漫談矩陣及其運算

薛昭雄

本文取材自作者所著管理數學一書。薛先生現爲國立政治大學應用數學系系主任。

(一)

在純粹數學及應用數學中，常常會談到數的陣列 (Rectangular Arrays of Numbers)。事實上，很多社會上的問題，尤其是商業上的，都可以用陣列來表示。我們且舉一個例子來開頭:

例: 某汽車製造商生產三種不同型式的汽車，姑且叫做「勝利型」,「豪華型」及「普通型」。若產商欲比較製造這三種不同型式汽車所用材料及勞力之異同，習慣上他就會列成下列一個表:

	勝利型	豪華型	普通型
材料單位	20	15	10
勞力單位	7	8	9

數學上爲了方便處理，就會把上表寫成陣列的型式:

$$\begin{array}{c c} & \overbrace{\hphantom{20\quad 15\quad 10}}^{3\text{行}} \\ 2\text{列}\left\{\right. & \begin{bmatrix} 20 & 15 & 10 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \end{array}$$

像這樣的陣列形式，我們就稱爲矩陣；又因爲它的橫向有 2 列數字，縱向有 3 行數字，所以亦簡稱爲二列三行的矩陣或簡稱爲 2×3 的矩陣。一般地說我們就可規定:

定義: 設 m, n 爲兩正整數，若將 $m\cdot n$ 個實數 $a_{ij}(i=1,2,\cdots\cdots,m;\ j=1,2,\cdots\cdots,n)$ 排成 m 列 n 行的矩形陣列 (Rectangular Array)，則稱此陣列爲一分佈於 R 上的 m 列 n 行矩陣 (m by n Matrix over R) 或簡稱 $m\times n$ 矩陣，而稱 a_{ij} 爲此矩陣之第 i 列第 j 行之元素。

通常以 $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots\cdots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{m1} & a_{m2}\cdots\cdots a_{mn} \end{bmatrix}$ 或 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots\cdots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{m1} & a_{m2}\cdots\cdots a_{mn} \end{pmatrix}$ 或 $\left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12}\cdots\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots\cdots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{m1} & a_{m2}\cdots\cdots a_{mn} \end{matrix} \right\|$

表示之，有時爲書寫方便起見，亦可簡寫爲 $[a_{ij}]_{m\times n}$ 或 $(a_{ij})_{m\times n}$ 或 $\|a_{ij}\|_{m\times n}$，爲求符號一致起見，以下將採用

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots\cdots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{m1} & a_{m2}\cdots\cdots a_{mn} \end{bmatrix} \text{ 或 } [a_{ij}]_{m\times n}$$

來表示矩陣。

注意：(1)若一m列n行矩陣之元素用 a_{ij} 表示時，則通常以 $A_{m\times n}$ 表此矩陣。必須注意到的是 a_{ij} 中之 i 表列數，j 表行數。譬如 a_{21} 就是第 2 列第 1 行之元素，a_{45} 就是第 4 列第 5 行之元素。

(2)當矩陣的列數與行數同爲n時，這種矩陣就叫做 n 階方陣 (Square Matrix)，如：

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\text{就是。}$$

(3)$a_{11}, a_{22}, \cdots\cdots, a_{nn}$ 稱爲矩陣的主對角線元素，若一矩陣的非主對角線元素均爲 0，則此矩陣稱爲主對角矩陣。譬如：

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\text{就是。}$$

(4)另一些特殊矩陣是上三角型矩陣及下三角型矩陣，前者爲在主對角線下面的元素均爲 0，而後者則爲主對角線上面的元素均爲 0。譬如：

$$B=\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}\text{及 } C=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}\text{就是。}$$

不管下三角型矩陣或上三角型矩陣，我們通稱爲三角型矩陣。

例 1:

$$A_{2\times 3}=\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -7 & 0.7 & 1 \end{bmatrix}$$

例 2: 鄒至莊先生於1960年曾經以車齡對汽車之零售價格做了統計，他所用的統計表如下：

年齡＼年份	1950	1951	1952
1	1881	2120	2445
2	1512	1676	1825
3	1261	1347	1484
4	1054	1144	1218

