幾何與算術的邊界

林聰源

本文作者現任敎於清華大學數學系

在解析幾何的學習中，我們了解圖形與方程式(一般情況下爲多項式方程式)間之相對關係，而所用的多項式是以實數作係數。所以我們簡單地說，解析幾何是討論與實係數多項式相應的幾何性質。如果我們從代數的觀點出發，以任意的體代替實數體時，我們就會自然地進入所謂「代數幾何學」的研討，換句話說，給定一個體 k，相應於係數佈於 k 上之任意一多項式 $p(x)\in k[x]$，我們考慮解集合 $p(x)=0$。則此等解集合之討論卽代數幾何學之範疇。本文不擬在這方面多談只是點出「代數」與「幾何」之相關性，以助下文之說明。

現在讓我們回到熟悉的解析幾何裏。在整個平面（卽 R^2）上，我們畫上方格（就像座標紙上之方格）於是平面就分成了相同大小的方格。這些方格的頂點我們稱之爲格子點（如圖 1）

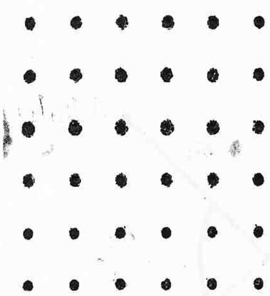

圖 1

我們可以很明顯的選取一個座標系，使得格子點之座標爲整數之序對，反之，整數之序對正好對應於格子點。這些格子點是這麼平均地分佈在平面上。看起來好像沒有什麼好說的。而且似乎也不可能牽涉到有趣的或困難的問題。然而，一百五十年來，從偉大的數學家高斯的時代直到如今，格子點一直是一些有趣的數學探討的對象；形形色色的問題以此爲主題，下面我們就要提出幾個這種問題來討論。在沒做這件事之前，讓我們回想一下代數幾何學的觀點。也就是說，既然平面上之曲線之討論是與實係數多項式相關連，那麼單以格子點形成的幾何圖形其所對應的代數觀念是什麼呢？那就是「整數」及「整數論」問題了！

下面我們先舉出四個不同型式的這類問題，並稍作解釋，最後詳細地討論所謂的 “Steinhaus 型問題”。

甲、對一給定的自然數 n，我們考慮將 n 分解成兩個整數平方和 $n=a^2+b^2$ 之可能性，習慣上以符號 $r_2(n)$ 表示此種分解法之個數。例如

$$1=1^2+0^2=0^2+1^2=(-1)^2+0^2=0^2+(-1)^2$$

故 $r_2(1)=4$，但 $r_2(3)=0$，因爲簡單的計算顯示出 3 不能分解成兩個整數的平方和。一

般來說，我們已求出如下的公式:

$$r_2(n)=4\sum_{u|n}(-1)^{\frac{1}{2}(u-1)} \qquad u\text{: 奇數}$$

因爲奇數 u 必呈 $4k+1$ 或 $4k+3$ 之型，若爲前者則

$$(-1)^{\frac{1}{2}(u-1)}=(-1)^{\frac{1}{2}(4k)}=(-1)^{2k}=1$$

若爲後者則

$$(-1)^{\frac{1}{2}(u-1)}=(-1)^{\frac{1}{2}(4k+2)}=(-1)^{2k+1}=-1$$

故將 n 分解成兩平方和之方法數計爲 n 之 $4k+1$ 型因數的個數與 $4k+3$ 型因數個數之差之4倍。現在我們以原點爲圓心，$\sqrt{n}$ 爲半徑畫圓，然後以 x 與 y 表示圓周上點之坐標，則有

$$n=x^2+y^2$$

由此我們很容易導出:「圓周上之所有格子點卽可決定將 n 分解成兩個整數平方和之所有可能方式」這是平方和問題的一個有趣的幾何表示，然而實際上要運用此原理來求分解法却不適當。

乙、我們考慮那些正多邊形可以將頂點全放在格子點上這問題。假設正 n 邊形 $ABCD\cdots\cdots$ 之頂點 $A,B,C,D,\cdots\cdots$ 全爲格子點，則其座標 $(k_1,l_1),(k_2,l_2),\cdots\cdots$ 全爲整數序對，由簡單之計算可知每一個內角都等於 $\pi-(2\pi/n)$，再由三角學卽得

$$\tan\left(\pi-\frac{2\pi}{n}\right)=\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}$$

其中 m_1,m_2 分別爲線段 AB 與 BC 之斜率。(如圖2)

