

D0016 極值求法：高一下程度

當 $x > 0, y > 0$ 時求 $(x+(1/y))(2y+(1/2x))$ 之最小值？下述兩種做法所得答案不同，錯在那裏？

(i) 某甲計算過程如下：

利用「算術平均數 \geq 幾何平均數」

$$\text{得 } x + (1/y) \geq 2\sqrt{x/y} \quad \text{①}$$

$$\text{且 } 2y + (1/2x) \geq 2\sqrt{y/x} \quad \text{②}$$

① \times ②得

$$(x+(1/y)) \cdot (2y+(1/2x)) \geq 2\sqrt{x/y} \cdot 2\sqrt{y/x} = 4$$

故 $(x+(1/y))(2y+(1/2x))$ 之最小值為 4。

ii) 某乙計算過程如下：

利用『柯西—舒瓦茲不等式』得

$$\begin{aligned} (x+(1/y))((1/2x)+2y) &\geq (\sqrt{x} \cdot \sqrt{1/2x} + \sqrt{1/y} \cdot \sqrt{2y})^2 \\ &= (\sqrt{1/2} + \sqrt{2})^2 = 9/2 \end{aligned}$$

故 $(x+(1/y))((1/2x)+2y)$ 之最小值為 $9/2$ 。

(新化高中 羅添壽老師提供)