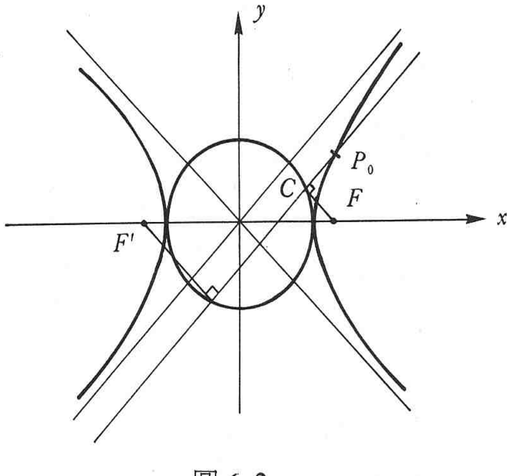


圖 6-2

故 $$\mu=\pm\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}=\frac{c}{a},\quad c=\sqrt{a^2+b^2}$$

因此（$\pm c$，0）爲其焦點之座標。

如上所述：橢圓和雙曲線之方程式均可寫成下列形狀：

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2(1-\mu^2)}=1 \tag{6.1}$$

當 $\mu<1$ 時 (6.1) 表橢圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，$\mu=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$，$c=a\mu$

$\mu>1$ 時 (6.1) 表雙曲線 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，$\mu=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$，$c=a\mu$

而（$\pm c$，0）爲所考慮二次曲線之焦點。

現在來求有心二次曲線 (6.1) 的複數參數方程式。

設點 $P_0(x_0,y_0)$ 爲此有心二次曲線上任一點。則在 $P_0$ 處的切線之方程式爲

$$y-y_0=-\frac{x_0}{y_0}(1-\mu^2)(x-x_0)$$

此因由 (6.1) 可得

$$\frac{2x}{a^2}+\frac{2yy'}{a^2(1-\mu^2)}=0\text{，而 }y_0'=-\frac{x_0}{y_0}(1-\mu^2)\text{ 之故。}$$

經過焦點（$c$，0）與此切線垂直的直線方程式爲

$$y=\frac{y_0}{x_0(1-\mu^2)}(x-c)$$

先求此直線與上述切線之交點。代入此 $y$ 值於上列切線之方程式後，可得

$$x=\frac{a(x_0+a\mu)}{a+\mu x_0}=\frac{a(x_0+c)}{a+\mu x_0}\text{。}$$

把此 $x$ 值代入於此垂直直線之方程式中，可得

$$y=\frac{ay_0}{a+\mu x_0}\text{。}$$

即此直線與切線之交點爲

$$\left(\frac{a(x_0+a\mu)}{a+\mu x_0},\frac{ay_0}{a+\mu x_0}\right)\text{。}$$

因經過簡單計算可證明

$$\left(\frac{x_0+a\mu}{a+\mu x_0}\right)^2+\left(\frac{a y_0}{a+\mu x_0}\right)^2=1\ ,$$

故此交點在以原點為中心，半徑為 $a$ 之圓周上。

現在設

$$t_0=\frac{x_0+a\mu}{a+\mu x_0}+\frac{i\,y_0}{a+\mu x_0}\ , \tag{6.2}$$

則 $|t_0|=1$，而 $c$ 之座標為 $a\,t_0$。此時

$$\overline{t}_0=\frac{1}{t_0}=\frac{x_0+a\mu}{a+\mu x_0}-\frac{i\,y_0}{a+\mu x_0}\ ,$$

故 $$\frac{1}{2}\left(t_0+\frac{1}{t_0}\right)=\frac{x_0+a\mu}{a+\mu x_0}\ ,\ \frac{1}{2}\left(t_0-\frac{1}{t_0}\right)=\frac{i\,y_0}{a+\mu x_0}\ 。$$

從第一式，可得 $\dfrac{t_0^2+1}{2t_0}\ (a+\mu x_0)=x_0+a\mu$

從此式又可得 $x_0=\dfrac{a_0\,(t_0^2-2\mu t_0+1)}{-\mu t_0^2+2t_0-\mu}$，

而 $a+\mu x_0=\dfrac{a\,t_0\,(1-\mu^2)}{-\mu t_0^2+2t_0-\mu}$

因此 $i\,y_0=\left(\dfrac{t_0^2-1}{2t_0}\right)\left(\dfrac{a\,t_0\,(1-\mu^2)}{-\mu t_0^2+2t_0-\mu}\right)=\dfrac{a\,(1-\mu^2)(t_0^2-1)}{-\mu t_0^2+2t_0-\mu}$

因此，$P_0$ 之複數座標為

$$\begin{aligned} z_0=x_0+i\,y_0&=a\left[\frac{t_0^2-2\mu t_0+1}{-\mu t_0^2+2t_0-\mu}+\frac{t_0^2-1-\mu^2 t_0^2+\mu^2}{-\mu t_0^2+2t_0-\mu}\right]\\ &=a\left[\frac{(2-\mu^2)\,t_0^2-2\mu t_0+\mu^2}{-\mu t_0^2+2t_0-\mu}\right]。\end{aligned}$$

