項武義先生演講一

從勾股到格氏代數(下)

(From Pythagoras to Grassmann)

時間：77年6月22日　　地點：台灣大學舊數舘301室

第四節　空間結構的代數化——向量代數

(Algebraization of the space structure — Vector algebra)

上一節所討論的是定量幾何的基礎理論的建立；本節則以上述基礎理論為基點，進而把空間的結構有系統地代數化。一般來說，並不是任何一種空間都可以代數化的，例如在第二章中所要研討的球面幾何和非歐幾何的空間就只能解析化（亦即坐標化）而不能夠加以代數化。我們現在所研討的“歐氏空間”（Euclidean space）是具有全空間的平行移動和相似性這種優良好用的本質，這也就是它能夠有系統地代數化的基本道理。它代數化所得的代數體系就是本節的主角——向量代數。

(一)平行移動和位移向量 (Translation and displacement vector)

位置是空間中最原始的單元，但是它本身並不構成一種量。兩點之間在位置上的差別（簡稱之為“位差”）則可以看成一種基本幾何量。只不過這種量同時含有“距離的大小”和“方向”這樣兩個要素。我們把這種既有大小又有方向的量叫做向量。

設 A、B 和 A'、B' 是空間的兩對點，若有向線段 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{A'B'}$ 同向而且等長。則定義為“A、B 之位差”等於“A'、B' 之位差”。換句話說，我們將把方向和距離作為上述表達位差的向量的唯二要素。由此可見，在概念上，一個向量乃是上述有向線段的一個等價類。其實，更加確切的可以把向量看成全空間的一個平行移動，例如“向東10公尺”，“向西1公里”，“向東南30公尺”等等。

定義：全空間 V 的一個移動 $\tau: V\to V$ 若對於任給兩點 A、$B\in V$ 恒有 $\overrightarrow{A\tau(A)}$ 和 $\overrightarrow{B\tau(B)}$ 同向等長，則稱之為**平行移動**，簡稱為**平移**。

〔**分析**〕：

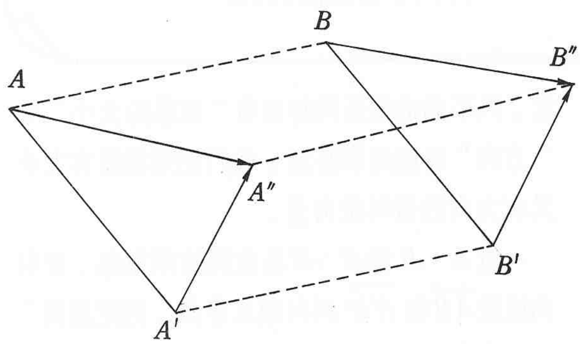
(i) 一個平移 $\tau: V\to V$ 為其中一點 A 的“值”所唯一確定。換句話說，設 τ_1、τ_2 是兩個平移，若 $\tau_1(A)=\tau_2(A)$ 對於一個點 A 成立，則 $\tau_1(B)=\tau_2(B)$ 對於**任何**點 B 都成立，亦即 $\tau_1=\tau_2$ 是同一個平移。（讀者試由平行線的唯一性自證之）。

(ii)設 A、A' 是空間任給兩點，則存在（

唯一）一個平移 $\tau: V \to V$ 使得 $\tau(A)=A'$。（讀者試討論如何求作任給另外一點 B 的像點 $\tau(B)$。）

(iii) 設 τ_1、τ_2 是空間的兩個平移。今 $\tau_1 \circ \tau_2$ 是它們的組合映像，亦即 $\tau_1 \circ \tau_2(A)=\tau_1(\tau_2(A))$。則 $\tau_1 \circ \tau_2$ 必然也是一個平移。

證明：設 A、B 是空間中任給兩點。令 $A'=\tau_2(A)$, $A''=\tau_1(A')=\tau_1 \circ \tau_2(A)$; $B'=\tau_2(B)$, $B''=\tau_1(B')=\tau_1 \circ \tau_2(B)$。我們所要論證者就是：從所設 $\overrightarrow{AA'}$ 和 $\overrightarrow{BB'}$ 同向等長，$\overrightarrow{A'A''}$ 和 $\overrightarrow{B'B''}$ 同向等長去推導 $\overrightarrow{AA''}$ 和 $\overrightarrow{BB''}$ 也必然同向等長。如下圖所示



連結 $\overline{AB}$, $\overline{A'B'}$, $\overline{A''B''}$。由所設：▱$AA'B'B$ 和 ▱$A'B'B''A''$ 都是平行四邊形。所以 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{A'B'}$ 同向等長；$\overrightarrow{A'B'}$ 和 $\overrightarrow{A''B''}$ 同向等長。由此易見 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{A''B''}$ 也同向等長，所以▱$AA''B''B$ 也是一個平行四邊形；$\overrightarrow{AA''}$ 和 $\overrightarrow{BB''}$ 也是同向等長的。這也就驗證了 $\tau_1 \circ \tau_2$ 也是一個平移。

(iv)對於任給兩個平移 τ_1、τ_2 恒有 $\tau_1 \circ \tau_2=\tau_2 \circ \tau_1$。（讀者試自證之，由(i)可見只需要驗證 $\tau_1 \circ \tau_2(A)=\tau_2 \circ \tau_1(A)$ 對於一個點成立，也就是足矣。）

總結上述分析，我們可以把空間的一個平移看成一種基本的幾何量，它的直觀內含就是空間的一種位差，是一種同時含有方向和大小的量，叫做**位移向量**（displacement vector）。兩個平移的組合還是一個平移，我們把它定義為兩者之和。往後將改用粗體拉丁字母如 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 等等來表示向量，用 $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ 表示 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$ 之和（亦即 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 這兩個平移的組合）。再者，固定不動的恒等映像 $i: V \to V$，$i(A)=A$，乃是平移的一個特例通常將用 $\mathbf{0}$ 表示之，稱之謂零向量。因為它對於向量加法具有類似於數零的特性 $\mathbf{0}+\mathbf{a}=\mathbf{a}+\mathbf{0}=\mathbf{a}$。

不難看到上述向量加法滿足下列運算律，即

(i) 交換律：$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$

　[亦即 (iv) $\tau_1 \circ \tau_2=\tau_2 \circ \tau_1$]

(ii) 結合律：$(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$

(iii) 零的特性：$\mathbf{0}+\mathbf{a}=\mathbf{a}+\mathbf{0}=\mathbf{a}$

(iv) 可逆性：對於任給向量 $\mathbf{a}$，恒存在唯一逆元素 $-\mathbf{a}$，滿足

$\mathbf{a}+(-\mathbf{a})=(-\mathbf{a})+\mathbf{a}=\mathbf{0}$。

〔$-\mathbf{a}$ 就是 $\mathbf{a}$ 的逆向平移。〕

符號：通常我們也用符號 $\overrightarrow{AB}$ 表示那個把 A 移到 B 的平移（因為一個平移業已由它任給一點 A 的像點所唯一決定）。由此可見 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A'B'}$ 的幾何意義就是 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{A'B'}$ 是同向等長的。再者，亦有

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}, \quad -\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}$$

定義：n 個 $\mathbf{a}$ 自相加之和將以符號 $n \cdot \mathbf{a}$ 表之。n 個 $-\mathbf{a}$ 的自相加之和將以符號 $(-n) \cdot \mathbf{a}$ 表之。

