項武義先生演講——

從勾股到格氏代數(中)

時間：77年6月22日　　**地點**：臺灣大學舊數館301室

第三節　定量幾何的基礎理論 (Foundation of quantitative geometry)

長度、角度、面積、體積等等都是常用的幾何量，在日常生活和實踐、實用中，單單定性地知道所涉及的幾何量之間等與不等是不足以解決問題的；我們還須要定量地把所涉及的幾何量之間的大小關係加以數量化（這也就是我們接着馬上要討論的度量（measurement））)，把幾何形體的內在結構的理解提升到有效能算的境界，例如三角形的面積公式，說明三角形的角邊之間的定量關係的正弦、餘弦定律等等。

幾何的定量研究，在我國古代和古希臘文明即已奠定好堅實的基礎，但是當年却眞是幾經轉折，歷盡艱辛，才獲得這樣的碩果的。本節將對於這一段峯廻路轉得來非易的進化歷程，擇其精要，詳加剖析。

(一)度量問題，可公度性和幾何基礎初論

一般來說，常見常用的量可以歸成兩類：如一群人，一群牛羊，一堆蛋等等，它們的共同特點是：都具有天然的個別單位，對於這種類型的量的處理方法是“計數”（count）其個數。我們可以把它們叫做個數型的量。另一類的量如長度、角度、面積、重量等等，它們都是可以無限細分的，所以當然不可能有天然的單元，處理這一類型的量的辦法，就是我們現在即要討論的度量（measurement）。直線段的長度乃是最簡單基本的幾何量，它的度量問題在整個定量幾何的研討中，是起始的基礎，下面就以直線段的長度爲範例，討論度量的本質，剖析其中所涉及的基本問題。

概括地來說，直線段的長度的度量，主要的就是下述兩個步驟：首先選定一個單位長，例如常用的尺、公尺（米，meter)、英尺、光秒、光年等等，都是約定公用的選定單位，其次是要去確定一個“待量的”直線段和那個選定的單位長之間，在長度上的比值（ratio）。從概念上來看，第一步只是一種任意選用，

所以是沒什麼問題的，但是第二步中所要求的“比值”，却是值得詳加推敲分析的一個概念，其實遠在紀元前五、四世紀，古希臘的幾何學家們早就注意到這個比值概念的基本重要性，而且發現其中大有文章！直至今日，再來回顧兩、三千年前希臘幾何學的這一段史話，依然是發人深思，耐人尋味的。話說當年，他們在分析長度的度量問題時，首先認識到的，就是下述可公度性（commensurability）這樣一個自然的概念。

定義：設有兩條直線段 a，b；若存在着另一直線段 c 使得 a，b 都恰好是 c 的整數倍，例如 $a = m \cdot c$，$b = n \cdot c$，則稱 c 爲 a，b 的一個公尺度；而 a，b 則是可公度的（commensurable）。另一種等價的提法是：若存在適當的正整數 m，n 使得 $n \cdot a$ 和 $m \cdot b$ 恰好等長，則稱 a，b 爲可公度的。

〔註：$n \cdot a$ 就是 n 段和 a 等長的直線段首尾相接而成的直線段的長度。〕

然後他們接着就提出下述關於長度度量的基本問題：是否任給兩條直線段都一定是可公度的呢？亦即可公度性是否普遍成立呢？

【分析】

(i)當 a，b 是可公度時，亦即存在整數 m、n 使得 $a = m \cdot c$，$b = n \cdot c$（或者是 $n \cdot a = m \cdot b$），則兩者在長度上的比值，$a : b$，當然就應該定義爲分數 $\frac{m}{n}$。由此可見，若可公度性是普遍成立的話，上面對於長度的比值的簡明定義，業已具有普遍性，而且這種比值總是一個分數。