我們現在可用矩陣來簡化上表，即

$$\begin{pmatrix} 1881 & 2120 & 2445 \\ 1512 & 1676 & 1825 \\ 1261 & 1347 & 1484 \\ 1054 & 1144 & 1218 \end{pmatrix}$$

由上面矩陣可知：於 1952 年時 2 年舊車零售價格爲 1825 元，1952 年 3 年舊車零售價爲 1484 元。

例 3: 某建築商建有 3 種不同型式的房屋，其所用材料爲鋼鐵、木材……等。今此建築商做有一表如下（以噸計）

型式＼材料	鋼　鐵	木　材	玻　璃	油　漆	水　泥
甲　型	10	20	10	6	20
乙　型	8	16	12	8	20
丙　型	6	25	8	4	10

今我們可以簡化上表成爲下列矩陣型式:

$$\begin{bmatrix} 10 & 20 & 10 & 6 & 20 \\ 8 & 16 & 12 & 8 & 20 \\ 6 & 25 & 8 & 4 & 10 \end{bmatrix}$$

此爲 3×5 矩陣。

有一種特殊的矩陣值得提出來， 那就是只有一列或一行的矩陣。 只有一行的矩陣就特稱做*行向量* (Column Vector)，而只有一列的矩陣就特稱爲 *列向量* (Row Vector)，譬如:

$$x=\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

就是行向量，當然亦是 4×1 矩陣。像 $y=[0,1,2,3]$ 就是列向量，當然亦是 1×4 矩陣。

(二) 矩陣運算

上面我們已對矩陣作了一些介紹，對於他們的運算如加法、減法、乘法，我們將一一討論。談加法之前，我們先看下面一個例子。

例 1: 一製造廠商於最近二年對產品及銷售地區，作了下面一個統計，如下兩表所列:

產品＼銷售地區	1	2	3
Ⅰ	98	24	42
Ⅱ	39	15	22
Ⅲ	22	15	17

產品＼銷售地區	1	2	3
Ⅰ	55	19	44
Ⅱ	43	53	38
Ⅲ	11	40	20

如第一節，我們可把上表簡化爲下列二個矩陣:

$$A=\begin{bmatrix} 98 & 24 & 42 \\ 39 & 15 & 22 \\ 22 & 15 & 17 \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} 55 & 19 & 44 \\ 43 & 53 & 38 \\ 11 & 40 & 20 \end{bmatrix}$$

因此對於這兩年，產品Ⅰ銷售於地區 1 的總數卽是這二個矩陣的第一列第一行之元素互加，卽 $98+55=153$。同理，產品Ⅲ銷售於地區2的總數卽是這二個矩陣的第三列第二行之元素互加，卽 $15+40=55$。由此得這二年來，此廠商產品銷售於各地區的狀況，可用下列矩陣表出:

$$\begin{bmatrix} 98+55 & 24+19 & 42+44 \\ 39+43 & 15+53 & 22+38 \\ 22+11 & 15+40 & 17+20 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 153 & 43 & 86 \\ 82 & 68 & 60 \\ 33 & 55 & 37 \end{bmatrix}$$

像上面的矩陣，卽是A與B的和。由此我們得一嚴格的定義:

定義: 若 $A_{m\times n}=[a_{ij}]_{m\times n}, B_{m\times n}=[b_{ij}]_{m\times n}$ 爲兩個 m 列 n 行的矩陣，則規定此兩矩陣之和爲 $[a_{ij}+b_{ij}]_{m\times n}$，通常以 $A_{m\times n}+B_{m\times n}$ 表示之。

當兩矩陣之階相等時（即列數與行數都分別相等時），吾人才定義其和。

例 2:

若 $A=\begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$,

則 $$A+B=\begin{bmatrix} 5 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 5 & 5 & 4 \\ 8 & 5 & 7 & 4 \end{bmatrix}.$$

讀者必須注意像下列二個矩陣並不能定義其和。

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 0 & -1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}.$$

今考慮 $A=[a_{ij}]$，則由加法定義得

$$A+A=[a_{ij}]+[a_{ij}]=[2a_{ij}]=2A.$$

同理

$$A+A+A=3A$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\underbrace{A+A+\cdots\cdots+A}_{\lambda\text{個}}=\lambda A$$

上述之 λ 爲正整數，若 λ 不爲正整數時，如何求 λA 呢？我們可如下定義:

定義: 若 $\gamma\in R$ 且 $A_{m\times n}=[a_{ij}]_{m\times n}$，則規定 $\gamma A_{m\times n}==[\gamma a_{ij}]_{m\times n}$.