所以，有心二次曲線 (6.1) 之複數參數方程式為

$$z=a\left[\frac{(2-\mu^2)\,t^2-2\mu t+\mu^2}{-\mu^2+2t-\mu}\right]。 \tag{6.3}$$

其次，來求此有心二次曲線，在點 $P_0$ 處的切線之複數方程式。先求直線 $FC$ 之方程式，因 $F$ 之座標為 $a\mu$，點 $C$ 之複數座標為 $a\,t_0$，其方程式為

$$\begin{vmatrix} z & \overline{z} & 1\\ a\mu & a\mu & 1\\ a\,t_0 & \dfrac{a}{t_0} & 1\end{vmatrix}=0$$

即

$$(6.4)\qquad (\mu t_0-1)z-t_0(\mu-t_0)\bar{z}=a\mu(t_0^2-1)\ 。$$

切線 $P_0C$ 爲經過 $C$ 而與此直線 (6.4) 垂直的直線，故其方程式爲

$$(\mu t_0-1)z+t_0(\mu-t_0)\bar{z}=(\mu t_0-1)at_0+t_0(\mu-t_0)\frac{a}{t_0}\ ,$$

即

$$(6.5)\qquad (\mu t_0-1)z+t_0(\mu-t_0)\bar{z}=a[(\mu t_0-1)t_0+(\mu-t_0)]$$

## §6.2 例 題

**例題：**給了五直線時，每次選其中四直線有五種不同方法，故可得五個完全四邊形。考慮這些五個完全四邊形之各完全四邊形的Newton 線，則得五條 Newton 線，這些五條 Newton 稱爲共點。

**證明：**給了五條直線時，這五條直線可決定一個有心二次曲線（可能是一橢圓，亦可能是一雙曲線）。不限制討論之範圍，我們可假定此有心二次曲線爲

$$(6.6)\qquad z=\frac{(2-\mu^2)t^2-2\mu t+\mu^2}{-\mu^2+2t-\mu}$$

即不妨假設在 (6.3) 式中 $a=1$。此時所與的五直線可視爲此有心二次曲線之五條切線：

$$(6.7)\qquad (\mu t_i-1)z+t_i(\mu-t_i)\bar{z}=(\mu t_i-1)t_i+(\mu-t_i)\ ,\quad i=1,2,3,4,5\ 。$$

對應於 $t_1, t_2$ 之二條切線之交點 $z_{12}$ 可求之如下：從二切線之方程式

$$\begin{cases}(\mu t_1-1)z+t_1(\mu-t_1)\bar{z}=(\mu t_1-1)t_1+(\mu-t_1)\\ (\mu t_2-1)z+t_2(\mu-t_2)\bar{z}=(\mu t_2-1)t_2+(\mu-t_2)\end{cases}$$

消去 $\bar{z}$，可得

$$(6.8)\qquad z_{12}=\frac{t_1t_2(1-\mu^2)+(\mu-t_1)(\mu-t_2)}{-\mu t_1t_2-\mu+t_1+t_2}=\frac{(2-\mu^2)t_1t_2-\mu(t_1+t_2)+\mu^2}{-\mu t_1t_2-\mu+(t_1+t_2)}$$

而

$$(6.9)\qquad \bar{z}_{12}=\frac{(1-\mu^2)(\mu t_1-1)(\mu t_2-1)}{-\mu-\mu t_1t_2+(t_1+t_2)}=\frac{(2-\mu^2)-\mu(t_1+t_2)+\mu^2t_1t_2}{-\mu-\mu t_1t_2+(t_1+t_2)}$$

同理對於 $t_3, t_4$ 二直線之交點 $z_{34}$ 爲

$$(6.10)\qquad z_{34}=\frac{(2-\mu^2)t_3t_4-\mu(t_3+t_4)+\mu^2}{-\mu t_3t_4-\mu+t_3+t_4}\ ,\quad \bar{z}_{34}=\frac{(2-\mu^2)-\mu(t_3+t_4)+\mu^2t_3t_4}{-\mu-\mu t_3t_4+(t_3+t_4)}\ 。$$

現在我們來求對應於 $t_1$，$t_2$，$t_3$，$t_4$ 等四直線所成的完全四邊形之 Newton 線之方程式。連結對頂點 $z_{12}$ 和 $z_{34}$ 之線段之中點爲$\frac{1}{2}(z_{12}+z_{34})$。連結對頂點 $z_{14}$ 和 $z_{23}$ 之線段之中點爲$\frac{1}{2}(z_{14}+z_{23})$。經過此二中點之直線之方程式爲

$$\begin{vmatrix} z & \bar{z} & 1 \\ \frac{1}{2}(z_{12}+z_{34}) & \frac{1}{2}(\bar{z}_{12}+\bar{z}_{34}) & 1 \\ \frac{1}{2}(z_{14}+z_{23}) & \frac{1}{2}(\bar{z}_{14}+\bar{z}_{23}) & 1 \end{vmatrix}=0$$