(ii)反之，假若上述基本問題的答案是否定的話，亦即存在着彼此不可公度的一對直線段，則它們之間的比值就依然“有待定義”，而且這個比值也肯定不是一個分數！

(iii)不難看到，只有在絕對沒有誤差之下，才能談可不可公度問題。由此可見，上述度量問題乃是一個純理論性的問題；它的意義和重要性都在於幾何學的基礎理論，而它的是否普遍成立，也只能由純理論的研討去加以論證，是無法用實際的丈量來實驗求證的（因爲實際的丈量中，誤差是不可避免的！）

(iv)長度是一個極爲基本的幾何量，因此上述可公度性的是否普遍成立？乃是一個影響整個幾何學的基礎性問題，下面就以古希臘幾何學的發展史中，幾個關鍵性的轉折與突破來說明它在幾何基礎論上的重要性。

畢氏學派的幾何基礎初論

話說當年（約在紀元前六、五世紀），由畢氏（Pythagorus）所創立的畢氏學派主觀地主張可公度性是普遍成立的（當時把它列爲幾何公理（Axiom）之一），並且把它作爲他們的幾何基礎論的重要支柱，對於許多具有基本重要性的“幾何事實”給出了論證。例如下面所舉的就是兩個典型的例子。

【例 1】：**長方形的面積公式**：設長方形的長是 a，寬是 b，它們和選定的單位長 u 在長度上的比值分別是 $a : u$ 和 $b : u$。則它和以 u 爲邊長的正方形在面積上的比值等於 $(a : u) \cdot (b : u)$。

〔當年畢氏學派由可公度普遍成立這個主張出發，對於上述基本公式提出下述“證明”。〕

基於可公度性普遍成立這個主張，即有 c，c' 使得

$$a = m \cdot c,\ u = n \cdot c;$$
$$b = p \cdot c',\ u = q \cdot c'$$

亦即 $a : u = \frac{m}{n}$；$b : u = \frac{p}{q}$

不難看到，可以用平行線把邊長爲 a、b 的長方形分割成 $m \cdot p$ 個以 c、c' 爲邊長的小矩形；同樣地也可以把以 u 爲邊長的正方形分割爲

$n \cdot q$ 個以 c、c' 爲邊長的小矩形。由此可見，兩者在面積上，分別是以 c、c' 爲邊長的矩形的$m \cdot p$倍和$n \cdot q$倍；因此它們之間的比值就應該是 $\dfrac{m \cdot p}{n \cdot q} = \dfrac{m}{n} \cdot \dfrac{p}{q}$（$a : u$）·（$b : u$）。

【例2】：相似三角形定理：設有ΔABC和$\Delta A'B'C'$的三個內角對應相等，亦即$\angle A = \angle A'$，$\angle B = \angle B'$，$\angle C = \angle C'$，則它們的對應邊的邊長成比例，即

$$\overline{AB} : \overline{A'B'} = \overline{AC} : \overline{A'C'} = \overline{BC} : \overline{B'C'}$$

〔因爲他們認定任何兩個直線段總是可公度的，所以他們一開始就設$\overline{AB} : \overline{A'B'} = \dfrac{m}{n}$。然後再設法運用當時業已建立的全等形和平行的理論，來證明其他兩對對應邊的比值也等於$\dfrac{m}{n}$。下面所敍述的，大體上就是他們當年的證法。〕

