以複數爲座標的解析幾何淺論(V)

——第五章　拋物線——

許振榮、呂素齡

§5·1　拋物線之參數方程式

拋物線之標準方程式爲$Y^2=-4pX$。如果選此拋物線之焦點爲新原點，x軸不變，新y軸爲經過新原點與x軸垂直的直線，則在新座標系(x,y)上，上述拋物線可表成

(5.1) $y^2=4p(p-x)=-4px+4p^2$

之形狀。

設$p_0(x_0,y_0)$爲此拋物線上任一點，則在此點的拋物線的切線爲

(5.2) $y-y_0=-\dfrac{2p}{y_0}(x-x_0)$,

此因微分(5.1)可得$2yy'=-p$,

即　$y'=\dfrac{-2p}{y}$之故。

經過焦點$F(0,0)$與此切線垂直的直線之方程式爲

(5.3)　$y=\dfrac{y_0}{2p}x$

這二直線(5.2)和(5.3)之交點C之座標爲$\left(p,\dfrac{y_0}{2}\right)$。此因，代入(5.3)於(5.2)可得

$$\frac{y_0}{2p}x-y_0=-\frac{2p}{y_0}(x-x_0)$$

乘$2py_0$於兩邊，可得

$$y_0^2x-2py_0^2=-4p^2x+4p^2x_0$$

即　$(y_0^2+4p^2)x=2py_0^2+4p^2x_0$

因爲$y_0^2=-4px_0+4p^2$，代入此式於上式可得　$(8p^2-4px_0)x$

$$=8p^3-8p^2x_0+4p^2x_0$$

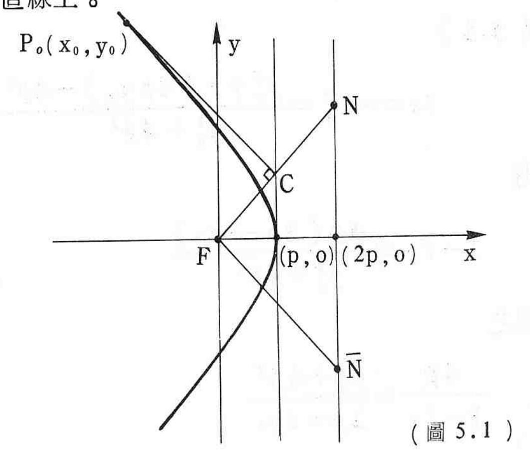
$$=8p^3-4p^2x_0=p(8p^2-4px_0)$$

故　$x=p$

因此，可得(代入於(5.3))

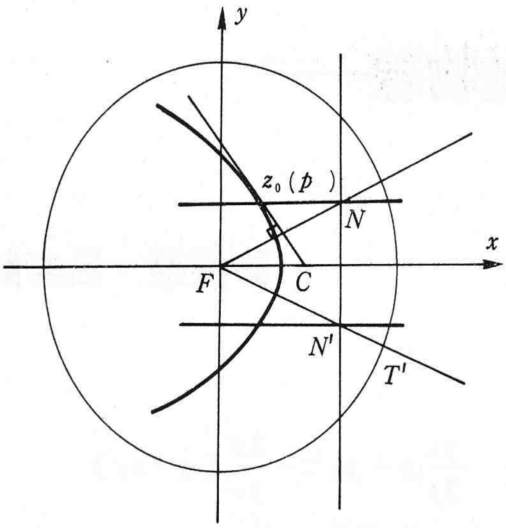
$$y=\frac{y_0}{2}$$

之故。此交點在經過拋物線頂點與x軸垂直之直線上。



(圖 5.1)

因爲此拋物線之準線爲 $x=2p$ 故直線 FC 與此準線之交點 N 之座標爲（ $2p$ ，y_0 ）



（圖 5.2 ）

設 N' 爲 N 關於 x 軸之對稱點，T' 爲 FN' 與單位圓之交點。

因爲 N 之複數座標爲 $z'_0=2p+iy_0$ ，N' 之座標爲 $\overline{z}'_0=2p-iy_0$ 而 T' 之座標爲

$$(5.4)\quad w_0=\frac{\overline{z}'_0}{|\overline{z}'_0|}$$

故

$$w_0^2=\frac{\overline{z}_0'^2}{|\overline{z}'_0|^2}=\frac{4p^2-4ipy_0-y_0^2}{4p^2+y_0^2}$$

$$=\frac{-\left[y_0^2+i(4py_0)-4p^2\right]}{4p^2+y_0^2}$$

今設

(5.5)