設 $\mathbf{a}=\overrightarrow{AB}$。我們可以把直線段 $\overline{AB}$ n 等分，設其分點依次為 $\{B_i; 1 \leq i \leq n-1\}$. 則 $\overrightarrow{AB_1}$ 是下述向量算式的唯一解，即

$$n \cdot \mathbf{x}=\mathbf{a} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}=\overrightarrow{AB_1}$$

定義：$\dfrac{m}{n} \cdot \mathbf{a}$ 是方程式 $n \cdot \mathbf{x}=m \cdot \mathbf{a}$ 的唯一解。

[**例題**]：由上述向量的分數倍的定義，即可逐步驗證下列運算律對於任何分數恒成立：

$$\text{(i)} \quad \left(\frac{m}{n}+\frac{p}{q}\right) \cdot \mathbf{a}=\frac{m}{n} \cdot \mathbf{a}+\frac{p}{q} \cdot \mathbf{a}$$

$$\text{(ii)} \quad \left(\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q}\right) \cdot \mathbf{a}=\frac{m}{n} \cdot \left(\frac{p}{q} \cdot \mathbf{a}\right)$$

(iii) $\frac{m}{n}\cdot(a+b)=\frac{m}{n}\cdot a+\frac{m}{n}\cdot b$

驗證：首先，我們可以先看一看 $n=q=1$ 的特殊情形，亦即上述分數都是整數的情形。由向量的整數倍定義，易見

$$m\cdot a+p\cdot a=(\underbrace{a+\cdots+a}_{m\text{個}})+(\underbrace{a+\cdots+a}_{p\text{個}})$$

$$=\underbrace{a+\cdots+a+a+\cdots+a}_{m+p\text{個}}=(m+p)\cdot a$$

$$m\cdot(p\cdot a)=(a+\cdots+a)+(a+\cdots+a)+\cdots+(a+\cdots+a)$$

〔共有 m 個括號，每個括號中有 p 個 a 自相加，所以總共有 $m\cdot p$ 個 a 自相加，亦即等於 $(m\cdot p)\cdot a$〕$=(m\cdot p)\cdot a$

$$m\cdot(a+b)=(a+b)+(a+b)+\cdots+(a+b)$$

〔共有 m 個括號，用向量加法的結合律和交換律。即可改寫成 m 個 a 先自相加然後再加上 m 個 b 之和〕

$$=(a+a+\cdots+a)+(b+b+\cdots+b)$$
$$=m\cdot a+m\cdot b$$

(i) 再者，在驗證一般分數倍的情形，在(i)中不妨假設 $n=q$。

$$n\cdot\left[\frac{m}{n}\cdot a+\frac{p}{n}\cdot a\right]=n\cdot\left(\frac{m}{n}\cdot a\right)+n\cdot\left(\frac{p}{n}\cdot a\right)=m\cdot a+p\cdot a=(m+p)\cdot a$$

亦即 $\frac{m}{n}\cdot a+\frac{p}{n}\cdot a$ 乃是 $n\cdot x=(m+p)\cdot a$ 的唯一解，亦即

$$\frac{m}{n}\cdot a+\frac{p}{n}\cdot a=\left(\frac{m+p}{n}\right)\cdot a=\left(\frac{m}{n}+\frac{p}{n}\right)\cdot a$$

(ii) $(q\cdot n)\left[\frac{m}{n}\left(\frac{p}{q}\cdot a\right)\right]=(q\cdot m)\left(\frac{p}{q}\cdot a\right)=m\cdot(p\cdot a)=(m\cdot p)\cdot a$

再由定義可見

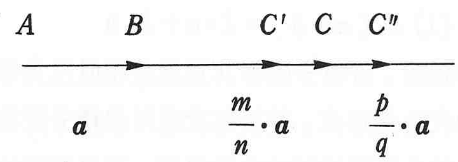
$$\frac{m}{n}\cdot\left(\frac{p}{q}\cdot a\right)=\left(\frac{mp}{q\cdot n}\right)\cdot a=\left(\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}\right)\cdot a。$$

(iii) $n\left[\frac{m}{n}\cdot a+\frac{m}{n}\cdot b\right]=n\cdot\left(\frac{m}{n}\cdot a\right)+n\cdot\left(\frac{m}{n}\cdot b\right)=ma+mb=m(a+b)$

再由定義即有 $\frac{m}{n}\cdot a+\frac{m}{n}\cdot b=\frac{m}{n}\cdot(a+b)$。

(二)相似與倍積 (scalar product)

設 $\overrightarrow{AB}=a$，λ 是一個任給正實數。當 λ 是分數時，上面業已由向量加法明確定義 $\lambda\cdot a$。現在讓我們進而定義在 λ 是非分數的情形 $\lambda\cdot a$ 的意義。設 $\frac{m}{n}<\lambda<\frac{p}{q}$

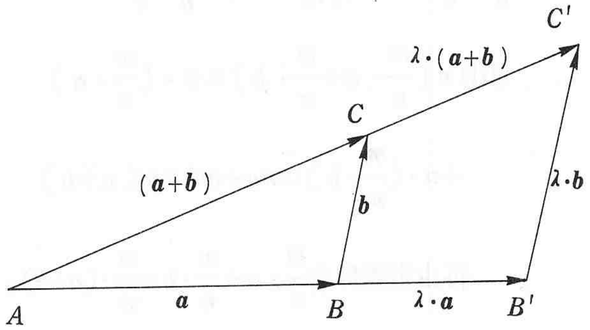


是任給兩個一小、一大左右夾逼 λ 的分數，

$\overrightarrow{AC'}=\frac{m}{n}a$，$\overrightarrow{AC''}=\frac{p}{q}\cdot a$，$\overline{AC}:\overline{AB}=\lambda$。

則 C 點是介於所有上面這種 C'，C'' 之間的分界點。由此可見，$\lambda\cdot a=\overrightarrow{AC}$ 就是倍積自然的定義。再者 $(-\lambda)\cdot a$ 顯然應該定義爲 $-(\lambda\cdot a)$，不難看到，倍積乃是空間中相似地放大或縮小的“代數化”。當 $\lambda>0$ 時，$\lambda\cdot a$ 的幾何意義乃是 a 的放大（或縮小）λ 倍，$(-\lambda)\cdot a$ 則是 a 的放大（或縮小）λ 倍後還加上一個反向。它將是我們往後定量地研討相似形的代數工具。

在第三節中所討論的相似三角形定理，乃是研討相似形的基本定理，很自然地我們要看一看它和上述倍積之間的關係是什麼。如下圖所示，$\triangle ABC$ 和 $\triangle AB'C'$ 是兩個相似三角形，亦即 $\overline{BC}\parallel\overline{B'C'}$。令 $\overrightarrow{AB}=a$，$\overrightarrow{BC}=b$，$\overline{A'B'}:\overline{AB}=\lambda$



則有 $\overline{AC'}:\overline{AC}=\overline{B'C'}:\overline{BC}=\lambda$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$。所以 $\overrightarrow{B'C'}=\lambda\cdot\boldsymbol{b}$，$\lambda\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\overrightarrow{AC'}$

$$=\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{B'C'}=\lambda\cdot\boldsymbol{a}+\lambda\cdot\boldsymbol{b}。$$

