

## 數學的理論與實用

黃武雄

近幾年來，「數學走向實用」的呼聲此起彼落，處處可聞。這股潮流是可喜的，且正激烈在沖擊有關數學圈的每一個角落；從國科會到研究室，從研究室到課堂，從課堂到考場，甚至於在餐廳冷飲的閒聊場所，我們看到，每年數學研究費的申請都積極在鼓勵與經建配合的研究方向，每學期數學系學生的選課單都一窩蜂填滿形形色色應用數學的課程，每次數學教學課程大綱在會議桌上一被提了出來，必然要再三強調數學教材內容的實用性。這一股潮流的影響，當然也擴及大學聯招學生志願單的選擇。「數學實用化」浩蕩聲勢，正以排山倒海而來，任何個人都無法抗拒。無疑，許多抱怨自憐，竊竊私語，轉眼將被淹沒，不留一點痕跡，不剩一絲聲息。

數學圈閉門造車「為數學而數學」的時代要終結了。在實用化的呼聲中，很多工學院、農學院的工作朋友們也不時來抓抓癢，拍拍肩膀，湊過來兩句話：「你們學數學的老早就該走了出來！」

數學是該走了出來，但屋外烈日當空，掉入一大夥熱昏了頭的人潮之中，數學離根離枝要走到那裏？輕描淡寫，就一句「走向實用」果真解決了它的「回歸」問題嗎？

我們不禁會想：數學發展有這麼久時日了，「走向實用」是今天才有的主意？究竟是幾千年來大家都視而不見，一直喊不出這番口號？抑或廿世紀的七十年代有着什麼特殊的背景，使我們覺醒，開始認清如此一個簡單易明的事理：「數學要實用」？

### 一、這些沒有一樣是新的

每一個了解數學史的人都不會否認，從來數學的發展一直都緊密附隨於社會發展的需求與條件。每一個時代，都有一些健全的數學家十分明白數學的社會功用。在數學史上，若說有那個時代特殊，它不是因數學的實用意義受到肯定而成為特殊，相反地，它所以成為特殊是因為數學實用暫時蒙塵。

希臘雅典文化與美國戰後暴發戶的文明，是這類特殊時代的兩個典型。這兩段時期，前後相隔兩千多年而互別苗頭，兩段時期同樣都有過份富裕的物質環境，以供知識分子崇尚極端的個人自由，而致玩物喪志。雅典時期的競智數學，不曾刺激數學主流的發展，三等分角懸決千年的緣故，是因為它不重要，因為它只是有閒階級的主觀產物，因為它是出於柏拉圖學派作繭自縛，硬要限制尺規作圖的競智心理（柏拉圖卻美其名為「上帝作圖法」）。三等分角自提出到解決，間隔兩千多年。直到十九世紀解方程式的主流問題，促成葛羅瓦理論的設立，三等分角的問題才在葛羅瓦理論的庇蔭下，終止了它扮演兩千多年遊戲人間的無聊角色。

美國戰後文物鼎盛，個人研究蔚為風氣，也步上形式主義避重就輕的道路。正當多少人耽迷於數學文字遊戲的時候，始終仍有一些明智之士不斷在喚醒數學理論取諸自然還諸自然的正確流程。一九六五年以後，投入越戰的巨大消耗結束美國戰後的黃金文明，「為數學而數學」的風尚為情勢所迫，才逐漸沒落。

雖然數學史上，偶因特殊的物質條件，出現過一些特殊時期的偏差，使數學家惑於數學本身的結構，而墜入數學競智或其文字遊戲的迷宮。但這些終究是短暫的，是浮面的。在這些偶發時

