2. 鋸木問題

王 進 賢

本文作者現任教於海軍官校數學系

假如您開了一家木材加工廠，用木板生產木條，您一定會希望知道每塊木板可生產多少木條，以便將來有人向您定購木條時，您能計算需採購多少木板？同時，您也一定希望知道用什麼方法可鋸取最多木條，以便告訴工人如法泡製。像這麼一般化的問題，討論起來是頗爲繁瑣的，本文僅擬就簡化後的狀況加以討論，底下就是我們要討論的問題：

「由邊長爲 n 的正方形木板（底下以 S_n 表示），鋸取邊長爲 m 和 1 的長方形木條（底下以 $R_{(m,1)}$ 表示），在此 n，m 表自然數，$m<n$（下文中提及 m，n 時均如此限制），問最多能鋸成幾塊？又何種鋸法可得最多？」

這個問題我們分兩種情況來討論：

第一種情況：當 n 是 m 的倍數時。

很顯然地，S_n 可分割成 n^2/m 塊 $R_{(m,1)}$，這樣的問題是沒什麼討論價値的。但是，如果我們將 S_n 割掉一些再來問能割成若干塊 $R_{(m,1)}$？問題就顯得有趣多了！例如，圖一係將 S_8 在左上角及右下角各取去一塊 S_1，問圖一能割成幾塊 $R_{(2,1)}$，

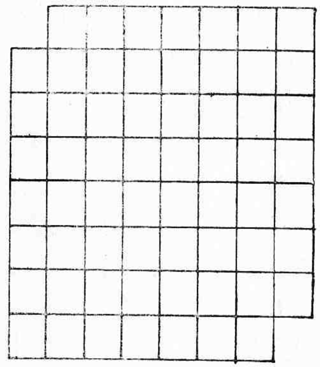

圖 一

假如您先不往下看而停下來“割”幾次試試的話，您將會發現最多只能割成 30 塊！我們要問，是否有某種方法能割成 31 塊呢？爲什麼？

這個問題我們用“着色法”來解答，方法如下：將圖一着上兩種顏色如圖二，

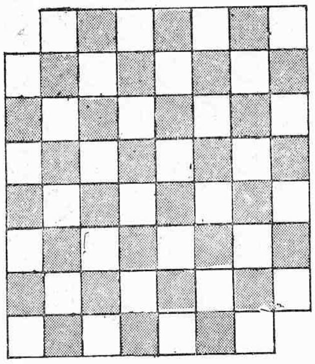

圖　二

我們發現，有 30 塊黑，32 塊白，而每一次鋸下一塊$R_{(2,1)}$，就用掉了一塊黑一塊白，因此圖一是不能鋸成 31 塊 $R_{(2,1)}$ 的！把這個方法推廣，再加上一些數學名詞來修飾，那麼65年度臺大數研所博士班筆試試題第二題（見數學傳播第二期第 144 頁）就可迎刃而解了。並且我們前面所提到的一般情況也可以輕鬆地討論了，當然，着色所需顏色的數目是m種！

第二種情況：當n不是m的倍數時。

這時 S_n 所能割成 $R_{(m,1)}$ 的塊數並非以 n^2 除以 m 所得的商！例如 S_{10} 不能割成 14 塊 $R_{(7,1)}$，事實上，S_{10} 最多能割成 13 塊 $R_{(7,1)}$。對於這類問題的處理，我們仍運用“着色法”來討論，如圖三，

1	2	3	4	5	6	7	1	2	3
2	3	4	5	6	7	1	2	3	4
3	4	5	6	7	1	2	3	4	5
4	5	6	7	1	2	3	4	5	6
5	6	7	1	2	3	4	5	6	7
6	7	1	2	3	4	5	6	7	1
7	1	2	3	4	5	6	7	1	2
1	2	3	4	5	6	7	1	2	3
2	3	4	5	6	7	1	2	3	4
3	4	5	6	7	1	2	3	4	5

圖　三

1, 2, ……, 7 分別代表七種不同的顏色，我們發現只有 13個“7”，而鋸一塊 $R_{(7,1)}$ 需用掉 1, 2, ……, 7 各一次，因此 S_{10} 最多只能割成 13 塊 $R_{(7,1)}$。一般性的問題亦可用此方法，塗上顏色後再來計算每一種顏色的個數，就可曉得最多能鋸得幾塊。讓我們再來看看圖三，每一條 45° 斜線都是同一種顏色，這能幫助計算每一種顏色的個數。利用觀察歸納，我們得到如下結果：