由此可見，相似三角形定理改用向量倍積來表達就是倍積分配律：

(i) $\lambda\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\cdot\boldsymbol{a}+\lambda\cdot\boldsymbol{b}$

換句話說，倍積分配律其實就是相似三角形定理的代數化形式。往後每次運用倍積分配律其實也就是運用相似三角形定理。再者倍積的另外兩個運算律就是

(ii) $\lambda\cdot(\mu\cdot\boldsymbol{a})=(\lambda\cdot\mu)\cdot\boldsymbol{a}$，

(iii) $(\lambda+\mu)\cdot\boldsymbol{a}=\lambda\cdot\boldsymbol{a}+\mu\cdot\boldsymbol{a}$。

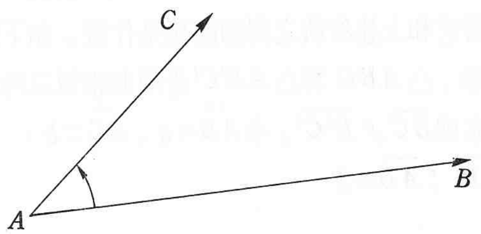
往後研討相似形所要用到的也就是上面三條簡便易算、好用的運算律！

(三)度量、勾股與向量內積 (inner product)

一個向量 $\boldsymbol{a}$ 具有距離和方向這樣兩個要素，我們將用符號 $|\boldsymbol{a}|$ 表示它的距離，用 $<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>$ 表示兩個非零向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的方向差。如下圖所示，設 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}$，$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AC}$，則

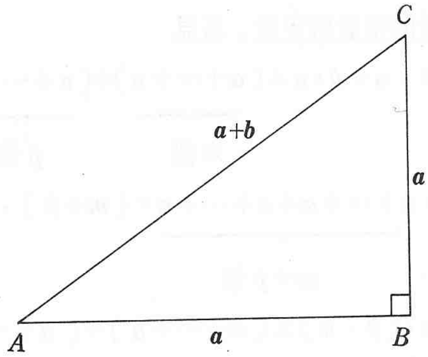
$|\boldsymbol{a}|=\overline{AB}$ 的長度，$|\boldsymbol{b}|=\overline{AC}$ 的長度，

$<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>=\angle BAC$ 的角度



關于角度和長度，勾股定理是一個常用的基本定理。現在讓我們從向量的觀點來分析一下它的“內涵”。

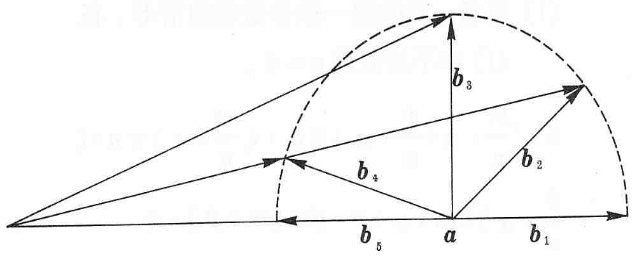
〔分析〕：



(i) 如上圖所示，設 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，$<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>=$ 直角。則由勾股定理即有

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2$$

(ii) 一般來說，當 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 並非互相垂直時，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$ 當然並不是單單由 $|\boldsymbol{a}|$、$|\boldsymbol{b}|$ 的值就能加以確定的。如下圖所示，當 $\theta=<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>$ 由零逐漸變到一平角時，$0\leq\theta\leq\pi$，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$ 的值由極大值 $|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$ 逐漸減少到極小值 $||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}||$。



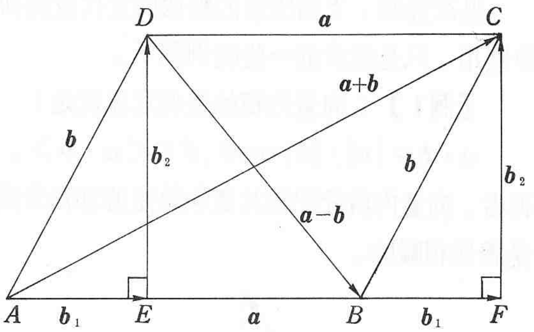
(iii) 當 $<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>=$ 直角時，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2}$。在 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 並非垂直的情形，不難看到 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$ 和 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$ 中一個大於、另一個小於上述平方根。例如在 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 同向時，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$，$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}||$；在 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 反向時，則有 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}||$，$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$。由此可見，至少在 $\theta=<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>$ 是 0，直角和平角這三種特殊情況，都有關係式

$|a+b|^2+|a-b|^2=2|a|^2+2|b|^2$。

是不是上述關係其實是普遍成立的呢？假如是的話它豈不是就是一種廣義的勾股定理！這也就是我們下面要加以論證者。

廣義勾股定理：$|a+b|^2+|a-b|^2=2|a|^2+2|b|^2$ 普遍成立。

證明：上述定理對於 $\langle a,b\rangle=0$，$\frac{\pi}{2}$ 或 π 這三種“平”或者“直”的特例業已成立。下面的論證其實就是用垂直投影(orthogonal projection)把一般的情形歸以平、直這兩種特例來加以推導。



如上圖所示，用垂直投射把 b 分解成 $b=b_1+b_2$ 其中 b_1 和 a 同向或反向，b_2 和 a 垂直，則有

$$|a+b|^2=|(a+b_1)+b_2|^2=|a+b_1|^2+|b_2|^2$$
$$|a-b|^2=|(a-b_1)-b_2|^2=|a-b_1|^2+|b_2|^2$$
$$|a+b_1|^2+|a-b_1|^2=2|a|^2+2|b_1|^2$$

由上述三式即得 $|a+b|^2+|a-b|^2=2|a|^2+2|b|^2$。

推論：令 $f(a,b)=\frac{1}{2}\{|a+b|^2-|a|^2-|b|^2\}$，則有 $f(a,b+c)=f(a,b)+f(a,c)$

證明：由函數 f 的定義即有

$$2\cdot f(a,b+c)=|a+b+c|^2-|a|^2-|b+c|^2,$$
$$2\cdot f(a,b)=|a+b|^2-|a|^2-|b|^2,$$
$$2\cdot f(a,c)=|a+c|^2-|a|^2-|c|^2,$$

亦即 $2\cdot[f(a,b+c)-f(a,b)-f(a,c)]=$

$$|a+b+c|^2-|a+b|^2-|b+c|^2-|a+c|^2+|a|^2+|b|^2+|c|^2$$

現在讓我們用廣義勾股定理來推導上式恒等於0

$$|a+b+c|^2+|a+b-c|^2-2|a+b|^2-2|c|^2=0$$
$$-|a-b+c|^2-|a+b-c|^2+2|b-c|^2+2|a|^2=0$$
$$|a-b+c|^2+|a+b+c|^2-2|a+c|^2-2|b|^2=0$$
$$-2|b+c|^2-2|b-c|^2+4|b|^2+4|c|^2=0$$