例 3:

若 $A=\begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$，則 $3A=\begin{bmatrix} 12 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 12 & 9 & 3 \\ 15 & 12 & 9 & 6 \end{bmatrix}$.

例 4: 設某一公司今年 1 月 1 日至 3 月31日有關其產品及銷售地區的銷售量的統計如下表:

銷售地區 / 產品	1	2	3	4
I	910	1275	1210	1304
II	860	967	667	1048

我們將上表簡化爲下列矩陣:

$$A=\begin{bmatrix} 910 & 1275 & 1210 & 1304 \\ 860 & 967 & 667 & 1048 \end{bmatrix}$$

今假設此公司由今年 1 月 1 日至 6 月30日其產品及銷售地區的銷售量所作成之矩陣爲

$$B=\begin{bmatrix} 2050 & 1340 & 1344 & 1384 \\ 1380 & 1058 & 1011 & 1189 \end{bmatrix}$$

若欲求 4 月 1 日至 6 月30日之有關產品銷售地區之銷售量，我們必須對每一產品，每一地區分別來求。如產品 I 在銷售地區 1 的銷售量必須爲 $2050-910=1140$，同理產品 II 在銷售地區 4 的銷售量必須爲 $1189-1048=141$，由此得下列矩陣

$$\begin{bmatrix} 2050-910 & 1340-1275 & 1344-1210 & 1384-1304 \\ 1380-860 & 1058-967 & 1011-667 & 1189-1048 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1140 & 65 & 134 & 80 \\ 520 & 91 & 344 & 141 \end{bmatrix}$$

由此，我們得二矩陣之差之定義:

定義: 若$A=[a_{ij}]_{m\times n}$, $B=[b_{ij}]_{m\times n}$，則對二矩陣之差$A-B$，規定爲

$$A-B=[a_{ij}-b_{ij}]_{m\times n}$$

例 5:
$$\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 8 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 8 & 5 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}.$$

在二矩陣之差中，有一種特殊情況值得注意:

若 $A=[a_{ij}]$，則 $A-A=[a_{ij}-a_{ij}]=[0]$

像上式右端這樣的矩陣（元素均爲0）就稱爲零矩陣 (Null Matrix)，以後就用0來代表它。更廣泛地說，我們先定義二矩陣相等如下:

設 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$, $B=[b_{ij}]_{m\times n}$，若 $a_{ij}=b_{ij}$, $\forall i=1,\cdots,m$; $j=1,\cdots\cdots,n$，則我們稱$A=B$

由 $A=B$，可一樣得$A-B=[0]$.

以上已介紹了加法與減法，接著的問題是如何做乘法呢？我們先看一個例子:

(a) 向量與向量的乘積

例 6: 某一電子公司庫存 14 吋、17 吋、及 20 吋的黑白電視機各有 1 仟、2 仟、3 仟臺，每臺市價分別爲 3 仟、4 仟、5 仟元。顯然地，若產商把存庫的電視機全部售出，則其總收入爲

$1000\times3000+2000\times4000+3000\times5000=3\times10^6+8\times10^6+15\times10^6=26\times10^6$（元）

以上的算法是普通的乘法；今若以向量來處理，則我們用列向量 $Q=[1000, 2000, 3000]$ 表存量向量，用行向量

$$P=\begin{bmatrix} 3000 \\ 4000 \\ 5000 \end{bmatrix}$$ 表價格向量。

若把普通乘法之步驟寫成

$$Q\cdot P=[1000, 2000, 3000]\begin{bmatrix} 3000 \\ 4000 \\ 5000 \end{bmatrix}$$

$$=1000\times3000+2000\times4000+3000\times5000=3\times10^6+8\times10^6+15\times10^6=26\times10^6 \text{（元）}$$

要注意到的是上式計算從第二步以後就與普通乘法完全一樣。由此例子我們可以說明列向量與行向量的乘法如下:

定義: 設 $U=[u_1, u_2, \cdots\cdots, u_n]$, $V=\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$

則此二向量的乘積 $U\cdot V$規定爲 $U\cdot V=u_1v_1+u_2v_2+\cdots\cdots+u_nv_n=\sum_{i=1}^n u_iv_i$.