期的表層底下，數學的主流始終依循社會的需求與條件，繼續它穩定的流向。我們的先哲沒曾盲目，沒曾視而不見，他們一直在社會發展的需求之中，清楚而堅定的工作。

對於數學應該實用這回事情，廿世紀七十年代的人也沒有特別聰明或特別警覺。數學實用化的主張，只因戰後形式主義的偏差而一時蒙塵。一九六二年有一篇轟動一時的退休講演，題為「偏窄的數學家」，在糾正當時數學教育偏狹的流弊，文末並且指出「我們鼓勵直觀，將教材重新組成易於理解的數學構造，並從事於數學應用的現代化，已獲得相當程度的成果，但這些沒有一樣是新的，每一個時代，好的教師都反覆強調過這點。」

既然「數學實用化」的概念不是廿世紀七十年代的人才有的新主意，且我們的先哲素來都十分清楚數學的社會意義，為何「數學走向實用」遲遲不能兌現？每一個時代，好的數學家，好的數學教師一定都會為它苦思竭慮，絞盡心汁，他們一定都遭遇過某些排不開的困難。固然這些困難一部分屬於「人為」，是緣自長年以來，學術壟斷的積弊，但其主要困難原屬於數學特有本質的問題。

## 二、理論就是不實際？

數學主流的理論，沒有一樣是空穴來風，沒有一樣是一批偏窄數學家們閉門造車的產物。每一支每一節都起源於一些問題，一些取諸自然引自社會的活生生的問題。當一堆同一類型的問題接二連三反覆出現，數學就逐漸建立一套足以處理這一類問題的普通方法。為要保證普通方法的有效與正確，常需輔以適當的論據，這種有了可靠論據的數學方法，便構成數學理論。

由於它所要處理的對象，不祇是某一特殊的實際問題，它的表達便須具有相當範圍的普遍性。也就是說，它的理論看起來便要形「抽象」。然後社會在進步，亟待解決的實際問題日益增多，根據各種問題的類型所製作的各套方法，名目漸繁。於是又須整理出來更普遍的方法用以概括原來的各套方法，這樣疊次築積，築積愈久，數學的理論便愈形抽象，其面目也愈形可憎。

假設數學理論取諸實際還諸實際的過程，每幾年就能完成一個循環，那麼人人都可以明白數學家在做些什麼，而每一位數學家，包括那些書呆子，也都可以明白自己在做些什麼。這時自然不會產生理論與實用之爭。「數學實用化」也就早被兌現。

但事實並不是這樣，幾次數學家要整理出一套安全有用的普通方法，都費時幾十年甚或幾個世紀。並滙集很多數學家的心力，經一點一滴累積下來，才跨出一個腳步。就是這段累積心力的過程中，很多人看不到前面實際問題的起源，也看不到後邊還給自然的反饋。以為所做的工作只為數學而數學。就因這樣，理論數學才有「純粹數學」之譏，而恃以對「實用數學」分庭抗禮。

事實上，理論數學的發展是為應用，只是它的應用是「長遠應用」，而一般的實用數學則為「立即應用」。「理論」與「應用」像左右兩腳交替踩着走路。今天的應用以昨天的理論為基礎。明天又有了理論來澄釋今天的應用，又推廣了今天的應用。

牛頓為了在力學上的應用，取了函數的微分，當時的數學理論無法支持他取牛頓商的極限作為速度。這個力學上的實際問題刺激了數學局部化理論體系的發展，許多人不能了解這事，卻因此譏嘲數學理論不管用，總遲遲來在物理應用之後，沒想到就是有二項展開與解析幾何成熟的理論數學在撐腰，牛頓才能從刻卜勒觀察計算出萬有引力定律，才能做出微積分！

同樣，廿世紀初狄拉克 (Dirac)，將 $\delta$ 函數應用之初，數學的超函數論還沒有影子。 $\delta$ 函數本身都不是正規數學所容忍的函數，理論數學在這階段又備受控告。固然超函數論因 $\delta$ 函數而發展，但 $\delta$ 函數的發展卻建立於當時已經建全了的積分理論！