上述四個等式乃是定理的適當替代，將四式加在一起，即得

$$2\{|a+b+c|^2-|a+b|^2-|b+c|^2-|a+c|^2+|a|^2+|b|^2+|c|^2\}=0$$

基於上述重要推論，即有下述向量內積的定義。

定義：我們將用符號 $a\cdot b$ 表示 $\frac{1}{2}\{|a+b|^2-|a|^2-|b|^2\}$，把它叫做向量 a，b 的**內積**。

把上述幾何組合量定義爲一種“乘積”的理由就是：這樣可以使得上述重要推論在形式上變成**內積的分配律**：

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c\text{。}$$

由上述分配律，即有

$$a\cdot(n\cdot b)=n\cdot(a\cdot b)$$
$$a\cdot\left(\frac{m}{n}\cdot b\right)=\frac{m}{n}\cdot(a\cdot b)$$

再用分數逼近非分數的辦法，即有

$$a\cdot(\lambda\cdot b)=\lambda\cdot(a\cdot b)$$

對於任何實數 λ 和向量 a、b 恒成立。

茲總結上面對於向量內積的討論如下：

(i) $a\cdot b=\frac{1}{2}\{|a+b|^2-|a|^2-|b|^2\}$ （定義）

(ii) $a\cdot b=b\cdot a$（對稱性）

(iii) $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$

(iv) $(\lambda\cdot a)\cdot b=\lambda\cdot(a\cdot b)=a\cdot(\lambda\cdot b)$

(v) a，b 垂直的充要條件是 $a\cdot b=0$

(vi) $a\cdot a=|a|^2$

【註】：內積分配律其實乃是廣義勾股定理的代數化。內積和它的運算律則是往後用向量研討涉及長度、角度等的幾何問題的利器！

(四)向量代數與空間結構的代數化

總結前面三段的研討，我們業已成功地把

空間的位移向量組織成一個代數體系，它具有**加法、倍積和內積**這樣三種精簡樸實的代數運算，而且它們又滿足三套簡易好算的運算律。其實，上述這個基本幾何量和三種運算，三套運算律已經構成了空間結構的全盤代數化！**向量的三種運算就是空間基本結構的代數化，向量的三套運算律則是空間的基本性質的代數化**，由此可見，本節研討所得的代數體系——向量代數——乃是簡明扼要地全面反映空間結構的利器；用它可以把幾何學的研究，系統地歸於向量代數的計算，亦即上述向量運算和運算律的有效運用即足以乾淨利落地解決各種各樣的幾何問題，這也就是解析幾何學的基礎所在。

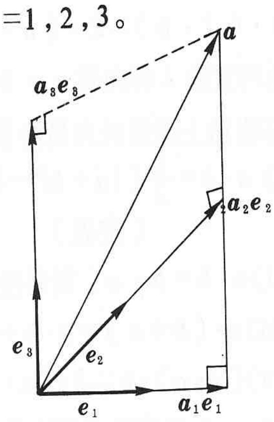
向量代數和笛氏坐標系之間的密切關係如下：

定理：設 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 是空間中三個互相垂直的單位長向量，亦即它們之間具有內積關係

$$\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{e}_3\cdot\boldsymbol{e}_3=1,$$

$$\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{e}_3\cdot\boldsymbol{e}_1=0。$$

則空間中任給向量 $\boldsymbol{a}$ 都可以唯一地表示成它們的“線性組合”即 $\boldsymbol{a}=a_1\cdot\boldsymbol{e}_1+a_2\cdot\boldsymbol{e}_2+a_3\cdot\boldsymbol{e}_3$ 其中 $a_i=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}_i$ $i=1,2,3$。



證明：令 $a_i=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}_i$

$$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}-a_1\boldsymbol{e}_1-a_2\boldsymbol{e}_2-a_3\boldsymbol{e}_3$$

則有

$$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{e}_1=(\boldsymbol{a}-a_1\boldsymbol{e}_1-a_2\boldsymbol{e}_2-a_3\boldsymbol{e}_3)\cdot\boldsymbol{e}_1$$
$$=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}_1-a_1=0$$

同理亦有 $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{e}_2=0$，$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{e}_3=0$。但是在空間中只有零向量是和這樣三個互相垂直的“基組”都相垂直的，亦即 $\boldsymbol{b}=0$，$\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2+a_3\boldsymbol{e}_3$。

定義：對於一個給定向量 $\boldsymbol{a}$，上述唯一存在的三數組（a_1,a_2,a_3）叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 對於選定坐標架 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$ 的坐標：（coordinate）a_1，a_2，a_3 則分別叫做 $\boldsymbol{a}$ 的第 1，2，3 分量（components）。

設 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$（對於選定坐標架 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$）的坐標分別是（$a_1,a_2,a_3$）和（$b_1,b_2,b_3$）。則 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\lambda\cdot\boldsymbol{a}$ 的坐標分別是（a_1+b_1，a_2+b_2，a_3+b_3）和（$\lambda a_1,\lambda a_2,\lambda a_3$）而且 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的內積 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_1\cdot b_1+a_2b_2+a_2b_3$。由此可見，坐標化的好處是可以把向量的運算，進一步地歸於其坐標分量來加以計算。

限於篇幅，下面所舉的幾個向量代數的初步應用，只是起步的一些範例罷了。

【例1】：向量內積的幾何意義就是：

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\theta,\ \theta=\langle\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\rangle。$$

再者，向量內積分配律其實和餘弦的和角公式是密切相關的。

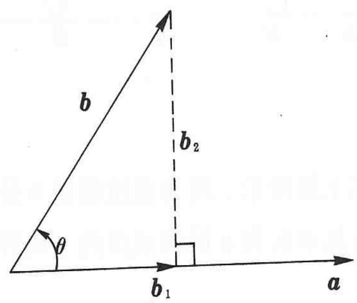


圖 1

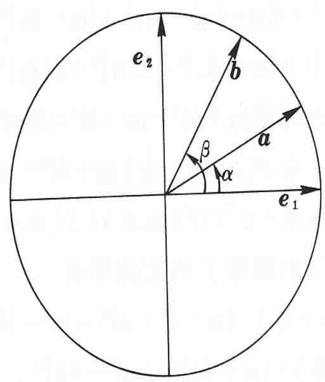


圖 2

解說：如上圖 1 所示，

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_2)=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}_1$$

其中 $\boldsymbol{b}_2\perp\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}_1$ 是 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 所在方向的垂直投影。由 $\cos\theta$ 的定義易見 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}_1=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos\theta$。

如上圖 2 所示，$\alpha=\langle e_1,a\rangle$，$\beta=\langle e_1,b\rangle$，$(\beta-\alpha)=\langle a,b\rangle$

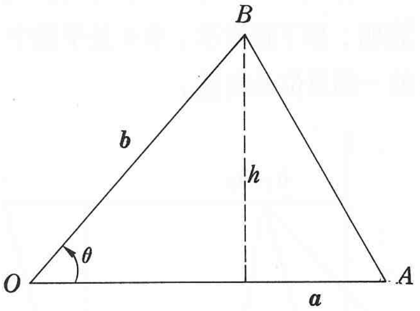
$$a=(a\cdot e_1)e_1+(a\cdot e_2)e_2$$
$$=\cos\alpha e_1+\sin\alpha e_2$$
$$b=(b\cdot e_1)e_1+(b\cdot e_2)e_2$$
$$=\cos\beta e_1+\sin\beta e_2$$
$$\cos(\beta-\alpha)=a\cdot b=(\cos\alpha\cdot e_1+\sin\alpha e_2)\cdot(\cos\beta e_1+\sin\beta e_2)$$