讀者必須注意列向量與行向量須含有相同數目的分量，否則就不能相乘。且列向量需在行向量的左邊。

(b) 矩陣與向量的乘法

例 7: 設某公司有三種產品分別經由三個部門去推銷，對其銷售量及單價，該公司做了以下一個表:

(1)

部門 \ 產品單價	Ⅰ($1)	Ⅱ($2)	Ⅲ($3)
Ⅰ	58	26	8
Ⅱ	52	58	12
Ⅲ	1	3	9

由此表，我們可計算出第Ⅰ部門銷售總值爲

$$58\cdot(1)+26\cdot(2)+8\cdot(3)=134 \text{ 元。}$$

同理，第Ⅱ部門，第Ⅲ部門銷售總值亦可仿此計算。我們按此得一表如下:

(2)

部　門	總　銷　售　值
Ⅰ	$58\cdot(1)+26\cdot(2)+8\cdot(3)=134$
Ⅱ	$52\cdot(1)+58\cdot(2)+12\cdot(3)=204$
Ⅲ	$1\cdot(1)+3\cdot(2)+9\cdot(3)=34$

今我們考慮用矩陣來處理，首先把上表寫成

$$A=\begin{bmatrix} 58 & 26 & 8 \\ 52 & 58 & 12 \\ 1 & 3 & 9 \end{bmatrix} \text{ 與 } \begin{bmatrix} 134 \\ 204 \\ 34 \end{bmatrix}$$

由表(2)我們可看出他的結果來自矩陣之各列與價格行向量 $x=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ 之乘積，卽

$$A\cdot x=\begin{bmatrix} 58 & 26 & 8 \\ 52 & 58 & 12 \\ 1 & 3 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 58\cdot(1)+26\cdot(2)+\ 8\cdot(3) \\ 52\cdot(1)+58\cdot(2)+12\cdot(3) \\ 1\cdot(1)+\ 3\cdot(2)+\ 9\cdot(3) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 134 \\ 204 \\ 34 \end{bmatrix}$$

一般地寫法卽是

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},\quad x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$A\cdot x=\begin{bmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3 \end{bmatrix}.$$

(c) 二矩陣的乘積

二矩陣的乘積可以用矩陣與向量相乘的方法來處理，其方法如下:

$$\text{設}\quad A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

則我們可把 B 看成以下二行向量 x 與 w 之組成，

$$x=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\quad w=\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

因而

$$A\cdot x=\begin{pmatrix}1\cdot(1)+0\cdot(0)+2\cdot(0)\\3\cdot(1)+1\cdot(0)+1\cdot(0)\\1\cdot(1)+2\cdot(0)+1\cdot(0)\\-1\cdot(1)+3\cdot(0)+2\cdot(0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\\1\\-1\end{pmatrix},$$

$$A\cdot w=\begin{pmatrix}1\cdot(2)+0\cdot(1)+2\cdot(-1)\\3\cdot(2)+1\cdot(1)+1\cdot(-1)\\1\cdot(2)+2\cdot(1)+1\cdot(-1)\\-1\cdot(2)+3\cdot(1)+2\cdot(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\6\\3\\-1\end{pmatrix},$$

故

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1&0\\3&6\\1&3\\-1&-1\end{pmatrix}$$

一般地定義卽爲

定義: 若$A_{m\times n}=[a_{ij}]_{m\times n}$, $B_{n\times r}=[b_{ij}]_{n\times r}$，則規定此兩矩陣之積爲 $[\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}]_{m\times r}$，通常以 $A_{m\times n}B_{n\times r}$ 表示之。

例 6:

若 $A=\begin{bmatrix}4&0&1&3\\0&4&3&1\\5&4&3&2\end{bmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&0\\0&3\\2&0\\0&2\end{pmatrix}$, 則 $AB=\begin{bmatrix}14&6\\6&14\\21&16\end{bmatrix}$.