即

$$(\bar{z}_{12}+\bar{z}_{34}-\bar{z}_{14}-\bar{z}_{23})z-(z_{12}+z_{34}-z_{14}-z_{23})\bar{z}+\frac{1}{2}[(z_{12}+z_{34})(\bar{z}_{14}+\bar{z}_{23})-(z_{14}+z_{23})(\bar{z}_{12}+\bar{z}_{34})]=0 \tag{6.11}$$

由 (6.8) 及 (6.10) 可得

$$z_{12}+z_{34}=\frac{-2\mu(2-\mu^2)\sigma_4+2\sigma_3-2\mu\sigma_2+2\mu^2\sigma_1-2\mu^3}{(-\mu t_1t_2-\mu+t_1+t_2)(-\mu t_3t_4-\mu+t_3+t_4)}, \tag{6.12}$$

而

$$\bar{z}_{12}+\bar{z}_{34}=\frac{-2\mu^3\sigma_4+2\mu^2\sigma_3-2\mu\sigma^2+2\sigma_1-2\mu(2-\mu^2)}{(-\mu t_1t_2+(t_1+t_2)-\mu)(-\mu t_3t_4+(t_3+t_4)-\mu)}。 \tag{6.13}$$

同理

$$z_{14}+z_{23}=\frac{-2\mu(2-\mu^2)\sigma_4+2\sigma_3-2\mu\sigma^2+2\mu^2\sigma_1-2\mu^3}{(-\mu t_1t_4-\mu+t_1+t_4)(-\mu t_2t_3-\mu+t_2+t_3)}, \tag{6.14}$$

$$\bar{z}_{14}+\bar{z}_{23}=\frac{-2\mu^3\sigma_4+2\mu^2\sigma_3-2\mu\sigma_2+2\sigma_1-2\mu(2-\mu^2)}{(-\mu t_1t_4-\mu+t_1+t_4)(-\mu t_2t_3-\mu+t_2+t_3)}。 \tag{6.15}$$

由 (6.12) 和 (6.14) 可得

$$\begin{aligned}(z_{12}+z_{34})-(z_{14}+z_{23}) &=\frac{[-2\mu(2-\mu^2)\sigma_4+2\sigma_3-2\mu\sigma_2+2\mu^2\sigma_1-2\mu^3](t_1-t_3)(t_2-t_4)(\mu^2-1)}{(-\mu t_1t_2-\mu+t_1+t_3)(-\mu t_3t_4-\mu+t_3+t_4)(-\mu t_1t_4-\mu+t_1+t_4)(-\mu t_2t_3-\mu+t_2+t_3)} \\ &=[-2\mu(2-\mu^2)\sigma_4+2\sigma_3-2\mu\sigma_2+2\mu^2\sigma_1-2\mu^3] \\ &\quad\times\left\{\frac{1}{(-\mu t_1t_2-\mu+t_1+t_2)(-\mu t_3t_4-\mu+t_3+t_4)}-\frac{1}{(-\mu t_1t_2-\mu+t_1+t_4)(-\mu t_2t_3-\mu+t_2+t_3)}\right\}\end{aligned} \tag{6.16}$$

同理

$$\begin{aligned}&(\bar{z}_{12}+\bar{z}_{34})-(\bar{z}_{14}+\bar{z}_{23}) \\ &=[-2\mu^3\sigma_4+2\mu^2\sigma_3-2\mu\sigma_2+2\sigma_1-2\mu(2-\mu^2)]\end{aligned} \tag{6.17}$$

$$\times\left\{\frac{1}{[-\mu t_1t_2+(t_1+t_2)-\mu][-\mu t_3t_4+(t_3+t_4)-\mu]}\right.$$
$$\left.-\frac{1}{[-\mu t_2t_3+(t_2+t_3)-\mu][-\mu t_1t_4+(t_1+t_4)-\mu]}\right\}。$$