$$t_0=-w_0^2=\frac{y_0^2+i(4py_0)-4p^2}{y_0^2+4p^2}$$

則

$$1-t_0=\frac{4p(2p-iy_0)}{y_0^2+4p^2}$$

因之

$$\frac{4p}{1-t_0}=\frac{y_0^2+4p^2}{2p-iy_0}$$

$$=\frac{(y_0^2+4p^2)(2p+iy_0)}{4p^2+y_0^2}$$

$$=2p+iy_0=z'_0$$

即

$$(5.6)\quad z'_0=\frac{4p}{1-t_0}$$

此爲拋物線之準線之參數方程式（ t_0 爲參數）。

因爲切線 cp_0 爲線段 FN 之垂直平分線，切線 cp_0 之方程式爲

$$\frac{z}{\dfrac{4p}{1-t_0}}+\frac{\overline{z}}{\dfrac{4p}{1-\dfrac{1}{t_0}}}=1$$

即

$$(5.7)\quad t_0z-\overline{z}=\frac{4pt_0}{1-t_0}$$

此爲拋物線在 $z_0=x_0+iy_0$ 處的切線方程式。

現在來求原來的拋物線之參數方程式於下：

因爲

$$z'_0=2p+iy_0=\frac{4p}{1-t_0}$$

可得

(5.8)

$$iy_0=\frac{4p}{1-t_0}-2p=\frac{2p(1+t_0)}{1-t_0}$$

另一方面 $y_0^2=4p^2-4px_0$ ，

故 $4px_0=4p^2-y_0^2$ 。因此

$$(5.9)\quad x_0=p-\frac{y_0^2}{4p}=p+\frac{(iy_0)^2}{4p}$$

$$=p+\frac{4p^2(1+t_0)^2}{4p(1-t_0)^2}$$

$$=p\left[1+\frac{(1+t_0)^2}{(1-t_0)^2}\right]$$

$$=\frac{2p(1+t_0^2)}{(1-t_0)^2}$$

因此

$$z_0=x_0+iy_0=\frac{2p(1+t_0^2)}{(1-t_0)^2}+\frac{2p(1+t_0)}{1-t_0}$$

$$=\frac{4p}{(1-t_0)^2}$$

故拋物線之參數方程式爲

(5.10) $z=\dfrac{4p}{(1-t)^2}$ ， t ：參數

而切線之方程式爲

(5.11) $tz-\bar{z}=\dfrac{4pt}{1-t}$

其次來求切線之參數方程式。二切線：

$$t_1z-\bar{z}=\frac{4pt_1}{1-t_1},$$

$$t_2z-\bar{z}=\frac{4pt_2}{1-t_2}$$

之交點 z_{12} 滿足

$$(t_1-t_2)z_{12}=4p\left(\frac{t_1}{1-t_1}-\frac{t_2}{1-t_2}\right)$$

$$=\frac{4p(t_1-t_2)}{(1-t_1)(1-t_2)}$$

故

$$z_{12}=\frac{4p}{(1-t_1)(1-t_2)}\text{。}$$

故對應於 t_1 處的切線可由下列參數方程式表之

(5.12) $z=\dfrac{4p}{(1-t)(1-t_1)}$

現在如果置 $t'=-t$ ，則準線上的點可表成 $z=\dfrac{4p}{1+t'}$ ，拋物線在頂點的切線可表成 $z=\dfrac{2p}{1+t'}$。切線方程式 (5.11) 爲

$$(-t')z-\bar{z}=\frac{4p(-t')}{1-(-t')}$$

即

(5.13) $t'z+\bar{z}=\dfrac{4pt'}{1+t'}$

而拋物線之方程式 (5.10) 爲

$$z=\frac{4p}{[1-(-t')]^2}=\frac{4p}{(1+t')^2}$$

即

(5.14) $z=\dfrac{4p}{(1+t')^2}$

爲方便計，我們以後設 $4p=1$。如此假設不限制討論之範圍。

§5・2 例 題

例題從所給四直線中的三直線所成的三角形之九點圓之中心向第四直線作垂線。從四直線中選三直線的方法有四種，因此，可作如此的四垂線。這些四垂線爲共點。

證明：四直線切於一拋物線。不限制一般性，我們可假設此拋物線爲

(5.15) $z=\dfrac{1}{(1+t)^2}$

而所與的四直線可表成

(5.16)

$$zt_i+z=\frac{t_i}{1+t_2},\ i=1,2,3,4$$

依 § 3.4 之討論在 (5.16) 式中對應於 $i=1,2,3$ 之三直線所成的三角形之九點圓之中心座標爲

(5.17)