注意：(1)關於兩矩陣之積，祇有當左乘者 $A_{m\times n}$ 之行數等於右乘者之列數時才有意義。

(2)讀者可參考下圖，以便了解兩矩陣之積的規則

$$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\cdots\cdots a_{1n}\\\vdots&\\\boxed{a_{i1}\ \ a_{i2}\cdots\cdots a_{in}}\\\vdots&\\a_{m1}&a_{m2}\cdots\cdots a_{mn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_{11}\cdots&b_{1j}&\cdots b_{1r}\\b_{21}&b_{2j}&b_{2r}\\\vdots&\vdots&\vdots\\b_{n1}\cdots&b_{nj}&\cdots b_{nr}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_{11}&\cdots\cdots&c_{ir}\\\vdots&&\vdots\\c_{i1}\cdots&\boxed{c_{ij}}&\cdots c_{m1}\\\vdots&&\vdots\\c_{m1}&\cdots\cdots&c_{mr}\end{pmatrix}$$

此處 $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots\cdots+a_{in}b_{nj},\ \forall i=1,\cdots\cdots,m;\ j=1,\cdots\cdots,r.$

(3)若 $A=[a_1,\cdots\cdots,a_n]$, $B=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{bmatrix}$

則 $A\cdot B=a_1b_1+a_2b_2+\cdots\cdots+a_nb_n$.

因此矩陣的乘法亦可以用來定義向量乘法。

(4)若 $A=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{bmatrix}$, $B=[b_1,b_2,\cdots\cdots,b_n]$，亦仿(3)定義。

(5)若 A,B 爲兩矩陣且 AB,BA 均有意義時，AB 亦不一定等於 BA。

例如:

令 $A=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$,

則 $AB=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}$,

$BA=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\1&1\end{bmatrix}$.

例 7: 若某一零售商一年內售出商品Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ分別爲 58,26,8 單位，又已知其售價分別爲 1 元，2 元及 3 元，普通常識告訴我們，此商店之總收入爲 $58\cdot1+26\cdot2+8\cdot3=134$ 元。今我們可用矩陣（向量）乘法之概念來處理這個問題，我們可將售出商品Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ之量寫爲列向量 $a'=[58,26,8]$，把各商品之售價寫爲行向量

$$x=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}.$$

根據注意 3 卽得

$$a'\cdot x=[58,26,8]\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}=58\cdot1+26\cdot2+8\cdot3=134\ (\text{元})。$$

因此，由例 7 卽知矩陣（向量）之乘法係把普通算術加以推廣較數學化而已。

例 8：假設某一公司分有二大部門：國內部，國外部。又已知二部門之總銷售量如下表：

部門 \ 產品與售價	Ⅰ($1)	Ⅱ($2)	Ⅲ($3)
國內部	58	26	8
國外部	52	58	12

若我們欲分別求國內部與國外部之總售價時，普通常識先告訴我們：

國內部之總售價$=58\cdot1+26\cdot2+8\cdot3=134$ 元

國外部之總售價$=52\cdot1+58\cdot2+12\cdot3=204$ 元

同樣地，我們可用矩陣乘法來處理，我們可把上表寫成下列矩陣

$$\begin{bmatrix}58 & 26 & 8\\52 & 58 & 12\end{bmatrix}$$

把單價寫成

$$\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$$

因此

$$\begin{bmatrix}58 & 26 & 8\\52 & 58 & 12\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}134\\204\end{bmatrix}$$

我們得到最後一個答案 $\begin{bmatrix}134\\204\end{bmatrix}$，134 卽是國內部的總售價，而 204 亦卽是國外部的總售價。

（三）後　記

這是一篇對某一教材單元嘗試的另一種寫法，儘量希望不用傳統定義，定理，例子的三段寫法。我們希望先以實例來引起必須規定的動機，亦卽先有了「來龍」，再談「去脈」。當然這個工作不見得在本文中表現得很好，尚請大家指教。