又從(6.12)，(6.13)，(6.14)及(6.15)可得

$$\begin{aligned}
(6.18)\qquad & (z_{12}+z_{34})(\overline{z}_{14}+\overline{z}_{23})-(z_{14}+z_{23})(\overline{z}_{12}+\overline{z}_{34})\\
&=[-2\mu^3\sigma_4+2\mu^2\sigma_3-2\mu\sigma_2+2\sigma_1-2\mu(2-\mu^2)]\\
&\quad\times[-2\mu(2-\mu^2)\sigma_4+2\sigma_3-2\mu\sigma_2+2\mu^2\sigma_1-2\mu^3]\\
&\quad\times\left\{\frac{\dfrac{1}{[-\mu t_1t_2+(t_1+t_2)-\mu][-\mu t_3t_4+(t_3+t_4)-\mu]}}{\cdot[-\mu t_1t_4+(t_1+t_4)-\mu][-\mu t_2t_3+(t_2+t_3)-\mu]}\right.\\
&\quad\left.-\frac{\dfrac{1}{[-\mu t_1t_4+(t_1+t_4-\mu][-\mu t_2t_3+(t_2+t_3)-\mu]}}{\cdot[-\mu t_1t_2+(t_1+t_2)-\mu][-\mu t_3t_4+(t_3+t_4)-\mu]}\right\}\\
&=0
\end{aligned}$$

故所求的方程式(6.11)可寫成下列形狀

$$\begin{aligned}
(6.19)\qquad & [-2\mu^2\sigma_4+2\mu^2\sigma_3-2\mu\sigma_2+2\sigma_1-2\mu(2-\mu^2)]z\\
&-[-2\mu(2-\mu^2)\sigma_4+2\sigma_3-2\mu\sigma_2+2\mu^2\sigma_1-2\mu^3]\overline{z}=0
\end{aligned}$$

因爲此方程式之係數均爲關於 $t_1, t_2, t_3, t_4$ 成對稱，經過二點 $\frac{1}{2}(z_{12}+z_{34})$ 及 $\frac{1}{2}(z_{13}+z_{24})$ 的直線亦與此直線相同。故連接三對對頂點的三線段之中點 $\frac{1}{2}(z_{12}+z_{34})$，$\frac{1}{2}(z_{13}+z_{24})$，$\frac{1}{2}(z_{14}+z_{23})$ 均在此直線(6.17)上。故此直線(6.17)爲對應於 $t_1, t_2, t_3, t_4$ 的四直線所決定的完全四邊形之 Newton 線。顯然此Newton線經過上述有心二次曲線之中心（即原點）。因爲對應於 $t_1, t_2, t_3, t_4, t_5$ 的五直線均與此有心二次曲線相切，故上述的五個完全四邊形之五條Newton 線均經過此有心二次曲線之中心。

## §6.3　比較簡單的橢圓參數方程式

上述§6.1的有心二次曲線的複數參數方程式比較複雜，故要應用時，如上述§6.1之例所示，計算也難免複雜一點。爲了避免複雜的計算，我們想討論比較簡單的橢圓參數方程式。

(6.20) $$x=a\cos\theta,\quad y=b\cos\theta,\quad a>b$$

爲橢圓之參數方程式。今令

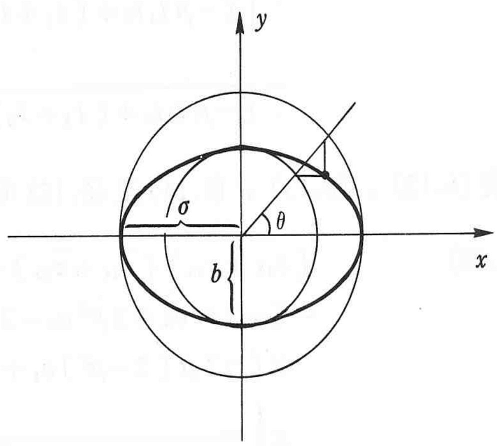


圖 6-3

(6.21) $$t=\cos\theta+i\sin\theta,$$

則 $$\bar{t}=\frac{1}{t}=\cos\theta-i\sin\theta\ 。$$

故

(6.22) $$\cos\theta=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right),$$

$$i\sin\theta=\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)$$

故 $$z=x+iy=\frac{a}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)+\frac{b}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)=\frac{(a+b)t^2+(a-b)}{2t}$$

即

(6.23) $$z=(a+b)\left[\frac{t^2+\dfrac{a-b}{a+b}}{2t}\right]=(a+b)\left[\frac{t^2+\dfrac{a^2-b^2}{(a+b)^2}}{2t}\right]$$

$$=(a+b)\left[\frac{t^2+\dfrac{\mu^2}{(a+b)^2}}{2t}\right]$$

此處 $\mu=\sqrt{a^2-b^2}$ 。

現在來求上列橢圓 (6.20) 在 $P_0\ (a\cos\theta_0\ \ b\sin\theta_0)$ 處的切線參數方程式。在點 $P_0$ 處的切線方程式爲

(6.24) $$\frac{x\cos\theta_0}{a}+\frac{y\sin\theta_0}{b}=1$$

在此方程式中代入 (6.22) 及

$$x=\frac{1}{2}(z+\bar{z}),\quad iy=\frac{1}{2}(z-\bar{z})$$

可得 $$\frac{b}{4}\,\frac{t_0^2+1}{t_0}(z+\bar{z})-\frac{a}{4}\,\frac{t_0^2-1}{t_0}(z-\bar{z})=ab$$