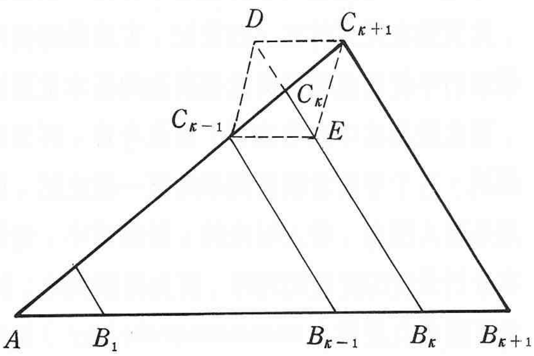
由$\overline{AB} : \overline{A'B'} = \dfrac{m}{n}$起始，我們可以用分點$\{ B_i ; 1 \le i \le m-1 \}$把$\overline{AB}$等分爲$m$段；用分點$\{ B'_j ; 1 \le j \le n-1 \}$把$\overline{A'B'}$等分爲$n$段，則有$\overline{AB_1} = \overline{A'B'_1}$。過$B_1$，$B'_1$點分別作$\overline{BC}$和$\overline{B'C'}$的平行線，分別交$\overline{AC}$和$\overline{A'C'}$於$C_1$，$C'_1$點。容易由假設看到$\Delta AB_1C_1 \cong \Delta A'B'_1C'_1$。由此可見，我們所要證明的也就是：

$$\begin{cases} \overline{AC} = m \cdot \overline{AC_1}, & \overline{A'C'} = n \cdot \overline{A'C'_1} \\ \overline{BC} = m \cdot \overline{B_1C_1}, & \overline{B'C'} = n \cdot \overline{B'_1C'_1} \end{cases}$$

下面就讓我對於m實行歸納論證：

當$m=1$時是顯然的，所以只要在$m \le k$皆成立的假設之下，去證明$m = k+1$也因而成立，如下圖所示，

$$\overline{AB_i} = i \cdot \overline{AB_1}, \quad \overline{B_iC_i} \,/\!/\, \overline{B_1C_1},$$
$$1 \le i \le k+1$$



如上圖所示，過C_{k-1}和C_{k+1}點分別作AB_k的平行線，分別交直線B_kC_k於E、D點，由所作▱ $B_{k-1}B_kEC_{k-1}$和▱$B_kB_{k+1}C_{k+1}D$都是平行四邊形，所以

$$\overline{C_{k-1}E} = \overline{B_{k-1}B_k} = \overline{B_kB_{k+1}} = \overline{DC_{k+1}}$$

由此可見▱ $C_{k-1}EC_{k+1}D$ 也是一個平行四邊形，所以它的對角線互相平分，即有$\overline{C_{k-1}C_k} = \overline{C_kC_{k+1}}$，$\overline{EC_k} = \overline{C_kD}$，再由歸納假設，即可得

$$\begin{aligned} \overline{AC_{k+1}} &= \overline{AC_k} + \overline{C_kC_{k+1}} \\ &= \overline{AC_k} + \overline{C_{k-1}C_k} \\ &= k \cdot \overline{AC_1} + [k \cdot \overline{AC_1} - (k-1) \cdot \overline{AC_1}] \\ &= (k+1)\overline{AC_1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{B_{k+1}C_{k+1}} &= \overline{B_kD} = \overline{B_kC_k} + \overline{C_kD} \\ &= \overline{B_kC_k} + \overline{EC_k} \\ &= k \cdot \overline{B_1C_1} + [k \cdot \overline{B_1C_1} \\ &\quad - (k-1) \cdot \overline{B_1C_1}] \\ &= (k+1) \cdot \overline{B_1C_1} \end{aligned}$$

這也就歸納地證明了$\overline{AC} = m\,\overline{AC_1}$，$\overline{BC} = m \cdot \overline{B_1C_1}$，同理亦得$\overline{A'C'} = n \cdot \overline{A'C'_1}$，$\overline{B'C'} = n \cdot \overline{B'_1C'_1}$。所以

$$\begin{aligned} \overline{AC} : \overline{A'C'} &= \overline{BC} : \overline{B'C'} \\ &= \frac{m}{n} (= \overline{AB} : \overline{A'B'}) \end{aligned}$$