用向量內積分配律展開，再由 $e_1\cdot e_1=e_2\cdot e_2=1$，$e_1\cdot e_2=0$ 即得餘弦複角公式：

$$\cos(\beta-\alpha)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta。$$

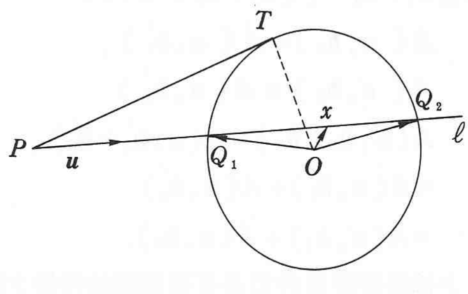
〔**例 2**〕：令△OAB 的兩夾邊 $\overrightarrow{OA}=a$，$\overrightarrow{OB}=b$，其夾角 $\angle AOB=\theta$。則有

$$4\cdot[\triangle OAB]=(|a|\cdot|b|\cdot\sin\theta)^2=|a|^2\cdot|b|^2(1-\cos^2\theta)=(a\cdot a)\cdot(b\cdot b)-(a\cdot b)^2$$
$$=\begin{vmatrix} a\cdot a & a\cdot b \\ b\cdot a & b\cdot b \end{vmatrix}$$



〔**例 3**〕（圓冪定理）設 Γ 爲給定一圓，P 爲圓外給定一點。如下圖所示，$\overrightarrow{PT}$ 是由 P 到 Γ 的一條切綫，ℓ 是過 P 點的任意一條割線，交 Γ 於 Q_1,Q_2 點．則恒有

$$\overrightarrow{PQ_1}\cdot\overrightarrow{PQ_2}=\overrightarrow{PT}\cdot\overrightarrow{PT}$$



證明：設 O 點爲 Γ 的圓心，r 爲其半徑。令 u 爲射綫 ℓ 的方向上的單位長向量（即有 $u\cdot u=1$），X 是 ℓ 上的動點．則有 $\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PX}=\overrightarrow{OP}+x\cdot u$，其中 x 是 $\overrightarrow{PX}$ 的（有向）長度．由此可見 X 點恰好在圓上的條件就是：

$$\overrightarrow{OX}\cdot\overrightarrow{OX}=(\overrightarrow{OP}+x\cdot u)\cdot(\overrightarrow{OP}+x\cdot u)$$
$$=r^2$$

同向量分配律展開並用 $u\cdot u=1$，即得 $X=Q_1$ 或 Q_2 的條件式是：

$$x^2+2(\overrightarrow{OP}\cdot u)\cdot x+(\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OP}-r^2)=0$$

由根與係數關係即得其兩根之積爲 $(\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OP}-r^2)$，亦即

$$\overrightarrow{PQ_1}\cdot\overrightarrow{PQ_2}=(x_1\cdot u)(x_2\cdot u)=x_1x_2$$
$$=\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OP}-r^2=|\overrightarrow{PT}|^2$$

第五節　平行體的幾何與格氏代數

(Geometry of parallel topes and Grassman algebra)

對於空間選定的一組坐標架 $\{e_1,e_2,e_3\}$，一個任給的向量 a 在上述三個選定的互相垂直方向的垂直投影（orthogonal projection）分別就是 $(a\cdot e_i)e_i$，$i=1,2,3$。勾股定理的向量形式也就是：

$$|a|^2=|(a\cdot e_1)\cdot e_1|^2+|(a\cdot e_2)\cdot e_2|^2+|(a\cdot e_3)\cdot e_3|^2$$

亦即一條有向綫段的長度平方等於其垂直投影的平方和。再者，兩個向量的內積的坐標分量公式：

$$a\cdot b=(a\cdot e_1)(b\cdot e_1)+(a\cdot e_2)(b\cdot e_2)+(a\cdot e_3)\cdot(b\cdot e_3)$$

則是上述勾股定理的“兩元化”。

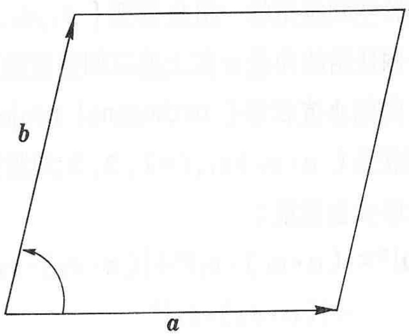
上述具有基本重要性的勾股定理和它的兩元化是否還有它們的高維推廣呢？例如對於空間的任給一片平行四邊形，它的面積平方是否也等於它在三個互相垂直的平面上的垂直投影的面積平方和呢？這樣的高維勾股定理是普遍

成立的，而且它們的兩元化形式也就是研討高維度量幾何不可或缺的利器，這也就是本節所要討論的中心課題：平行體的幾何與格氏代數。我們將先討論二維、三維的情形，然後再把它推廣到高維向量空間。格氏代數是研討高維解析幾何的基本工具，它既精到又簡明地反映着高維度量幾何的本質和要點。

(一)有號面積(oriented area)和有向平行四邊形

在一個給定的平面π上，有兩個相反的旋轉方向，例如牆上掛的時鐘的轉向及其逆向。通常我們選定其中之一作爲正轉向來區別轉角之正負，例如在平面解析幾何中通常採用逆時鐘方向爲正轉向，這種選定正轉向的做法叫做平面的定向(orientation)。

設$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$是一個定向平面π上的兩個給定向量，$/\!\!/(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$是以$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$爲其兩個夾邊的有向平行四邊形(如下圖所示)



定義：若由$\boldsymbol{a}$到$\boldsymbol{b}$的轉向是π的正轉向，則定義，$/\!\!/(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$的有號面積爲通常的恒正面積。反之，若由$\boldsymbol{a}$到$\boldsymbol{b}$的轉向是$\pi$的負轉向，則$/\!\!/(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$的有號面積定義爲通常正面積的相反數。我們將以符號$A(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$表示$/\!\!/(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$的有號面積。

由上述定義易見$A(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})=-A(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$，$A(-\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=-A(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$；而通常的恒正面積則就是$|A(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})|$。

〔**分析**〕：

(i)爲了定義有號面積，我們得要給平面和平行四邊形都先賦予定向，而所得者僅僅是比原來的恒正面積多確定了一個正負號。在此自然得問一下，這樣做有什麼好處？是否有其必要？(要是不然，豈非是徒費手脚，庸人自擾!?)讓我們先實事求是地對於平行四邊形的有號面積和恒正面積所具有的基本性質作一比較分析：

令$\overline{A}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$是$/\!\!/(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$的恒正面積，亦即$\overline{A}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=|A(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})|$則有：

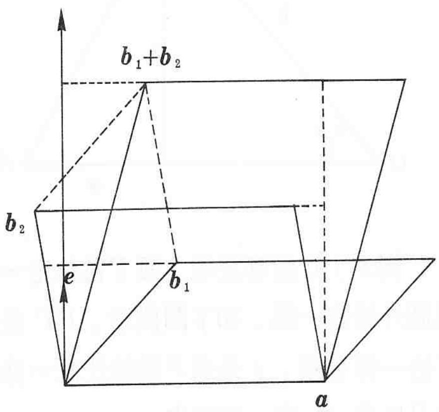
(1) $A(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})=-A(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$；
$\overline{A}(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})=\overline{A}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$