即 $$\left[\frac{b(t_0^2+1)}{4t_0}-\frac{a(t_0^2-1)}{4t_0}\right]z+\left[\frac{b(t_0^2+1)}{4t_0}+\frac{a(t_0^2-1)}{4t_0}\right]\bar{z}=ab$$

從此式可得 $$[(a+b)-(a-b)t_0^2]z+[(a+b)t_0^2-(a-b)]\bar{z}=4abt_0$$

以 $(a+b)$ 除此式之兩邊可得

$$(6.25)\qquad \left[1-\frac{a-b}{a+b}t_0^2\right]z+\left[t_0^2-\frac{a-b}{a+b}\right]\bar{z}=\frac{4ab}{a+b}t_0$$

故
$$\left[1-\frac{a^2-b^2}{(a+b)^2}t_0^2\right]z+\left[t_0^2-\frac{a^2-b^2}{(a+b)^2}\right]\bar{z}=\frac{4ab}{a+b}t_0\text{。}$$

因爲 $\mu^2=a^2-b^2$，可得

$$(6.26)\qquad \frac{4ab}{a+b}=(a+b)-\frac{\mu^4}{(a+b)^3}$$

故 (6.25) 式可寫成下列形狀：

$$(6.27)\qquad \left[1-\frac{\mu^2}{(a+b)^2}t_0^2\right]z+\left[t_0^2-\frac{\mu^2}{(a+b)^2}\right]\bar{z}=\left[(a+b)-\frac{\mu^4}{(a+b)^3}\right]t_0$$

在應用時，我們不妨假設 $(a+b)=1$。此時橢圓之參數方程式和在 $t$ 處的切線方程式可寫成下列簡單的形狀：

$$(6.28)\qquad z=\frac{t^2+\mu^2}{2t}$$

$$(6.29)\qquad (1-\mu^2t^2)z+(t^2-\mu^2)\bar{z}=(1-\mu^4)t\text{。}$$

## §6.4 §6.3之例題的別解

應用 §6.3 之討論，我們想給 §6.2 之例題的別解。我們來討論所給的五直線切於一橢圓的情形。在此情形下，我們不妨假設此五直線所切的橢圓之方程式爲 (6.28) 式。故所與之五直線之方程式爲

$$(6.30)\qquad (1-\mu^2t_i^2)z+(t_i^2-\mu^2)\bar{z}=(1-\mu^4)t_i,\quad i=1,2,3,4,5$$

如果在此情形下，可證 §6.2 之例成立，則使用在 §6.1 有心二次曲線處所討論的橢圓之程式亦可證明 §6.2 之例成立。因爲在 §6.1 中之討論對於橢圓時和對於雙曲線時完全相同，故對於五直線切於一雙曲線時其計算完全與五直線切於橢圓時完全相同，故可證 §6.2 之例成立。因之，我們僅要證明五直線切於一橢圓時的情形即可。如此，應用 §6.3 之討論常常可避免比較複雜的計算。

先求對應於 $t_1$，$t_2$ 的二條直線之交點 $z_{12}$。把對應於 $t_1$，$t_2$ 之 (6.30) 之二方程式邊相減就可得

$$(6.31)\qquad z_{12}=\frac{t_1t_2+\mu^2}{t_1+t_2}$$

**注意：**從此式，可推測：對應於 $t_1$ 的切線可由下列參數方程式表之：

(6.32) $$z=\frac{t\,t_1+\mu^2}{t+t_1}\text{。}$$

現在考慮對應於 $t_1$, $t_2$, $t_3$, $t_4$ 的四直線所成的完全四邊形之三對對頂點所成的三線段之中點:

(6.33) $$z_1=\frac{1}{2}\left\{\frac{t_1t_2+\mu^2}{t_1+t_2}+\frac{t_3t_4+\mu^2}{t_3+t_4}\right\},\quad z_2=\frac{1}{2}\left\{\frac{t_1t_4+\mu^2}{t_1+t_4}+\frac{t_2t_3+\mu^2}{t_2+t_3}\right\},$$
$$z_3=\frac{1}{2}\left\{\frac{t_1t_3+\mu^2}{t_1+t_3}+\frac{t_2t_4+\mu^2}{t_2+t_4}\right\}\text{。}$$

經過二點 $z_1$, $z_2$之直線的方程式爲

$$\begin{vmatrix} z & \bar{z} & 1 \\ z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \end{vmatrix}=0$$

即

(6.34) $$(\bar{z}_1-\bar{z}_2)z-(z_1-z_2)\bar{z}+(z_1\bar{z}_2-z_2\bar{z}_1)=0$$

由 (6.33) 可得

(6.35) $$z_1=\frac{\sigma_3+\mu^2\sigma_1}{2(t_1+t_2)(t_3+t_4)},\quad \bar{z}_1=\frac{\sigma_1+\mu^2\sigma_3}{2(t_1+t_2)(t_3+t_4)}\text{。}$$