〔註〕：話說當年，畢氏學派認爲可公度

性的普遍成立乃是天經地義，毋容置疑的“事實”，所以他們認爲上面這種採用平行分割和全等形的論證，業已完整無缺，無瑕可擊的了！殊不知他們一直認定是天經地義的論證基石却偏偏是和事實不符的！長話短說，大約到了公元前五世紀中葉，畢氏的門人希伯斯（Hippasus）堅持地以實事求是的態度去鑽研“可公度性究竟是否普遍成立？”這個基本問題，最後終於發現並且證明：一個正五邊形的邊長和對角線長是不可公度的（non-commensurable）！〔隨後他又證明正方形的邊長和對角線長也是不可公度的。〕這個劃時代的驚人發現，對於人類的理性文明來說，其意義有如發現了知識領域的一個新大陸！但是對於當時的希臘幾何學界，特別是畢氏學派，這簡直是一個翻天覆地的大地震，把他們苦心經營，引以自豪的幾何基礎理論的殿堂，震斷了它的中心支柱。因爲他的發現和其清新嚴格的論證，事實勝於雄辯地否定了可公度性的普遍成立！因此，原先認爲穩妥得無瑕可擊的論證，都不得不向事實低頭，承認那只能算是對於可公度成立的特殊情形所給的證明。而在不可公度的情形，却還有待補證！由此可見，希伯斯當年的發現，的確給當時古希臘的幾何理論帶來了空前的危機和嚴峻的挑戰。閒話少說，且讓我們來看一看希伯斯的發現和論證吧！

㈡希伯斯和歐都克斯 (Hippasus and Eudoxus):

要實事求是地去研討可公度性是否普遍成立，當然得先有一個辦法來檢驗兩個給定線段 a ，b 是否可公度。所以讓我們先來介紹一下**輾轉丈量檢定法**：

(i)設 a ，b 是可公度的，亦即存在公尺度 c 使得 $a=m\cdot c$ ，$b=n\cdot c$，令 ℓ 是 m，n 的最大公因數，則不難看出 $c'=\ell\cdot c$ 就是同時能夠整量 a ，b 的最長公尺度。再者，我們還可以用下述輾轉丈量法，由 a ，b 去求出它們的最長公尺度。〔此法和大家熟知的由 m，n 用輾轉相除法去求 m，n 的最大公因數 ℓ 是密切相應的。〕

先用兩段之中較短者 b 去丈量 a ；若 b 恰能整量 a ，則 b 本身就是所求的最長公尺度。不然，即得一餘段 r_1，亦即在長度上有關係式

$$a=q_1\cdot b+r_1\,,\quad b>r_1$$

再用 r_1 去丈量 b ；若 r_1 恰能整量 b ，則 r_1 就是所求的最長公尺度；不然則又得另一餘段 r_2 ，即有關係式

$$b=q_2\cdot r_1+r_2\,,\quad r_1>r_2$$

然後再用 r_2 去丈量 r_1 ，……；如此輾轉丈量，即可得到一個餘段 r_k 它恰能整量前一個餘段 r_{k-1} ；這個 r_k 就是所求的 a ，b 的最長公尺度。