將 S_n 以類似圖三的方式塗上m種顏色，則

$$N(i)=\sum_{k=0}^{q_1(i)}(i+km)+\sum_{k=q_1(i)+1}^{q_2(i)}[2n-(i+km)]$$

$$1\leq i\leq m$$

此處 $N(i)$ 表第 i 種顏色的個數，$q_1(i)$ 表 $n-i$ 除以 m的商數，$q_2(i)$ 表 $2n-i$ 除以m的商數。

在理論上，我們有了這個計算個數的公式之後，要處理 S_n 最多能割成幾塊 $R_{(m,1)}$ 就沒什麼大困難了；但在實用價值上，這個公式“並不値錢”。我們需要有個法則來判定 m 個 $N(i)$ 中那個數目最小，那麼計算這個 $N(i)$ 就可曉得最多可鋸幾塊了。讓我們再來觀察圖三，10 除以 7 的餘數 3 佔領了對角線，1, 2, ……, 7 中與 3 隔了“最遠”的 7 有“最少”的個數 13。假如讀者再多觀察些圖形，將會發現這個法則是對的！但是我們不打算在這兒證它。最後，我們來談談“鋸法”，很顯然地，由一塊 S_n 鋸取 $R_{(m,1)}$ 有很多種方式，那一種方式能夠鋸得最多呢？

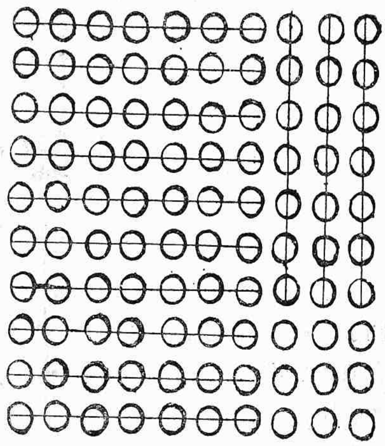

圖　四

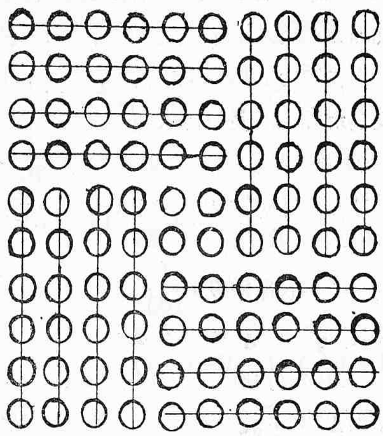

圖　五

在圖四和圖五，我們以圓圈代替小方塊，線段代表鋸的方式。圖四從 S_{10} 鋸取 $R_{(7,1)}$ 的一種方法，圖五是從 S_{10} 鋸取 $R_{(6,1)}$ 的一種方法。這是很“自然”的兩種方式，底下我們要說明這也是很“妥當”的兩種方式。我們分 $n>m>2n/3$，$2n/3\geq m>n/2$ 和 $n/2>m$ 三種情形來說明:

（i） $n>m>2n/3$ 時，則 $1<n/m<3/2$，根據前面所談的“法則”，第m種顏色個數最少，再根據計算公式，這時 $N(m)=m+[2n-(m+m)]=2n-m$; 而依照類似圖四那種鋸法我們可得 $2n-m$ 塊 $R_{(m,1)}$。因此，像圖四那種鋸法是這一型態問題鋸得最多的一種鋸法。

（ii） $2n/3\geq m>n/2$時，則 $3/2\leq n/m<2$，根據前面所談的“法則”，第1種顏色個數最少，再根據計算公式，這時$N(1)=1+(1+m)+[2n-(1+2m)]+[2n-(1+3m)]=4n-4m$; 而依照類似圖五那種鋸法我們可得 $4(n-m)$ 塊 $R_{(m,1)}$。因此，像圖五那種鋸法是這一型態問題鋸得最多的一種鋸法。

(iii) 當 $n/2>m$ 時，我們可用“縮小”方式處理。如我們想從 S_8 中鋸取 $R_{(3,1)}$，可用像圖六這種方式:

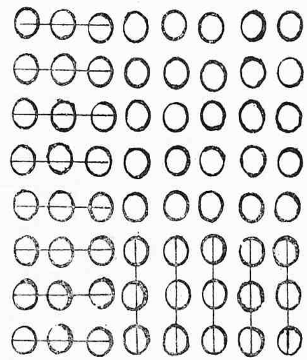

圖　六

先鋸掉外邊一層，取得 13 塊 $R_{(3,1)}$，剩下 S_5 再用（ii）的方式取得 8 塊。一般說來，從 S_n 外層鋸得 $2n-m$ 塊 $R_{(m,1)}$，剩下 S_{n-m} 再用（i）或（ii）的方式處理，如果 $n-m$ 依舊大於 $2m$ 的話，則再把外層鋸掉直到剩下來的正方塊邊長大於 m 小於 $2m$，然後再用（i）或（ii）來處理。