故方程式 (6.32) 可寫成下列形狀 :

$$(\sigma_1+\mu^2\sigma_3)\left[\frac{1}{2(t_1+t_2)(t_3+t_4)}-\frac{1}{2(t_1+t_4)(t_2+t_3)}\right]z$$
$$-(\sigma_3+\mu^2\sigma_1)\left[\frac{1}{2(t_1+t_2)(t_3+t_4)}-\frac{1}{2(t_1+t_4)(t_2+t_3)}\right]\bar{z}$$
$$+\frac{A}{4(t_1+t_2)(t_3+t_4)(t_1+t_4)(t_2+t_3)}=0$$

此處 $$A=(\sigma_3+\mu^2\sigma_1)(\sigma_1+\mu^2\sigma_3)-(\sigma_3+\mu^2\sigma_1)(\sigma_1+\mu^2\sigma_3)=0$$

故所求的直線之方程式爲

(6.36) $$(\sigma_1+\mu^2\sigma_3)z-(\sigma_3+\mu^2\sigma_1)\bar{z}=0$$

二點 $z_1$, $z_3$ 所決定的直線亦爲 (6.34) 。即 (6.34) 所表示的直線經過 $z_1$, $z_2$, $z_3$ 三點。因此，直線 (6.34) 爲對應於 $t_1$, $t_2$, $t_3$, $t_4$ 的四直線所成的完全四邊形之 Newton 線。此直線經過橢圓 (6.26) 之中心（即原點）。同理其他四個完全四邊形 Newton 線亦經過橢圓 (6.26) 之中心，故五條 Newton 線爲共點。

## §6.5 二次曲線之參數方程式

設$g$爲一定直線，$O$爲一定點。又設從點$O$至直線$g$之距離爲$\frac{a}{2}$，如圖6-4所示。今選經過$O$與所與直線$g$垂直之直線爲$x$軸，經過$O$與$g$平行的直線爲$y$軸。設從點$P$至直線$g$所作的垂線之垂足爲$N$。我們考慮滿足$\frac{\overline{PO}}{\overline{PN}}=e$的點$P$之軌跡，此軌跡爲二次曲線。設$OP=r$，直線$OP$與$x$軸所成的角爲$\theta$，則

$$\overline{PN}=\frac{a}{2}-r\cos\theta$$

故
$$\frac{r}{\frac{a}{2}-r\cos\theta}=e$$

故得

(6.37)
$$r=\frac{ae}{2(1+e\cos\theta)}\equiv f(\theta)$$

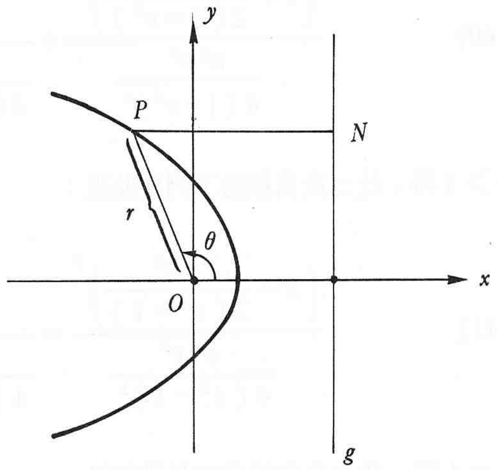

圖6-4

此爲二次曲線之極方程式。今設$t=\cos\theta+i\sin\theta$，則

$$\cos\theta=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right),\quad i\sin\theta=\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)$$

代入$\cos\theta$之表現式於上列極方程式中可得

$$r=\frac{aet}{2t+e(t^2+1)}$$

因爲$z=x+iy=r(\cos t+i\sin\theta)=rt$，故得

(6.38)
$$z=\frac{aet^2}{et^2+2t+e}$$

此爲二次曲線之參數方程式，$t$爲參數，是在單位圓上變動的。

因爲
$$x=r\cos\theta=\frac{ae\cos\theta}{2(1+e\cos\theta)},\quad y=r\sin\theta=\frac{ae\sin\theta}{2(1+e\cos\theta)}$$

可得　　$1+e\cos\theta=\dfrac{a}{a-2x}$，

而得　　$\cos\theta=\dfrac{2x}{e(a-2x)}$，　$\sin\theta=\dfrac{2y}{e(a-2x)}$。

因此可得

$$\frac{4x^2}{e^2(a-2x)^2}+\frac{4y^2}{e^2(a-2x)^2}=1 \tag{6.39}$$

故當 $e<1$ 此二次曲線爲下列橢圓：

$$\frac{\left(x+\dfrac{ae^2}{2(1-e^2)}\right)^2}{\dfrac{a^2e^2}{4(1-e^2)^2}}+\frac{y^2}{\dfrac{a^2e^2}{4(1-e^2)}}=1 \tag{6.40}$$