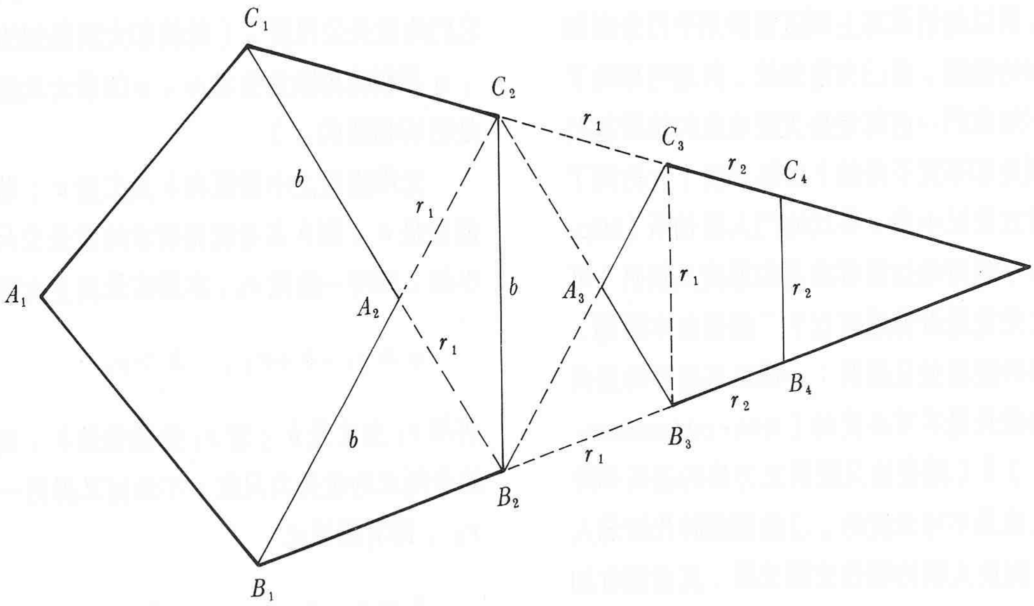
(ii)反之，設有兩個給定線段 a'，b'；若能夠證明像上述這樣輾轉丈量，必然是無止無休，永無止境！這也就證明了 a'，b'是不可公度的！下面就讓我們來介紹希伯斯早在公元前四、五百年就發現的實例和他的論證。

希伯斯的發現：

【例 1】： 設 a ，b 分別是一個正五邊形的對角線長和邊長，則 a ，b 是不可公度的。

證明：所要證明的就是用 a ，b 來做輾轉丈量，必然是永無止境的，亦即永遠不會有恰能整量的情形！

如下頁圖所示，⬠ $A_1B_1B_2C_2C_1$ 是一個正五邊形，它的五邊邊長都是 b ，五條對角線長都是 a ；它的五個內角都是 $108°$（3/5 平角）。$\Delta C_1B_2C_2$ 是等腰的，所以它的兩個底角 $\angle C_1B_2C_2=\angle B_2C_1C_2=\frac{1}{2}(180°-108°)=$



$36°=\frac{1}{5}$平角。同理也有$\angle B_2C_2B_1 = 36° = \frac{1}{5}$平角。由此可見$\Delta A_2B_2C_2$的兩底角都是$\frac{1}{5}$平角；而$\Delta C_1A_2C_2$的兩底角則都是$\frac{2}{5}$平角，所以它們都是等腰的，亦即有

$$a=\overline{C_1B_2}=\overline{C_1A_2}+\overline{A_2B_2}=b+r_1\ ,$$
$$r_1=\overline{A_2B_2}$$

分別在$\overline{B_1B_2}$和$\overline{C_1C_2}$ 的延長線上各取一段$\overline{B_2B_3}=\overline{C_2C_3}=r_1$，則不難看出⬠$A_2B_2B_3C_3C_2$ 又是一個小一號的正五邊形！（讀者試自證之）而它的對角線長恰好是b，它的邊長則恰好是以b丈量a所得的餘段r_1。這裡，請讀者細想想，當我們接着再用r_1去丈量b時，依然是用一個正五邊形的邊長去丈量它的對角線長。所以在本質上是一回事（只是其正五邊形比上一次小了一號）。同理又有

$$b=\overline{C_2B_3}=\overline{C_2A_3}+\overline{A_3B_3}=r_1+r_2$$

而且同樣地可以構造另一個更小一號的正五邊形⬠$A_3B_3B_4C_4C_3$；它的對角線長恰好是r_1，它的邊長恰好就是上述r_2。由此可見，這樣輾轉丈量，每次所做的總是以一個正五邊形的邊長去丈量它的對角線長，顯然是無止休地永遠不會有整量的止境的！這也就既巧妙又嚴格地證明了a、b是不可公度的！

【註】：用算式表達上述輾轉丈量，即爲

$$a=b+r_1,\ b=r_1+r_2,\ r_1=r_2+r_3,\ \cdots\cdots$$
$$r_{k-1}=r_k+r_{k+1},\ \cdots\cdots$$ 永無止休。