再以具體的例子來說明數學「理論」與「應用」的關係。一個學工程或經濟的人，面對一道他的專業所關心的微分方程式，他只須用盡一切辦法甚或不計代價（例如餵到電算機中，吃掉很多錢），去猜或去找出這道方程式的解，他要的是「立時應用」。但在一個數學家的立場，當實際

#### 4 數學傳播〔論述類〕

問題出現過幾次類似的微分方程式之後，他便有義務將這些微分方程加以普遍化，尋求簡潔而共通的方法。經這樣整理得到的理論，為的是長遠打算。以後誰在實際問題中碰到與這樣類似的微分方程，便可從數學家整理出來的理論「內容」中，拿出來套用。縱若條件不盡適合，不能直接套用，其原有理論中所提供的「方法」，也可作為借鏡，拿來尋求解決新問題的方法與答案。所以說：「理論數學」是長遠應用，又說「理論」是「應用」的基礎。看不到這些事實才會冒然妄定「理論」就是「不實際」。

當一個健全的數學家致力於抽取同類問題的特徵，將各套方法普遍化之時，一般人很容易以為他的工作與實際脫節。要他的方法普遍有效，又要他工作的每一點滴都生動而實用，這是歷來數學家排不開的困窘。不是他在抗拒實用，是他有着本質上的困難。

我們不能否認在數學實用的方向上，某些特殊時代曾出現過偏差，某些數學家個人曾認識不清而在「為數學而數學」的象牙塔裏迷失。我們不能贊同某些數學家為要持續自己的迷失，所叫出的托詞：「今天這些數學理論，誰能擔保那天不會變成有用？」

但當我們努力在提倡數學實用化的時候，要十分明白數學特有的本質，明白理論數學所具長遠應用的深意。若是只因理論數學不作立即應用，便貶低理論數學的地位，我們將離根離枝，像四處飄盪的葉子，失去營養，而靜待死亡。

### 三、教育線上

在數學教育線上，「教材實用化」的要求走了進來，乍聽之下，每一個人都要依它，都要雙手贊成。

但「教材實用化」能做到什麼樣的程度？數學課程中的題材主要是方法論，是人類經過幾千年累積下來的經驗精髓，這些方法最是普遍而簡潔。事實上，今天的實用數學並沒有從這些流傳下來的方法跨出太大的距離。

這些方法還是教材的基本內容。當然，教材與教法在表達上應該改進，應該儘量以實際問題作為例子，闡明這些方法的用處。數學方法是源自自然或人文的實際需求，但是要它還諸實際，從來便是數學教學中最難的課題。舉一些實際問題作為例子來說明教材內容的方法，確可以縮短課程與實際間的差距，但無法取代深入教導這些方法本身的用意。數學方法累積越久，其實用範圍越廣，表現出來的形式卻越抽象，越難讓學生親近，這是數學教學本質的困難。主張數學實用化，便要拋棄普遍方法的內涵，會嚴重傷害數學教育的根本。

曾有一位塑膠製品的廠商來找過我，提起他要外銷塑膠花球的事。他的花球是由二十面的圓形塑膠片摺疊而成。摺疊的辦法是將各圓片看成餛飩皮，畫出各圓片的內接正三角形，以該三角形各邊為摺痕，將三角形外邊殘餘的三個弓形向上摺起一個固定角度。然後以這些弓形作為兩兩片餛飩皮相互黏和的地方，將這二十片摺過的餛飩皮黏成一個端正的花球。

這位廠商的花球，事實上便是附有弓形飾邊的正二十面體。他要預知那些弓形所摺起的角度，好製作塑膠模型。

對他來說，這是一個實用問題，但問題的解決方法早在幾個世紀前就寫在一般理論數學的書上。換句話說，他所要的答案，今天已寫在高中數學的教科書上。他大學畢業。

當然，教科書上不會那般巧合也記載他所要的答案，但僅僅教科書上看來不實用的一些淺陋方法，若經活用，便足以解決他的問題。

在大學教書，我接觸很多各系的學生，也常發覺一些讀過很多高深應用數學課程的學生甚或研究生，碰到一個實際的問題，束手無措。追究他的困難，竟然只因他對於早已學過的高中數學的方法，未窺其義。

