旋轉與鏡射

呂輝雄

本文作者現任教於清華大學數學系

平面上的旋轉與鏡射，是兩個常見到的觀念，在這篇短文裏，我們想談一下這兩個觀念的幾何意義。

在平面上繞着原點旋轉 θ 角的運動，如果將一個點其座標爲 (x,y) 帶到另外一點其座標爲 (x',y')，則我們知道座標之間應該滿足

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' &= x\sin\theta + y\cos\theta \end{aligned} \tag{1}$$

至於在平面上對於某一條經過原點的直線作鏡射，我們可以用以下方式得出它們座標之間的關係。如果我們稱一個經過原點而與 x 軸成 $\theta/2$ 角的固定直線爲 l，任意一個點 (x,y) 對於直線 l 作鏡射而得的對應點的座標以 (x',y') 表示，我們可以證明

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\theta + y\sin\theta \\ y' &= x\sin\theta - y\cos\theta \end{aligned}$$

這個結果可以這樣看出來，在平面上考慮一個新的座標系統 (ξ,η)，而其中 ξ 軸爲直線 l，而 η 軸爲與 ξ 軸成直交的直線，這裏 ξ 軸與 η 軸的方向爲從原來的座標系統旋轉 $\theta/2$ 所得到的。則得一個點對於兩個座標系統其座標 (x,y) 與 (ξ,η) 間的關係是

$$\begin{aligned} \xi &= x\cos(\theta/2) + y\sin(\theta/2) \\ \eta &= -x\sin(\theta/2) + y\cos(\theta/2) \end{aligned} \tag{2}$$

再將 (ξ,η) 對於 ξ 軸作鏡射而得像點 $(\xi,-\eta)$，最後，將 $(\xi,-\eta)$ 這個點按照上面(2)式得對於舊座標系的座標 (x',y')，故有

$$\begin{aligned} \xi &= x'\cos(\theta/2) + y'\sin(\theta/2) \\ -\eta &= -x'\sin(\theta/2) + y'\cos(\theta/2) \end{aligned} \tag{3}$$

解得

$$\begin{aligned} x' &= \xi\cos(\theta/2) + \eta\sin(\theta/2) \\ y' &= \xi\sin(\theta/2) - \eta\cos(\theta/2) \end{aligned} \tag{4}$$

將 ξ,η 的值代入(4)式，即得

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\theta + y\sin\theta \\ y' &= x\sin\theta - y\cos\theta \end{aligned} \tag{5}$$

旋轉與鏡射這兩種變換都將以原點爲圓心的圓周上的點帶到同一圓周上；特別地，他們將原點固定住。**所以旋轉與鏡射這兩種變換都保持平面上的距離不變。**當然了，**在平面上保持距離不變的還有平移這種變換，可是平移並不能固定原點。**

我們現在考慮所有能固定原點的線性變換，再研究其中能保持距離不變的變換。設

$$x'=ax+by$$
$$y'=cx+dy \tag{6}$$

如果這個變換能保持距離不變，則對於任何 (x,y)，我們應該有

$$(x')^2+(y')^2=(x)^2+(y)^2$$

令 $x=1$，$y=0$，則上述條件就是

$$a^2+c^2=1, \tag{7}$$

令 $x=0$，$y=1$，則上述條件就是

$$b^2+d^2=1, \tag{8}$$

令 $x=1$，$y=1$，再配合剛剛所得的兩個條件，我們就得到

$$ab+cd=0 \tag{9}$$

所以要得到所有的保持距離不變的線性變換，我們只要研究一下那些 a,b,c,d 可以滿足剛剛所提出來的3個條件(7)～(9)。做法很簡單，我們只要令 $a=\cos\theta$，則 $c=\pm\sin\theta$；同樣地，如果 $b=\cos\varphi$，則 $d=\pm\sin\varphi$，再將這些結果代入第(9)式即可。如果將 $c=\sin\theta$，$d=\sin\varphi$ 代入，我們有 $\cos(\theta-\varphi)=0$，故 $\theta-\varphi=\pi/2$，所以解出來的一組解是

$$a=\cos\theta,\ b=\sin\theta,\ c=\sin\theta,\ d=-\cos\theta$$

同樣地，如果將 $c=-\sin\theta$，$d=\sin\varphi$ 代入第3個條件，我們得到

$$a=\cos\theta,\quad b=-\sin\theta,\quad c=\sin\theta,\quad d=\cos\theta$$

將其他可能情形代入，所得的解與上面這兩組解是一樣的。

所以，我們得出來的結論是：**能够固定原點且保持距離不變的線性變換**

$$x'=ax+by$$
$$y'=cx+dy$$

只有旋轉與鏡射。

這個結果，要推廣到3度空間並不難，在對應的3維空間的保長變換一定有一固定軸（旋轉軸），在與這固定軸垂直而經過原點的平面上，其變換的可能方式就只有我們所得到的結果，旋轉與鏡射兩種。