希伯斯接着也用同樣的證法，證明一個正方形的邊長和對角線長也是不可公度的，他所用到的幾何結構可以用下述圖解表達。

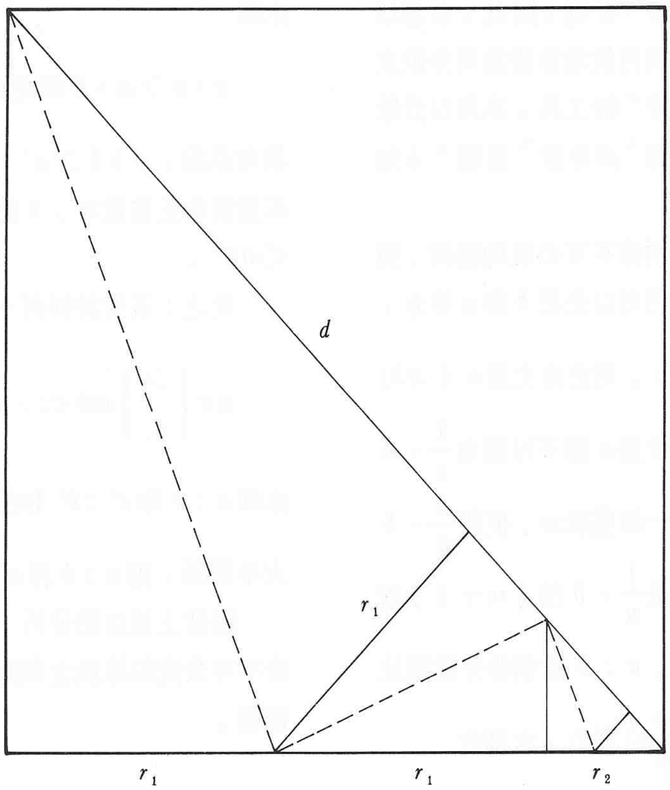
【例2】：設c，d分別是一個正方形的邊長和對角線長，則c，d是不可公度的。

證明：參看下頁圖，不難證明c，d的輾轉丈量的算式是

$$d=c+r_1\ ,\ c=2r_1+r_2\ ,$$
$$r_1=2r_2+r_3\ ,\ \cdots\cdots$$

$$r_{k-1}=2r_k+r_{k+1}\ ,\cdots\cdots$$ 永無止境。（讀者試自證之）

【註】：在讀懂上面這樣一個清新超脫的



突破性發現之後，讀者大可不必心急趕路，不妨暫且覆卷靜思，想一想爲什麼畢氏學派當年會在可不可公度這個問題上栽了偌大個跟斗？希伯斯的發現，並不是眞的去輾轉丈量，發現它永無止境；而是用當年已知的幾何定理（如三角形內角和、等腰三角形等）乾淨俐落地證明了輾轉丈量不可能有整量的止境！

再者，希伯斯的發現和論證，否定了當時幾何基礎論中的"基本公理"——可公度的普遍成立。因而根本地震撼着當年定量幾何的基礎！如何來挽救這樣一個空前的學術危機？乃是對於當年希臘幾何學家的嚴厲的挑戰，大約經過了近半個世紀的探索與研討，他們終於克服了"不可公度"的存在所產生的困難，這就是我們現在要接着討論的歐都克斯逼近法（Approximation method of Edoxus）。從人類的理性文明發展史來看，可以把"不可公度"的發現比喻成發現了一個知識領域的新大陸；則"逼近法"就是我們用來征服這個新大陸的利器，它是我們往後用來研究變量數學（亦即分析學，analysis）的基本方法。