$$z=\frac{2+s_1}{2\pi_3}\ ,\ s_1=t_1+t_2+t_3\ ,$$

$$\pi_3=(1+t_1)(1+t_2)(1+t_3)$$

第四直線之方程式爲

$$zt_4+\bar{z}=\frac{t_4}{1+t_4}$$

從九點圖中心 (5.17) 向此直線所作的垂線之方程式爲

$$zt_4-\bar{z}=\frac{2+s_1}{2\pi_3}t_4-\frac{2+\bar{s}_1}{2\bar{\pi}_3}$$

$$=\frac{(2+s_1)t_4}{2\pi_3}-\frac{s_3(2+\frac{s_2}{s_3})}{2\pi_3}$$

即

(5.18)

$$zt_4-\bar{z}=\frac{(2+s_1)t_4-(2s_3+s_2)}{2\pi_4}$$

如上所述：如果 σ_1，σ_2，σ_3，σ_4 為 t_1，t_2，t_3，t_4 的初等對稱函數，又 $\pi_4=(1+t_1)(1+t_2)(1+t_3)(1+t_4)$，則有 $s_1=\sigma_1-t_4$，$s_2=\sigma_2-t_4\sigma_1+t_4^2$，$s_3=\frac{\sigma_4}{t_4}$，而 $\pi_3=\frac{\pi_4}{1+t_4}$，故代入這些式子於(5.18)中，可得

(5.19)

$$zt_4-\bar{z}=\frac{(1+t_4)t_4^2(2+\sigma_1-t_4)-(1+t_4)[2\sigma_4+t_4\sigma_2-t_4^2\sigma_1+t_4^3]}{2t_4\pi_4}$$

同理

(5.20)

$$zt_3-\bar{z}=\frac{(1+t_3)t_3^2(2+\sigma_1-t_3)-(1+t_3)[2\sigma_4+t_3\sigma_2-t_3^2\sigma_1+t_3^3]}{2t_3\pi_4}$$

把(5.19)，(5.20)直邊相減後以(t_4-t_3)除之，可得：

(5.21) $z=\dfrac{2+2\sigma_1+\sigma_2}{2\pi_4}$

此式關於 t_1，t_2，t_3，t_4 成對稱，故四垂線均經過此點。

§5・3 Hervey點

定理：從所與的四直線中選三直線之方法有四種。故可得四個三角形。對於各三角形從其九點圓之中心向其Euler線(即外心、垂心、九點圓中心所在的直線)作垂線。如此可得的四垂線爲共點。

此點稱爲所與的四直線的Herver點。

證明：如§5.2之例題，不妨假設所與四直線爲拋物線(5.15)之四切線(5.16)。其中對應於 $i=1$，2，3的三直線所成的三角形之外心、垂心及九點圓之中心，依§3.4的討論，分別爲

$$\frac{1}{\pi_3},\ \frac{1+s_1}{\pi_3},\ \frac{2+s_1}{2\pi_3}$$

故此三角形之Euler線之方程式爲

$$\begin{vmatrix} z & \bar{z} & 1 \\ \frac{1}{\pi_3} & \frac{1}{\bar{\pi}_3} & 1 \\ \frac{1+s_1}{\pi_3} & \frac{1+\bar{s}_1}{\bar{\pi}_3} & 1 \end{vmatrix}=0$$

即

(5.22) $s_2z-s_1\bar{z}=\dfrac{s_2-s_1s_3}{\pi_3}$

經過九點圓之中心與Euler線垂直的直線之方程式爲

(5.23) $s_2z+s_1\bar{z}=\dfrac{s_2+s_1s_2+s_1s_3}{\pi_3}$

設 s_i' 爲在 s_i 中把 t_3 以 t_4 代換而得者。此時，從(5.16)式中對應於 $i=1$，2，4的三直線所成的九點圓之中心，對此三角形的Euler線所引的垂線爲