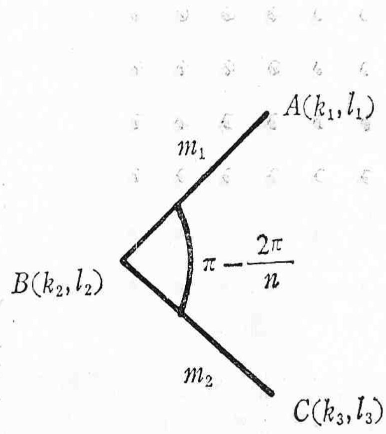

圖 2

顯然

$$m_1=\frac{l_2-l_1}{k_2-k_1},\qquad m_2=\frac{l_3-}{k_3-k_2}$$

都是有理數(或 $\pm\infty$)，故 $\tan(2\pi/n)$ 等於一有理數(或 $\pm\infty$)是正 n 邊形之頂點全落在格子點上之一必要條件，由實際的演算我們知道

$$n=3,\quad \tan\frac{2\pi}{3}=-\sqrt{3};\qquad n=4,\quad \tan\frac{2\pi}{4}=\infty$$

$$n=5,\quad \tan\frac{2\pi}{5}=\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}};\qquad n=6,\quad \tan\frac{2\pi}{6}=\sqrt{3}$$

所以我們不能將正三角形，正五邊形，正六邊形的頂點全放在格子點上。但是正方形却是可能的，如圖 3。

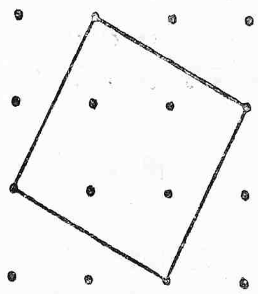

圖 3

事實上，只有正方形有此可能，但證明不很簡單。(以上討論之中，不巧地有 ∞ 出現，如果讀者之中有人對此感到困惑，只需注意以下有關 ∞ 之運算，

$$\frac{\infty-c}{1+\infty\cdot c}=\frac{1-\frac{c}{\infty}}{\frac{1}{\infty}+c}=\frac{1-0}{0+c}=\frac{1}{c},\quad c\text{ 爲非零實數}$$

丙、下圖 (圖 4) 中之平行四邊形皆以格子點爲頂點，且其面積等於 1。事實上，任意一個平行四邊形，如其頂點皆爲格子點，且其內部及邊緣不含其他格子點時，其面積必等於 1！

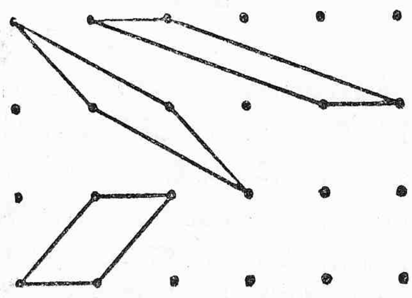

圖 4

丁、平面上之一直線能包含多少格子點呢？我們先看一個最簡單的情形，即假設某直線 l 上有一格子點 O，在不失一般性下，可將 O 點視爲原點，再分成兩種情形討論，即是否有另外一個格子點落在其上。如果是的話，設此點爲 P，則其座標呈 (k,l) 之型，其中 k,l 爲整數，這就不難看出所有滿足條件

$$kl'=lk'$$

之格子點 $(k',\ l')$ 也都落在此直線上，換句話說，在此情況下有無窮多格子點在此線上。總結而論，一直線可能不含任何格子點（譬如平行於直軸或橫軸，而其截距不爲整數之直線皆然，如圖 5 中的 l_2），可能只含一個格子點（譬如過原點而其斜率爲一無理數者如 l_3）也可能包含無窮多個格子點（如 l_1）。

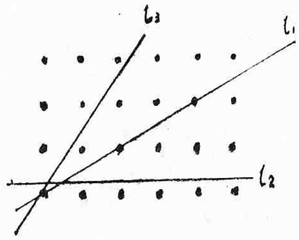

圖 5

戊、60 年代，H. Steinhaus 提出下列之問題:

「對每一個自然數，n 是否在平面上可畫一個圓，其內部恰含 n 個格子點? 」

在處理此類型的問題之中，如果我們要求圓心落在格子點上，則立刻發現對某些自然數而言，沒有一個以格子點爲圓心的圓其內部恰含 n 個格子點。譬如說，以一格子點爲圓心而半徑 <1 的圓其內部含一個格子點，但若半徑 >1 且 $\leq\sqrt{2}$ 時，則恰有五個格子點落在內部（如圖 6）

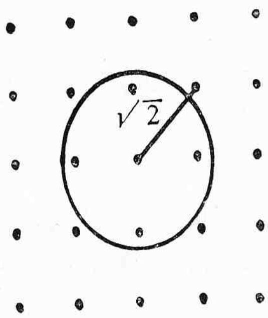

圖 6

換句話說，沒有一個圓以格子點爲圓心而內部恰含 2,3 或 4 個格子點!