(2) $A(\lambda\cdot\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\lambda\cdot A(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$；
$\overline{A}(\lambda\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=|\lambda|\cdot\overline{A}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$

〔當$\lambda>0$時$/\!\!/(\lambda\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$和$/\!\!/(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$同向，當$\lambda<0$時則兩者反向〕。

(3) $A(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_2)=A(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}_1)+(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}_2)$

證明：如下圖所示，令$\boldsymbol{e}$是平面中，垂直於$\boldsymbol{a}$的一個單位長向量，



$$\boldsymbol{b}_1'=(\boldsymbol{b}_1\cdot\boldsymbol{e})\cdot\boldsymbol{e},\ \boldsymbol{b}_2'=(\boldsymbol{b}_2\cdot\boldsymbol{e})\cdot\boldsymbol{e}$$

則有$\boldsymbol{b}_1'+\boldsymbol{b}_2'=[(\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_2)\cdot\boldsymbol{e}]\boldsymbol{e}$；

$$A(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}_1)=A(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}_1'),$$
$$A(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}_2)=A(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}_2')$$
$$\begin{aligned}A(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_2)&=A(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}_1'+\boldsymbol{b}_2')\\&=A(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}_1')+A(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}_2')\\&=A(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}_1)+A(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}_2)。\end{aligned}$$

〔上述簡便好用性質是有號面積的特優之點，

它其實也就是引進有號面積的重要好處！〕

(ii)有號面積的〝必要性〞要在往後的應用中才能充分顯示。在這裡改用類似的實例，提一提有號長度的必要性：例如在△ABC的三條直綫上各取一點P、Q、R，則有下列二個常用的結果，即

孟納勞斯（Menelous）定理：

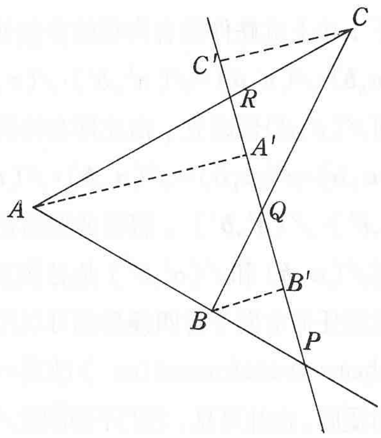
P、Q、R 三點共綫的充要條件是

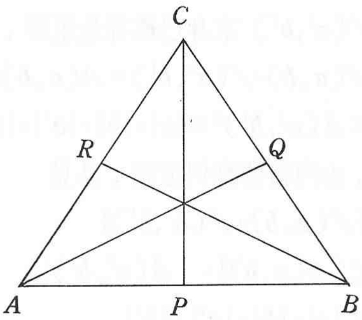
$$\frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{PB}}\cdot\frac{\overrightarrow{BQ}}{\overrightarrow{QC}}\cdot\frac{\overrightarrow{CR}}{\overrightarrow{RA}}=-1$$

西瓦（Ceva）定理：

AQ、BR、CP 三綫共點的充要條件是：

$$\frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{PB}}\cdot\frac{\overrightarrow{BQ}}{\overrightarrow{QC}}\cdot\frac{\overrightarrow{CR}}{\overrightarrow{RA}}=1$$





在上述兩個定理中有向綫段之比乃是有號長度之比！假如改爲恒正長度之比，則上述條件式是必要的但是不再是充分的了！

〔上述兩個定理的證明並不困難，却也相當有趣，讀者不妨試自證之。〕

(iii)設$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$、$\boldsymbol{d}$是共在一平面π上的四個向量。e_1、e_2則是π上的兩個選定的垂直單位向量，亦即π上的一組坐標架。令

$a_i=\boldsymbol{a}\cdot e_i$，$b_i=\boldsymbol{b}\cdot e_i$，$c_i=\boldsymbol{c}\cdot e_i$，$d_i=\boldsymbol{d}\cdot e_i$，$i=1,2$。則有

$$\boldsymbol{a}=a_1e_1+a_2e_2\text{，}\boldsymbol{b}=b_1e_1+b_2e_2\text{，}$$

$$\boldsymbol{c}=c_1e_1+c_2e_2\text{，}\boldsymbol{d}=d_1e_1+d_2e_2\text{。}$$

再由有號面積的性質(2)，(3)即有

$$A(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\begin{vmatrix}a_1&b_1\\a_2&b_2\end{vmatrix}\cdot A(e_1,e_2)$$

$$〔(e_1,e_2)=\pm1〕$$

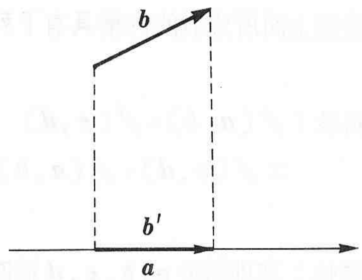
$$A(\boldsymbol{c},\boldsymbol{d})=\begin{vmatrix}c_1&d_1\\c_2&d_2\end{vmatrix}\cdot A(e_1,e_2)$$

$$A(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\cdot A(\boldsymbol{c},\boldsymbol{d})=\begin{vmatrix}a_1&b_1\\a_2&b_2\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}c_1&d_1\\c_2&d_2\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}\text{，}&\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}\\\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d}\text{，}&\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d}\end{vmatrix}\text{。}$$

〔上面的計算用到行列式的乘法公式和$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=a_1c_1+a_2c_2$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d}=a_1d_1+a_2d_2$等。〕

現在讓我們來分析一下空間的兩個有向平行四邊形之間的〝內積〞應該如何定義



〔**分析**〕：

(i)回顧空間兩個有向綫段$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 之間的內積，有兩種等價的定義法。其一爲$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{1}{2}\{|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2-|\boldsymbol{a}|^2-|\boldsymbol{b}|^2\}$；而其二爲$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}'=\boldsymbol{a}$ 和$\boldsymbol{b}'$這兩個共綫的有向綫段的有號長度的乘積，其中$\boldsymbol{b}'$是$\boldsymbol{b}$在$\boldsymbol{a}$所在的直綫上的垂直投影。

(ii)設$\mathbin{/\!\!/}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$和$\mathbin{/\!\!/}(\boldsymbol{c},\boldsymbol{d})$是空間的兩個有向平行四邊形。因爲“兩者之和”到目前爲止還不知其爲何物，所以當然無法採用類似於第一種的定義法。由此可見，值得一試的定義法是類似於第二種者。令π爲$\mathbin{/\!\!/}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ 所

在的平面，c'、d' 分別是 c、d 在 π 上的垂直投影，則 $/\!\!/(c',d')$ 也就是 $/\!\!/(c,d)$ 在 π 上的垂直投影。我們可以試着定義 $/\!\!/(a,b)$ 和 $/\!\!/(c,d)$ 的“內積”爲 $/\!\!/(a,b)$ 和 $/\!\!/(c',d')$ 這兩個**共面**的有向平行四邊形的有號面積的乘積，亦即。

$$
\begin{aligned}
&/\!\!/(a,b)\cdot /\!\!/(c,d)\\
&=A(a,b)\cdot A(c',d')\\
&=\begin{vmatrix} a\cdot c' , & b\cdot c' \\ a\cdot d' , & b\cdot d' \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