(5.24)

$$s_2'z+s_1'\bar{z}=\frac{s_2'+s_1's_2'+s_1's_3'}{(1+t_1)(1+t_2)(1+t_4)}$$

二直線(5.23)及(5.24)之交點，可從(5.23)和(5.24)消去 $\bar{z}$ 得：

(5.25)

$$(s_1's_2-s_2's_1)z$$

$$=\frac{(1+t_4)s_1(s_2+s_1s_2+s_1s_3)}{(1+t_1)(1+t_2)(1+t_3)(1+t_4)}$$

$$-(1+t_3)s_1(s_2'+s_1's_2'+s_1's_3')$$

此式右邊之分子爲

$$\begin{aligned}\text{右邊分子}=\ & s_1'(s_2+s_1s_2+s_1s_3)\\ & -s_1(s_2'+s_1's_2'+s_1's_3')\\ & +t_4s_1'(s_2+s_1s_2+s_1s_3)\\ & -t_3s_1(s_2'+s_1's_2'+s_1's_3')\\ =\ & (s_1's_2-s_1s_2')+s_1s_1'(s_2-s_2')\\ & +s_1s_1'(s_3-s_3')+(t_4s_1's_2-\\ & t_3s_1s_2')+s_1s_1'(t_4s_2-t_3s_2')\\ & +s_1s_1'(t_4s_3-t_3s_3')\end{aligned}$$

經過簡單的計算，可得

$$s_1's_2-s_2's_1=(t_3-t_4)(t_1^2+t_1t_2+t_2^2),$$

$$\begin{aligned}& s_1s_1'(s_2-s_2')\\ & =(t_3-t_4)[(t_1+t_2)\sigma_1+t_3t_4](t_1+t_2),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}& s_1s_1'(s_3-s_3')\\ & =(t_3-t_4)[(t_1+t_2)\sigma_1+t_3t_4]t_1t_2,\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}& s_1'(s_2+s_1s_2+s_1s_3)-s_1(s_2'+s_1's_2'+s_1's_3')\\ & =(t_3-t_4)[(t_1+t_2)^2-t_1t_2+(t_1+t_2)^2\sigma_1\\ & \quad +t_3t_4(t_1+t_2)+(t_1+t_2)\sigma_1t_1t_2+\sigma_4]\\ & =(t_3-t_4)[(t_1+t_2)^2(1+\sigma_1)\\ & \quad +(t_1+t_2)(\sigma_1t_1t_2+t_3t_4)-t_1t_2+\sigma_4]\end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned}& t_4s_1's_2-t_3s_1s_2'\\ & =(t_4-t_3)[\sigma_1t_1t_2+(t_1+t_2)t_3t_4],\\ & s_1s_1'(t_4s_2-t_3s_2')\\ & =(t_4-t_3)[(t_1+t_2)\sigma_1+t_3t_4]t_1t_2\\ & s_1s_2'(t_4s_3-t_3s_3')=0\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}& t_4s_1'(s_2+s_1s_2+s_1s_3)-t_3s_1(s_2'+s_1's_2'\\ & \qquad\qquad +s_1's_3')\\ & =(t_4-t_3)[\sigma_1t_1t_2+(t_1+t_2)(\sigma_1t_1t_2\\ & \quad +t_3t_4)+\sigma_4]\end{aligned}$$

因此（5.25）式右邊之分子爲

$$\begin{aligned}\text{右邊分子}\\ =\ & (t_3-t_4)[(t_1+t_2)^2(1+\sigma_1)\\ & +(t_1+t_2)(\sigma_1t_1t_2+t_3t_4)-t_1t_2+\sigma_4\\ & -\sigma_1t_1t_2-(t_1+t_2)(\sigma_1t_1t_2+t_3t_4)-\sigma_4]\\ =\ & (t_3-t_4)[(t_1+t_2)^2(1+\sigma_1)-t_1t_2(1+\sigma_1)]\\ =\ & (t_3-t_4)(t_1^2+t_1t_2+t_2^2)(1+\sigma_1)\end{aligned}$$

代入此式和 $s_1's_2-s_2's_1$ 之表現式於（5.25）就得

（5.26）

$$z=\frac{1+\sigma_1}{(1+t_1)(1+t_2)(1+t_3)(1+t_4)}=\frac{1+\sigma_1}{\pi_4}$$

因爲此式關於 t_1，t_2，t_3，t_4 成對稱，其他從九點圓中心對Euler線所作的垂線亦經過此點，即這些四垂線爲共點。

§5·4 小林的一定理

定理（小林幹雄）：從所與四直線選三直線的方法有四種。對於各種選法可得一三角形。一共可得四個三角形。其中三個三角形之外心所成的三角形爲與第四個三角形相似。並且此二個相似的三角形之對應邊之交點爲共線。

證明：不妨假設所與的四直線之方程式爲（5.16）式，此時對應於 $i=1,2,4$ 的三直線所成的三角形之外心，對應於 $i=1,3,4$ 之三直線所成的三角形之外心，對應於 $i=2,3,4$ 之三直線所成的三角形之外心，次爲（§3.4）

$$\frac{1}{(1+t_1)(1+t_2)(1+t_4)},\ \frac{1}{(1+t_1)(1+t_3)(1+t_4)},\ \frac{1}{(1+t_2)(1+t_3)(1+t_4)}。$$