爲了彌補以上缺陷，我們取方格上任一邊之中點爲圓心，則當半徑 $\leq 1/2$ 時，此圓內部不含格子點，但若半徑 $>1/2$ 且小於或等於 $\sqrt{5}/2$ 時，此圓內部恰含兩個格子點(圖7-1)。更進一步，我們取方格的中心爲圓心，則當半徑 $\leq\sqrt{2}/2$ 時，此圓內部不含格子點，但若半徑大於 $\sqrt{2}/2$ 且小於或等於 $\sqrt{10}/2$ 時，此圓內部恰含四個格子點（圖7-2)。最後，我們將上述之圓心沿方格的對角線稍微移動一下，然後以此新圓心到方格中最遠之頂點之距離爲半徑畫圓，則所得之圓內部恰含三個格子點（圖7-3，又×點 O 代表圓心）

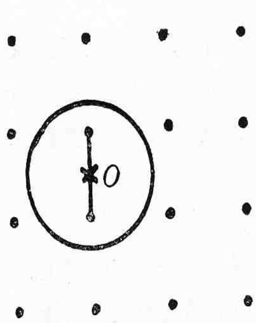

圖 7-1

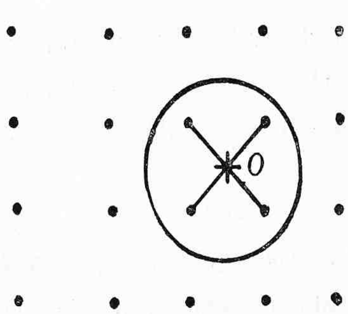

圖 7-2

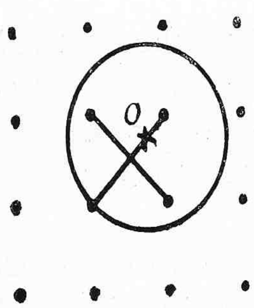

圖 7-3

現在回頭來證明 Steinhaus 所提出的問題。我們先在平面上取定座標系使得格子點對應於整數序對，所以格子點也可稱爲整數點。

引理: 任意兩相異格子點至 $P(\sqrt{2},1/3)$ 至點之距離必相異。

證明: 設兩相異格子點 P_1,P_2至P之距離相同，而 $(a,b),(c,d)$ 分別爲 P_1,P_2 之座標。則由畢氏定理

$$(a-\sqrt{2})^2+\left(6-\frac{1}{3}\right)^2=(c-\sqrt{2})^2+\left(d-\frac{1}{3}\right)^2$$

即

$$2(c-a)\sqrt{2}=c^2+d^2-a^2-b^2+\frac{2}{3}(b-d)$$

此式之右邊顯然爲一有理數，故左邊亦必爲一有理數，但這只有當 $c-a=0$ 時才可能；故 $c=a$ 代入原式得

$$d^2-b^2+\frac{2}{3}(b-d)=0$$

即

$$(d-b)\left(d+b-\frac{2}{3}\right)=0$$

但 $d+b-2/3\neq 0$ ($\because d,b$ 爲整數) 故必 $d-b=0$ 這就導出 $a=c$，$b=d$ 即 $P_1=P_2$ 與假設矛盾，而引理得證。

今令 n 爲任意給定之自然數，則以 p 點爲圓心，足夠大的數爲半徑畫圓時，此圓內部包含多於 n 個格子點，令 k 表此圓。圓 k 內之格子點總數爲有限多，由於每個格子點至 p 點之距離爲相異，我們可按照它們至 p 點之距離大小排成一序列。令 $p_1,p_2,\cdots\cdots,p_n$，$p_{n+1},\cdots\cdots$，表此序列。其中 p_1 離 p 最近，p_2 較遠，p_3 更遠，以此類推。現在如果取 p 爲圓心，p 點至 p_{n+1} 點之距離爲半徑畫圓，則所得之圓內部恰含 $p_1,p_2,\cdots\cdots,p_n$ 計 n 個格子點，而 Steinhaus 問題也就肯定地解決了!