當 $e>1$ 時，此二次曲線爲下列雙曲線：

$$\frac{\left(x-\dfrac{ae^2}{2(e^2-1)}\right)^2}{\dfrac{a^2e^2}{4(e^2-1)^2}}-\frac{y^2}{\dfrac{a^2e^2}{4(e^2-1)}}=1 \tag{6.41}$$

當 $e=1$ 時，此二次曲線爲下列拋物線

$$y^2=a\left(\frac{a}{4}-x\right)。 \tag{6.42}$$

現在我們來求二次曲線 (6.36) 的切線之複數方程式於下：
二次曲線 (6.35) 在 $(r_0,\ \theta_0)$ 處的切線可寫成：

$$y-r_0\sin\theta_0=\left(\frac{dy}{dx}\right)_0(x-r_0\cos\theta_0) \tag{6.43}$$

此曲線之極方程式爲 $r=f(\theta)$，故 $r_0=f(\theta_0)$。又因 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，可得

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_0=\frac{r_0\cos\theta+\left(\dfrac{dr}{d\theta}\right)_0\sin\theta_0}{-r_0\sin\theta_0+\left(\dfrac{dr}{d\theta}\right)_0\cos\theta_0}$$

代入此式於 (6.43) 式中可得

$$[f(\theta_0)\cos\theta_0+f'(\theta_0)\sin\theta_0]x+[f(\theta_0)\sin\theta_0-f'(\theta_0)\cos\theta_0]y=r_0^2 \tag{6.42}$$

因爲 $f(\theta_0)=\dfrac{ae}{2(1+e\cos\theta_0)}$， $f'(\theta_0)=\dfrac{ae^2\sin\theta_0}{2(1+e\cos\theta_0)^2}$，

可得 $$f(\theta_0)\sin\theta_0-f'(\theta_0)\cos\theta_0=\frac{ae\sin\theta_0}{2(1+e\cos\theta_0)^2},$$

$$f(\theta_0)\cos\theta_0+f'(\theta_0)\sin\theta_0=\frac{ae(e+\cos\theta_0)}{2(1+e\cos\theta_0)^2}$$

代入此二式子於上列方程式 (6.44) 中可得

$$\sin\theta_0 y+(e+\cos\theta_0)x=\frac{1}{2}ae\ 。$$

代入 $x=\dfrac{1}{2}(z+\bar{z})$， $y=-\dfrac{i}{2}(z-\bar{z})$

於此式可得 $$(e+\cos\theta_0-i\sin\theta_0)z+(e+\cos\theta_0+i\sin\theta_0)\bar{z}=ae$$

故 $$\left(e+\frac{1}{t_0}\right)z+(e+t_0)\bar{z}=ae$$

即

$$(et_0+1)z+t_0(t_0+e)\bar{z}=aet_0 \tag{6.45}$$

此爲二次曲線 (6.36) 在 $z_0=r_0t_0$ 處的切線之方程式。

## §6.6 準 圓

現在來求二次曲線的直交二切線之交點之軌跡。已知二次曲線

$$z=\frac{aet^2}{et^2+2t+e} \tag{6.38}$$

之切線方程式爲

$$(et+1)z+t(t+e)\bar{z}=aet\ , \tag{6.45}$$

即 $$t^2\bar{z}+e(z+\bar{z}-a)t+z=0$$

對應於經過點 $z$ 的二切線之參數值 $t$ 之二值 $t_1$，$t_2$ 滿足

$$t_1+t_2=\frac{e(a-z-\bar{z})}{\bar{z}},\quad t_1t_2=\frac{z}{\bar{z}}\ 。 \tag{6.46}$$

對於此二參數 $t_1$，$t_2$ 之切線爲垂直之條件爲

$$\frac{t_1(t_1+e)}{et_1+1}=-\frac{t_2(t_2+e)}{et_2+1}$$

由此式，可得 $\quad t_1(t_1+e)(et_2+1)+t_2(t_2+e)(et_1+1)=0$

即 $\quad et_1t_2(t_1+t_2)+2(e^2-1)t_1t_2+(t_1+t_2)^2+e(t_1+t_2)=0$

代入(6.46)之二式於此式可得

$$e\frac{z}{\bar{z}}\frac{e(a-z-\bar{z})}{\bar{z}}+2(e^2-1)\frac{z}{\bar{z}}+\frac{e^2(a-z-\bar{z})^2}{\bar{z}^2}+\frac{e^2(a-z-\bar{z})}{\bar{z}}=0$$

乘 $\bar{z}^2$ 於兩邊，可得

(6.47) $\quad 2(e^2-1)z\bar{z}-ae^2z-ae^2\bar{z}+a^2e^2=0$

如果 $e^2-1\neq 0$，則得

$$z\bar{z}-\frac{ae^2}{2(e^2-1)}z-\frac{ae^2}{2(e-1)}\bar{z}+\frac{a^2e^2}{2(e^2-1)}=0$$