當然，目前教材與教法不能詭過。它們未曾選擇一些適應現代需要的應用問題來說明數學理論的用意，使學生誤以為「理論」便是不實用。它們在推展理論時，又過份強調數學的形式，過份要求數學的嚴密，對於處理方法的分析過份草率。這些都促成學生對於理論數學抱持敬而遠之的態度。我們要改正的是這些教材教法的表達方式，不能藉口數學實用化，不加深思便要刪掉砍掉所有普遍方法與理論的章節。

數學教育的一個目的，是要學生將其所學的源自實際的數學方法還諸實際，靈活運用各種實際問題。但可以想見，我們「設計」再多的實際問題，寫在黑板，仍無法概括一個學生以後可能面臨的實際問題，除非我們深入地教導學生前人遺留下來的的基本方法。

孫悟空變化萬千，但逃不出如來佛掌。我們要教給學生的是這個如來佛掌，不是孫悟空捉摸不定的種種化身。

#### 四、新顧客的訂單

儘管「數學實用化」的呼聲遍野，由於缺欠長期計劃，目前的做法大體是被動的。

各校數學系在實用趨勢下增開許多應用課程，學生之中一些真為學以致用，一些則只為了要逃避枯燥的理論數學，便盡量選修應用數學的課程。但數學系本身仍沿依傳統，規定理論數學的必修學分要達一定標準，於是出現了一種現象，學生選課雜而不精。事實上今天數學要走向實用的問題，已經超乎一些紙上談兵的應用數學課程所能提供或推動的，學生競相選修這類應用數學的課，並沾不到今天數學實用的邊。

今天數學實用的路上出現一樣特殊的需求：從前最需要數學的是自然科學，現在來了新顧客。新顧客的胃口很大，開出來的訂單大大超過已有數學理論的能力。

為了要在質與量兩方面，供應新顧客的要求，數學在近幾十年內可望會有再一次突破性的發展，就像十七世紀在來自力學的要求下產生微積分一樣。

這些新顧客是以社會科學為主的各門學科，如經濟管理交通心理到生物醫藥。但是目前這場交易還很曖昧，就連訂單上的各項記載也都語焉不詳。我們急切須要培養大批優秀的人力來澄清訂單上的內容，並發展相應的數學方法。

可是現階段的師資都有隔行如隔山的弊病，懂社會科學的罕懂深入的數學，懂數學的又不了解社會科學的需要。要填補這條鴻溝，從年輕的一代着手比要求師資容易而可行。各大學數學系大概是第一步培養這批生力軍的最佳場所。

各大學數學系應該及早放棄要將數學系學生訓練成數學專業者的念頭。數學系的學生若一直受到數學專業的要求，拖到大學畢業才要轉行，若非遇到特殊情況或有特殊決心，動作非常困難。

各數學系應該鼓勵並監督學生於大學期間內，在其他科系到處游擊選課，去了解各系的需要。同時檢討數學系的課程，挑出其中方法論意義最深的幾門基礎課程，列為必修數學科目，嚴格要求學生深入掌握其方法的用意用法。

廣收學生，只保留其中兩三成仍專攻理論數學。寄望其餘七八成來開拓並整理數學的新市場。

數學走向實用，是一個牽涉極深且廣的問題，不是浮泛討好的說辭所能涵蓋。在第一步跨出的同時，我們便要考慮數學發展的歷史背景，數學教育的基本內涵，並調查當前實用數學生存的特殊條件。

國內很多單位如港務、交通、電信、經濟各方面都不斷提出一些亟待解決的實際問題。當前已有的數學理論在這些問題面前都仍幼稚。我們相信這些現代化的實用問題，會再度刺激數學的發展，提升數學的理論，再一次印證數學理論與實用交替進步的緊密關係。

本文原載「新時代」雜誌六十五年五月刊