再者，由垂直投影的幾何意義容易看到

$c=c'+c''$，$d=d'+d''$；c'' 和 d'' 垂直於 π，即有 $a\cdot c=a\cdot c'$，$b\cdot c=b\cdot c'$，$a\cdot d=a\cdot d'$，$b\cdot d=b\cdot d'$。所以上述“幾何式”的內積定義具有下述代數表達式，即

$$
/\!\!/(a,b)\cdot /\!\!/(c,d)=\begin{vmatrix} a\cdot c , & b\cdot c \\ a\cdot d , & b\cdot d \end{vmatrix}。
$$

這也就是我們所要採用的**有向平行四邊形的內積的定義**。

不難驗證上面所定義的內積具有下列基本性質

(1)**對稱性**：$/\!\!/(a,b)\cdot /\!\!/(c,d)$
$=/\!\!/(c,d)\cdot /\!\!/(a,b)$

(2)**多綫性**：亦即對於 a,b,c,d 這四個變元都是滿足下述綫性條件的，例如對於 a 有

$$
\begin{aligned}
&/\!\!/(\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2,b)\cdot /\!\!/(c,d)\\
&=\lambda_1(/\!\!/(a_1,b)\cdot /\!\!/(c,d))\\
&\quad+\lambda_2\cdot(/\!\!/(a_2,b)\cdot /\!\!/(c,d))
\end{aligned}
$$

(3)$/\!\!/(a,b)\cdot /\!\!/(a,b)=A(a,b)^2$

再者，我們也可以像有向綫段的等價關係一樣地定義有向平行四邊形之間的等價條件爲平行且等積，亦即

定義：若 $/\!\!/(a,b)$ 和 $/\!\!/(c,d)$ 互相平行（亦即可以平移到同一個平面之中）而且具有相同的有號面積則稱兩者爲等價的，將以符號 $/\!\!/(a,b)\sim /\!\!/(c,d)$ 表達之。

(4)設 $/\!\!/(a,b)\sim /\!\!/(a',b')$，則對於任給 $/\!\!/(c,d)$ 恒有 $/\!\!/(a,b)\cdot /\!\!/(c,d)$
$=/\!\!/(a',b')\cdot /\!\!/(c,d)$

(4)設 $\{e_1,e_2,e_3\}$ 是空間的任給一組正交基。則 $/\!\!/(a,b)\sim /\!\!/(a',b')$ 的充要條件是 $/\!\!/(a,b)\cdot /\!\!/(e_i,e_j)$
$=/\!\!/(a',b')\cdot /\!\!/(e_i,e_j)$

$(i,j)=\{(1,2),(2,3),(3,1)\}$，

亦即它們在三個互相垂直的平面上的垂直投影具有相同的有號面積。

證：上述條件顯然是必要的，玆證明其充分性如下：由上述條件結合內積的多綫性即有

$$
/\!\!/(a,b)\cdot /\!\!/(c,d)=/\!\!/(a',b')\cdot /\!\!/(c,d)
$$

對於任何 $/\!\!/(c,d)$ 恒成立，由此即有特例

$/\!\!/(a,b)\cdot /\!\!/(a,b)=/\!\!/(a,b)\cdot /\!\!/(a',b')$
$=/\!\!/(a',b')\cdot /\!\!/(a',b')$。證明的要點在於由上式推導 $/\!\!/(a,b)$ 和 $/\!\!/(a',b')$ 是必然互相平行的。因爲任何有向平行四邊形都可以用**剪應變換**（ shear transformation ）改爲一個等價的有向矩形。由此可見，我們不妨假設 $/\!\!/(a,b)$ 和 $/\!\!/(a',b')$ 本身已經都是矩形，即有

$$
\begin{aligned}
&/\!\!/(a,b)\cdot /\!\!/(a',b')=A(a,b)^2\\
&=A(a',b')^2=|a|\cdot|b|\cdot|a'|\cdot|b'|
\end{aligned}
$$

再者，由內積的幾何定義，易見

$$
\begin{aligned}
&|/\!\!/(a,b)\cdot /\!\!/(a',b')|\\
&\leq|A(a,b)|\cdot|A(a',b')|\\
&\leq|a|\cdot|b|\cdot|a'|\cdot|b'|
\end{aligned}
$$

而且上述等號只有在 $/\!\!/(a,b)$ 和 $/\!\!/(a',b')$ 是兩個平行的矩形才成立！

(5)$A(a,b)^2=/\!\!/(a,b)\cdot /\!\!/(a,b)=$
$\{/\!\!/(a,b)\cdot /\!\!/(e_1,e_2)\}^2+\{/\!\!/(a,b)\cdot /\!\!/(e_2,e_3)\}^2$
$+\{/\!\!/(a,b)\cdot /\!\!/(e_3,e_1)\}^2$

$/\!\!/(a,b)\cdot /\!\!/(c,d)=[/\!\!/(a,b)\cdot /\!\!/(e_1e_2)]\cdot$
$[/\!\!/(c,d)\cdot /\!\!/(e_1,e_2)]+[/\!\!/(a,b)\cdot /\!\!/(e_2e_3)]\cdot$
$[/\!\!/(c,d)\cdot /\!\!/(e_2,e_3)]+[/\!\!/(a,b)\cdot /\!\!/(e_3,e_1)]\cdot$

$[/\!\!/(c,d)\cdot/\!\!/(e_3,e_1)]$

證明：令 $a=a_1e_1+a_2e_2+a_3e_3$

$$b=b_1e_1+b_2e_2+b_3e_3$$

$$c=c_1e_1+c_2e_2+c_3e_3$$

$$d=d_1e_1+d_2e_2+d_3e_3$$

由內積的多綫性即可算得

$$/\!\!/(a,b)\cdot/\!\!/(e_i,e_j)=\begin{vmatrix} a_i & b_i \\ a_j & b_j \end{vmatrix},$$

$$/\!\!/(c,d)\cdot/\!\!/(e_i,e_j)=\begin{vmatrix} c_i & d_i \\ c_j & d_j \end{vmatrix},$$

$$/\!\!/(a,b)\cdot/\!\!/(c,d)$$

$$=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\cdot[/\!\!/(e_1e_2)\cdot/\!\!/(c,d)]$$

$$+\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}\cdot[/\!\!/(e_2e_3)\cdot/\!\!/(c,d)]$$

$$+\begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}\cdot[/\!\!/(e_3,e_1)\cdot/\!\!/(c,d)]$$

$$=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} c_2 & d_2 \\ c_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} c_3 & d_3 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix}$$

〔上述兩式也就是勾股定理的二維推廣以及其兩元化形式。〕

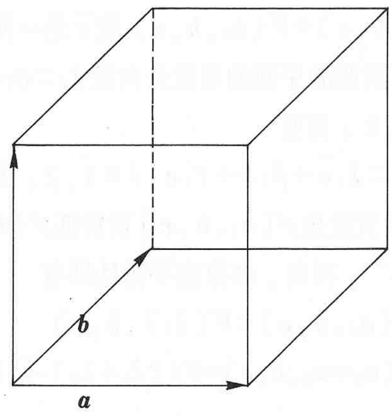
(二)有號體積(oriented volume)和行列式(determinant)

設 a,b,c 是空間三個向量，如下圖所示，$/\!\!/(a,b,c)$ 是它們所張的平行體。應該如何引進空間的"定向"和"平行體的有號體積"，使得它具有類似於上段有號面積所享有的優良性質。