即

(6.48) $$\left(z-\frac{ae^2}{2(e^2-1)}\right)\left(\bar{z}-\frac{ae^2}{2(e^2-1)}\right)=\frac{a^2e^2(2-e^2)}{4(e^2-1)^2}$$

或

(6.49) $$\left(z+\frac{ae^2}{2(1-e^2)}\right)\left(\bar{z}+\frac{ae^2}{2(1-e^2)}\right)=\frac{a^2e^2(2-e^2)}{4(1-e^2)^2}$$

故如果 $z>e^2>1$，即其軌跡係中心爲 $\dfrac{ae^2}{2(e^2-1)}$，半徑爲 $\dfrac{ae\sqrt{2-e^2}}{2(e^2-1)}$ 之圓，故此圓之中心爲所繪雙曲線之中心。

如果 $1>e^2$，則其軌跡爲以 $-\dfrac{ae^2}{2(1-e^2)}$ 爲中心，半徑爲 $\dfrac{ae\sqrt{2-e^2}}{2(1-e^2)}$ 之圓。在此二情形下，如此的圓稱爲有心二次曲線之**準圓**。

如果 $e=1$，則其軌跡爲

(6.50) $\quad z+\bar{z}=a$

即 $x=\dfrac{a}{2}$。此爲所考慮的拋物線之準線。

**注意：** (6.47) 表示如果 $e^2\geqslant 2$，則 (6.48) 式表示無所求的軌跡。條件“ $e^2\geqslant 2$ ”之意思如下：如果所考慮的雙曲線之方程式爲 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$，則 $e^2\geqslant 2$ 與 $b^2\geqslant a^2$ 同値 。此因 $e^2=\dfrac{c^2}{a^2}=\dfrac{a^2+b^2}{a^2}\geqslant 2$，即 $b^2\geqslant a^2$ 之故 。$e^2\geqslant 2$ 時沒有所求的軌跡之理由亦可得知如下：即我們可證明：當 $b^2\geqslant a^2$ 時，雙曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 之任何切線均沒有垂直此切線的切線存在。設

(6.51) $$y-y_0=\frac{b^2}{a^2}\frac{x_0}{y_0}(x-x_0)$$

爲任一定直線。設

(6.52) $$y=-\frac{a^2y_0}{b^2x_0}x+c$$

爲與 (6.51) 垂直的一直線。假設此直線爲 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 之切線，則 $x$ 之下列二次方程式必有重根：

$$b^2x^2-a^2\left[-\frac{a^2y_0}{b^2x_0}x+c\right]^2=a^2b^2$$

此方程式可寫成下列形狀：

(6.53) $$\left(b^2-\frac{a^6y_0^2}{b^4x_0^2}\right)x^2+2c\frac{a^4y_0}{b^2x_0}x-a^2(b^2+c^2)=0$$

此方程式持有重根之條件係

$$c^2\frac{a^8y_0^2}{b^4x_0^2}+a^2(b^2+c^2)\left(b^2-\frac{a^6y_0^2}{b^4x_0^2}\right)=0\ ;$$

即

(6.54) $$a^2b^2\left\{c^2+\left(b^2-\frac{a^6y_0^2}{b^4x_0^2}\right)\right\}=0\text{ 。}$$

現在 $$c^2+\left(b^2-\frac{a^6y_0^2}{b^4x_0^2}\right)=c^2+\frac{b^6x_0^2-a^6y_0^2}{b^4x_0^2}$$

而 $$\begin{aligned}b^6x_0^2-a^6y_0^2&=b^6x_0^2-a^4(b^2x_0^2-a^2b^2)\\&=b^2x_0^2(b^4-a^4)+a^6b^2\\&=b^2\left[x_0^2(b^4-a^4)+a^6\right]>0\end{aligned}$$

故 (6.54) 不成立。

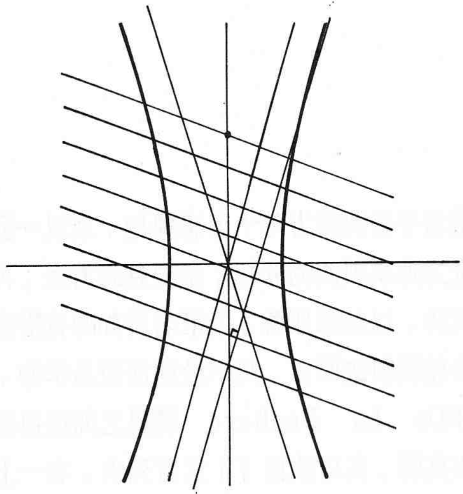

圖 6-5

——本文作者許振榮先生已過世，
呂素齡現為本刊編輯——