定理 (Steinhaus) 對每一個自然數 n，存在一圓以 p 爲圓心，其內部恰含 n 個格子點。

己、有人接着提出下面的問題:

「對每一個自然數 n，是否存在一個圓其圓周上恰含 n 個格子點? 」

A. Schinzel 證明了這個問題的答案是肯定的。他利用數論上的一些簡單定理，證明出當 n 爲奇數 $n=2k+1$ 時，以點 (1/3, 0) 爲圓心，$5^k/3$ 爲半徑之圓其圓周上恰含 n 個格子點，當 n 爲偶數 $n=2k$ 時，則所求之圓爲以點 (1/2, 0) 爲圓心，$\sqrt{5}^{(k-1)}/2$ 爲半徑者。

庚、再回到圓內格子點的問題。我們附帶說明一下，要給出一個公式，使得對每個自然數 n，我們可據之以計算正好包含 n 個格子點於其內部的圓之半徑是很困難的。然而，要給出此半徑之一近似值，而當 n 很大時其誤差相對地很小者却不難，下面卽爲一例。

爲此目的，設 r 爲所求半徑，而平面上以某點 Q 爲圓心以 r 爲半徑所畫之圓 k 其內部恰含 n 個格子點。現在在平面上每個格子點之四周，以格子點爲中心，單位長爲邊長，畫一正方形使四邊都平行於座標軸。由所有落在 k 內部之格子點所畫之正方形合起來覆蓋的部分以 S 表示。因爲圓 k 內有 n 個格子點所以 S 之面積爲 n。

以 Q 爲圓心，$r+1/\sqrt{2}$ 爲半徑畫同心圓 k_1，由於 $1/\sqrt{2}$ 是單位正方格中所有點至中心之最大距離，不難看出圓 k_1 之內部及其圓周覆蓋了 S (如圖 8)

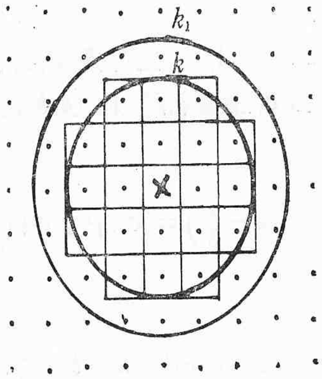

圖 8

由於 k_1 之面積爲 $\pi(r+1/\sqrt{2})^2$ 而之 S 面積爲 n，故有不等式

$$n \leq \pi(r+1/\sqrt{2})^2$$

同理，當 $r>1/\sqrt{2}$ 時，S 覆蓋了以 Q 爲圓心，$r-(1/\sqrt{2})$ 爲半徑之同心圓 k_2 之內部及其邊緣，所以也有不等式

$$\pi(r-(1/\sqrt{2}))^2 \leq n$$

兩式合起來

$$\sqrt{\frac{n}{\pi}}-\frac{1}{\sqrt{2}} \leq r \leq \sqrt{\frac{n}{\pi}}+\frac{1}{\sqrt{2}}$$

也就是說，r 之近似值爲 $\sqrt{n/\pi}$，而其誤差不超過 $1/\sqrt{2}$，當 n 很大時，$1/\sqrt{2}$ 與 $\sqrt{n/\pi}$ 之比值是很小的。

上面的不等式，換個角度來看，可以給我們一個計算圓周率 π 之近似值的方法，因爲當 $r>1/\sqrt{2}$ 時，

$$\frac{n}{(r+(1/\sqrt{2}))^2} \leq \pi \leq \frac{n}{(r-(1/\sqrt{2}))^2}$$

所以如果我們畫一個半徑足夠大的圓，並淸點其內部所含格子點之總數，兩數相除卽得 π 之一近似值，可以想像的是，半徑取得愈大，誤差愈小，讀者不妨自己畫畫看。（在圖 8 中，大圓 k_1 中含 37 個格子點，而其半徑爲 $2.5+1/\sqrt{2} \doteqdot 2.5+0.707=3.207$，所以 37 除以 $(3.207)^2$ 得 π 之一近似值 3.58. 與 $\pi \doteqdot 3.14$ 相比，其誤差約 14%，雖然所取半徑甚小，卽能有此不錯的估計值）

（本文取材自作者最近譯著整數論問題一書，並曾在今夏淸華大學暑期進修班試敎。）