3. 有關 $\Sigma\frac{1}{n}$ 的回響

張 鎮 華

本文作者爲本所同仁

數季第二期第 192 頁上有一問題:「試證 $(\Sigma 1/n)$ 中去掉分母中符號含有 9 之各項後，所餘級數一定收斂，且收斂值小於 80」，原證法:

$$S=\underbrace{\left(1+\frac{1}{2}+\cdots\cdots+\frac{1}{8}\right)}_{\text{小於 } 8\cdot 1}+\underbrace{\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\cdots\cdots+\frac{1}{88}\right)}_{\text{小於 } 8\cdot 9\cdot\frac{1}{10}}$$

$$+\underbrace{\left(\frac{1}{100}+\frac{1}{101}+\cdots\cdots+\frac{1}{880}\right)}_{\text{小於 } 8\cdot 9^2\cdot\frac{1}{100}}+\cdots\cdots$$

$$<8\left(1+\left(\frac{9}{10}\right)+\left(\frac{9}{10}\right)^2+\cdots\cdots\right)$$

$$=8\cdot\frac{1}{1-9/10}=80.$$

很容易可以看出來， 80 並非很好的估計值；也就是說，S 實際上比 80 小很多。到底有多小，這是我們與趣所在。

首先，由於 $1/(x-a)+1/(x+a)=2x/(x^2-a^2)$, $|a|$ 越大，和越大，所以 $1/10+1/18>1/11+1/17>1/12+1/16>1/13+1/15>2/14$ 卽是

$$9\cdot\frac{1}{14}<\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\cdots\cdots+\frac{1}{18}<\frac{9}{2}\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{18}\right)$$

$$S=\left(1+\frac{1}{2}+\cdots\cdots+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\cdots\cdots+\frac{1}{18}\right)$$

大於 $9\cdot\frac{1}{14}$ 　　　大於 $9\cdot\frac{1}{24}$

於 $\frac{9}{2}\cdot\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{18}\right)$ 　　　小於 $\frac{9}{2}\left(\frac{1}{20}+\frac{1}{28}\right)$

$$+\left(\frac{1}{20}+\frac{1}{21}+\cdots\cdots+\frac{1}{28}\right)+\cdots\cdots$$

令 $A=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}=2\frac{201}{280}$,

即 $10A=27\frac{5}{28}$

則 $S_1<S<S_2$

其中 $S_1=A+\frac{9}{10}\left\{\frac{1}{1.4}+\frac{1}{2.4}+\cdots\cdots+\frac{1}{8.4}+\frac{1}{10.4}+\frac{1}{11.4}+\cdots\cdots\right\}$

$$=\frac{9}{10}S+A-\frac{9}{10}\left\{\left(1-\frac{1}{1.4}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2.4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3.4}\right)+\cdots\cdots\right\}$$

$$=\frac{9}{10}S+A-\frac{9}{10}\left\{\frac{0.4}{1.4}+\frac{0.4}{2\times2.4}+\frac{0.4}{3\times3.4}+\cdots\cdots\right\}$$

但 $\frac{1}{3\times3.4}+\frac{1}{4\times4.4}+\cdots\cdots+\frac{1}{8\times8.4}+\frac{1}{10\times10.4}+\cdots\cdots$

$$<\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n(n+0.4)}<\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(n-0.3)(n+0.7)}$$

$$=\sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{1}{n-0.3}-\frac{1}{n+0.7}\right)$$

$$=\frac{1}{2.7}\text{ (利用 telescoping 級數)}$$

所以 $S_1>\frac{9}{10}S+A-\frac{9}{10}\frac{4}{10}\left\{\frac{1}{1.4}+\frac{1}{4.8}+\frac{1}{2.7}\right\}.$

因為 $S>S_1>\frac{9}{10}S+A-\frac{36}{10}\left\{\frac{1}{14}+\frac{1}{48}+\frac{1}{27}\right\}$

$$10S>9S+10A-36\left\{\frac{1}{14}+\frac{1}{48}+\frac{1}{27}\right\}=9S+22\frac{11}{21}$$

$$S>22\frac{11}{21}\qquad(*)$$

另一方面

$$S_2=A+\frac{9}{20}\left\{\left(\frac{1}{1.0}+\frac{1}{1.8}\right)+\left(\frac{1}{2.0}+\frac{1}{2.8}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{8.0}+\frac{1}{8.8}\right)+\left(\frac{1}{10.0}+\frac{1}{10.8}\right)+\left(\frac{1}{11.0}+\frac{1}{11.8}\right)+\cdots\cdots\left(\frac{1}{18.0}+\frac{1}{18.8}\right)+\cdots\cdots\right\}$$

但 $\left(\frac{1}{1.8}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2.8}-\frac{1}{3}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{8.8}-\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{10.8}-\frac{1}{11}\right)+\cdots\cdots$

$$=\frac{0.2}{1.8\times2}+\frac{0.2}{2.8\times3}+\cdots\cdots+\frac{0.2}{8.8\times9}+\frac{0.2}{10.8\times11}+\cdots\cdots$$

$$<\frac{2}{36}+\frac{2}{84}+\sum_{n=4}^{\infty}\frac{0.2}{(n-0.2)n}$$

$$<\frac{1}{18}+\frac{1}{42}+\sum_{n=4}^{\infty}\frac{0.2}{(n-0.6)(n+0.4)}$$

$$=\frac{1}{18}+\frac{1}{42}+\frac{0.2}{3.4}=\frac{1}{18}+\frac{1}{42}+\frac{1}{17}\text{ (利用 telescoping 級數)}$$

故 $\frac{1}{1.8}+\frac{1}{2.8}+\cdots\cdots+\frac{1}{8.8}+\frac{1}{10.8}+\frac{1}{11.8}+\cdots\cdots+\frac{1}{18.8}+\frac{1}{20.8}+\cdots\cdots$

$$<\frac{1}{18}+\frac{1}{42}+\frac{1}{17}+\left\{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\cdots\cdots+\frac{1}{19}\right)+\cdots\cdots\right\}$$

$$=\frac{1}{18}+\frac{1}{42}+\frac{1}{17}+S-1+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}+\frac{1}{19}-\frac{1}{20}+\frac{1}{29}-\cdots\cdots$$

即 $S<S_2<A+\frac{9}{10}S+\frac{1}{18}+\frac{1}{42}+\frac{1}{17}-1+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}+\frac{1}{19}-\cdots$

$$S<10\left(A+\frac{1}{18}+\frac{1}{42}+\frac{1}{17}-1+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}+\frac{1}{19}\right)<23.6\qquad(**)$$

綜合 (*) 及 (**) 可得

$$22.5<22\frac{11}{22}<S<23.6$$

試問有更好的估計值，或者更確定的值嗎？請教大家。

〔註〕

求得某一級數的確定值有時是一件很不容易的事情。譬如要求 $\Sigma^{\infty}{}_{n=1}1/n^2$，用估計的方法可以知道：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{2^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{m^2}+\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

其中 $\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}<\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)}$

$$\frac{1}{m+1}<\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<\frac{1}{m}$$

所以 $\frac{1}{m+1}+\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{i^2}<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<\frac{1}{m}+\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{i^2}$

上界和下界之差只有 $\frac{1}{m}-\frac{1}{m+1}=\frac{1}{m(m+1)}$

譬如 $m=3$，可得 $1.611<\Sigma^{\infty}{}_{n=1}1/n^2<1.695$ 已經有相當準確性。但要真正證明 $\Sigma^{\infty}{}_{n=1}1/n^2=\pi^2/6$ 則是一件大難事。