〔**分析**〕：

(i) 令 $\bar{V}(a,b,c)$ 爲 $/\!\!/(a,b,c)$ 的恒正體積。則不難看到它具有下列基本性質，即

(1)**對稱性**：$\bar{V}(a,b,c)$ 對於變元 a,b,c 是對稱的。



(2)**剪應不變性**：$/\!\!/(a,b,c)$ 和 $/\!\!/(a,b,c+\alpha a+\beta b)$

乃是兩個同底同高的平行體，所以是等體積的，亦即有

$$\bar{V}(a,b,c+\alpha a+\beta b)=\bar{V}(a,b,c),\quad \alpha,\beta\in R。$$

(3) $\bar{V}(\lambda a,b,c)=|\lambda|\cdot\bar{V}(a,b,c)$

(4)設 e_1,e_2,e_3 是空間的一組正交基，則有 $\bar{V}(e_1,e_2,e_3)=1$

(ii)我們所要尋求者，就是比上述 $\bar{V}$ 細緻一些的"有號體積函數" $V(a,b,c)$；它只是給 $\bar{V}$ 加上一個適當的符號，使得 $V(\lambda a,b,c)=\lambda\cdot V(a,b,c)$，亦即在性質(3)上有所改進。但是一個具有上述性質和剪應不變性的函數必然是斜對稱的，即有

$$V(a,b,c)=V(a+b,b,c)=$$
$$V(a+b,-a,c)=V(b,-a,c)$$
$$=-V(b,a,c)$$

由此可見，我們所要尋求者的特徵性質應該是

(1) $V(a,b,c)=\pm\bar{V}(a,b,c)$ 而且是斜對稱的。

(2)**剪應不變性**：$V(a+\lambda b+\mu c,b,c)=V(a,b,c)$

(3′)**半綫性**：$V(\lambda a,b,c)=\lambda\cdot V(a,b,c)$

(iii)其實，結合上述性質(2)和(3′)，即可推導而得 V 的全綫性，亦即 $V(\lambda_1a_1+\lambda_2a_2,b,c)=\lambda_1V(a_1,b,c)+\lambda_2V(a_2,b,c)$，玆證之如下：

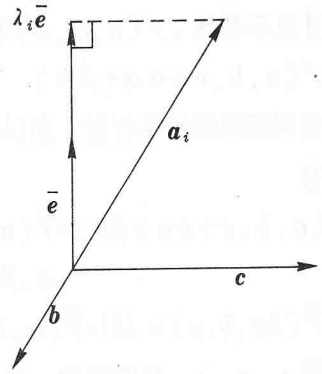
我們只需要證明 $V(a_1+a_2,b,c)=$

$V(a_1,b,c)+V(a_2,b,c)$ 設 $\bar{e}$ 是一個垂直於 b,c 所張的平面的單位長向量 $\lambda_i = a_i \cdot \bar{e}$，$i=1,2$。則有

$a_i = \lambda_i \bar{e} + \beta_i b + \gamma_i c$，$i=1,2$。由此易見 λ_i 其實就是 $\mathbin{/\!/}(a_i,b,c)$ 對於底 $\mathbin{/\!/}(b,c)$ 的"高"。再者，由剪應不變性即有

$$V(a_i,b,c)=V(\lambda_i \bar{e},b,c)$$

$$V(a_1+a_2,b,c)=V((\lambda_1+\lambda_2)\cdot\bar{e},b,c)$$



再用半綫性即有

$$V(a_1+a_2,b,c)=(\lambda_1+\lambda_2)\cdot V(\bar{e},b,c)$$
$$=\lambda_1\cdot V(\bar{e},b,c)+\lambda_2 V(\bar{e},b,c)$$
$$=V(\lambda_1\bar{e},b,c)+V(\lambda_2\bar{e},b,c)$$
$$=V(a_1,b,c)+V(a_2,b,c)$$

(iv)設 $\{e_1,e_2,e_3\}$ 是空間中任選一組正交基，由斜對稱性和上面已證的全綫性即可將這樣一個假設存在的 $V(a,b,c)$ 展開，亦即用

$$a=a_1e_1+a_2e_2+a_3e_3$$
$$b=b_1e_1+b_2e_2+b_3e_3$$
$$c=c_1e_1+c_2e_2+c_3e_3$$

代入 $V(a,b,c)$，再用全綫性展成 $3^3=27$ 項，然後用斜對稱性說明其中只有6項不爲零，而且都是 $V(e_1,e_2,e_3)$ 的適當倍。其結果即爲

$$V(a,b,c)=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}\cdot V(e_1,e_2,e_3)$$

由此可見，我們所尋求的有號體積 $V(a,b,c)$ 是存在的；它有兩種可能，亦即是相應於 $V(e_1,e_2,e_3)=\pm 1$ 者；而 $V(e_1,e_2,e_3)$ 取定爲 $+1$ 還是 -1 也就是對於空間取定一種"定向"者也！

當然，我們也可以把上述研討的結果，順理成章地推廣到高維內積向量空間去。

設 E 是一個 k-維的內積向量空間（vector space with inner product），一組 k 個互相垂直的單位長向量 $\{e_i;1\leq i\leq k\}$ 叫做它的一組正交基。因爲 E 中任給向量 a 都可以唯一地表成它們的綫性組合，即 $a=a_1\cdot e_1+\cdots+a_k e_k$，其中 $a_i=a\cdot e_i$。對於任給一組 k 個向量 $\{a_j,1\leq j\leq k\}$，令 $\mathbin{/\!/}(a_1,a_2,\cdots,a_k)$ 爲其所張的 k-維平行體，即

$$\mathbin{/\!/}(a_1,\cdots,a_k)=\{\sum_{i=1}^{k}\lambda_i a_i;0\leq\lambda_i\leq 1\}$$

〔當它們是綫性相關時，上述子集的維數小於 k，則上述子集是退化的 k-維平行體，其 k-維體積爲零。

定義：取定 $\mathbin{/\!/}(e_1,\cdots e_k)$ 爲 $+1$ 或 -1 也就是在 E 上取定一個定向（orientation）。相應地 $\mathbin{/\!/}(a_1,\cdots,a_k)$ 的有號體積也就定義爲下述行列式或其相反值，

$$v(a_1,\cdots,a_k)=\pm\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22}\cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2}\cdots & a_{kk} \end{vmatrix}。$$

其中 $a_{ij}=e_i\cdot a_j$。

定理：$V(a_1,\cdots,a_k)\cdot V(b_1,\cdots,b_k)$

$=\det(a_i\cdot b_j)$

〔這其實也就是行列式乘法公式的幾何形式〕

證明：$v(a_1,\cdots,a_k)\cdot v(b_1,\cdots,b_k)$

$$=\pm\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22}\cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2}\cdots & a_{kk} \end{vmatrix}\cdot\pm\begin{vmatrix} b_{11}, & b_{12}\cdots & b_{1k} \\ b_{21}, & b_{22}\cdots & b_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{k1}, & b_{k2}\cdots & b_{kk} \end{vmatrix}$$

$=\det(c_{ij})$

其中 $c_{ij}=\sum_{l=1}^{k}a_{li}\cdot b_{lj}=a_i\cdot b_j$。