對應於 $i=1,2,3$ 之三直線所成之三角形之三頂點爲

$$z_{12}=\frac{1}{(1+t_1)(1+t_2)},$$

$$z_{13}=\frac{1}{(1+t_1)(1+t_3)},$$

$$z_{23}=\frac{1}{(1+t_2)(1+t_3)}。$$

現在

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{(1+t_1)(1+t_2)} & \frac{1}{(1+t_1)(1+t_2)(1+t_4)} & 1 \\ \frac{1}{(1+t_1)(1+t_3)} & \frac{1}{(1+t_1)(1+t_3)(1+t_4)} & 1 \\ \frac{1}{(1+t_2)(1+t_3)} & \frac{1}{(1+t_2)(1+t_3)(1+t_4)} & 1 \end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{(1+t_1)^2(1+t_2)^2(1+t_3)^2}$$

$$\cdot\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{1+t_4} & (1+t_1)(1+t_2) \\ 1 & \frac{1}{1+t_4} & (1+t_1)(1+t_3) \\ 1 & \frac{1}{1+t_4} & (1+t_2)(1+t_3) \end{vmatrix}=0$$

故依§1.2之討論這二個三角形（外心三角形和第四個三角形）爲相似。

這二個三角形之一對對應邊爲 z_{12} z_{13} 即

$$(5.27)\quad zt_1+\overline{z}=\frac{t_1}{1+t_1}\qquad(5.27)$$

與連接 $\frac{1}{(1+t_1)(1+t_2)(1+t_4)}$，$\frac{1}{(1+t_1)(1+t_3)(1+t_4)}$ 等二點之直線。其方程式爲

$$0=\begin{vmatrix} z & \overline{z} & 1 \\ \frac{1}{(1+t_1)(1+t_2)(1+t_4)} & \frac{t_1t_2t_4}{(1+t_1)(1+t_2)(1+t_4)} & 1 \\ \frac{1}{(1+t_1)(1+t_3)(1+t_4)} & \frac{t_1t_3t_4}{(1+t_1)(1+t_3)(1+t_4)} & 1 \end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{(1+t_1)^2(1+t_2)(1+t_3)(1+t_4)^2}$$

$$\cdot\begin{vmatrix} z & \overline{z} & 1 \\ 1 & t_1t_2t_4 & (1+t_1)(1+t_2)(1+t_4) \\ 1 & t_1t_3t_4 & (1+t_1)(1+t_3)(1+t_4) \end{vmatrix}$$

即

$$zt_1t_4(1+t_1)(1+t_4)\begin{vmatrix} t_2 & 1+t_2 \\ t_3 & 1+t_3 \end{vmatrix}$$

$$-\overline{z}(1+t_1)(1+t_4)[1+t_3-1-t_2]$$

$$+t_1t_4(t_3-t_2)=0$$

故得

$$(5.28)\quad z+\frac{1}{t_1t_4}\overline{z}=\frac{1}{(1+t_1)(1+t_4)}。$$

從（5.27），（5.28）消去之可得它們之交點之座標如下

$$t_1(t_4-1)z=\frac{t_1}{1+t_1}\left(\frac{t_4}{1+t_4}-1\right)$$

$$=\frac{-t_1}{(1+t_1)(1+t_4)}$$

故

$$(5.29)\quad z=\frac{1}{(1+t_1)(1-t_4^2)}$$

由（5.29）可得

$$(5.30)\quad \overline{z}=\frac{-t_1t_4^2}{(1+t_1)(1-t_4^2)}$$

從（5.29）和（5.30）可得

$$t_4^2z-\overline{z}=\frac{t_4^2}{(1+t_1)(1-t_4^2)}+\frac{t_1t_4^2}{(1+t_1)(1-t_4^2)}$$

$$=\frac{t_4^2(1+t_1)}{(1-t_4^2)(1+t_1)}=\frac{t_4^2}{(1-t_4^2)}$$

即

（5.31）

$$t_4^2z-\overline{z}=\frac{t_4^2}{1-t_4^2}\left(即-t_4z+\overline{z}=\frac{-t_4^2}{1-t_4^2}\right)$$

故對應邊之交點均在此直線上。

注意：因爲 $|-t_4^2|=1$。如此四直線與所與四直線所決定的拋物線相切。