歐都克斯逼近法：

【分析】：

(i) 當兩個線段 a，b 是可公度時，兩者在長度上的"比值"業已明確定義，而且是一個分數。反之，當兩個線段 a、b 是不可公度時，則兩者在長度上的"比值"其實還有待定義，而且這個比值肯定不是一個分數，我們不妨稱之爲"非分數"（註一）。在本質上，分數和非分數都是用來表達比值的數，只不過分數和整數之間的關係十分簡單，所以要比"非

註一：通用的名詞把正負分數叫做有理數，把上述正負非分數叫做無理數，其實它們分別是 rational number 和 irrational number 的誤譯。ratio-n-al 是 ratio 的形容詞形式，這裏應該譯爲比的。

分數”來得初等、易算、好懂。因此，本着以簡御繁的科學精神，很自然地會想法用分數來作爲進而理解“非分數”的工具，亦即以分數這種“已知之簡”去御“非分數”這種“未知之繁”。

(ii) 設 a，b 是兩條不可公度的線段，對於任給正整數 n，我們可以先把 b 作 n 等分，則其分段之長爲 $\frac{1}{n}\cdot b$。用它來丈量 a（不可公度的含義就是不論什麼 n 都不可能有 $\frac{1}{n}\cdot b$ 整量 a），即可求得一個整數 m，使得 $\frac{1}{n}\cdot b$ 的 m 倍還比 a 短，但是 $\frac{1}{n}\cdot b$ 的（$m+1$）倍則比 a 長。由此可見，$a:b$ 這個非分數要比 $\frac{m}{n}$ 大，但是却要比 $\frac{m+1}{n}$ 要小，亦即有

$$\frac{m}{n}<a:b<\frac{m+1}{n},$$

所以非分數 $a:b$ 和上述前後夾逼的分數“近似值”之間的誤差顯然都是小於 $\frac{1}{n}$ 的。由此可見，只要把 n 取得足夠大，就可以使得上述夾逼分數和比值 $a:b$ 之間的誤差小到任意地小。

(iii) 設 a，b 和 a'，b' 是兩對不可公度的線段，我們將如何來確定它們的比值 $a:b$ 和 $a':b'$ 之間的大小或相等關係呢？由前面的討論，知道 $a:b$ 和分數 $\frac{m}{n}$ 之間的比較大小如下：

$$n\cdot a\begin{Bmatrix}>\\<\end{Bmatrix}mb\Longleftrightarrow a:b\begin{Bmatrix}>\\<\end{Bmatrix}\frac{m}{n}$$

設 $a:b>a':b'$，則我們當然可以把 n 取得足夠大，使得 $\frac{1}{n}$ 小於 $a:b$ 和 $a':b'$ 之差。因此，在所有分母爲 n 的分數之中，當然存在着一個介於 $a:b$ 和 $a':b'$ 之間者，即有一個適當的 $\frac{m}{n}$，它小於 $a:b$ 但是大於 $a':b'$，亦即

$$n\cdot a>m\cdot b \text{ 但是 } n\cdot a'<m\cdot b'$$

換句話說，$a:b>a':b'$ 的充要條件就是存在適當的正整數 m，n 使得 $na>mb$ 但是 $na'<mb'$。

反之，若對於任何一對正整數 m，n 恒有

$$na\begin{Bmatrix}>\\<\end{Bmatrix}mb\Longleftrightarrow na'\begin{Bmatrix}>\\<\end{Bmatrix}mb'$$

亦即 $a:b$ 和 $a':b'$ 和任何分數 $\frac{m}{n}$ 恒有相同的大小關係，則 $a:b$ 和 $a':b'$ 必然是相等的！

總結上述三點分析，即得當年歐都克斯對於不可公度的線段之間的比值的大小或相等的定義。

歐都克斯檢定法則：

設 a，b 和 a'，b' 是兩對直線段，則 $a:b=a':b'$ 的充要條件是

$$na\begin{Bmatrix}>\\<\end{Bmatrix}mb\Longleftrightarrow na'\begin{Bmatrix}>\\<\end{Bmatrix}mb'$$

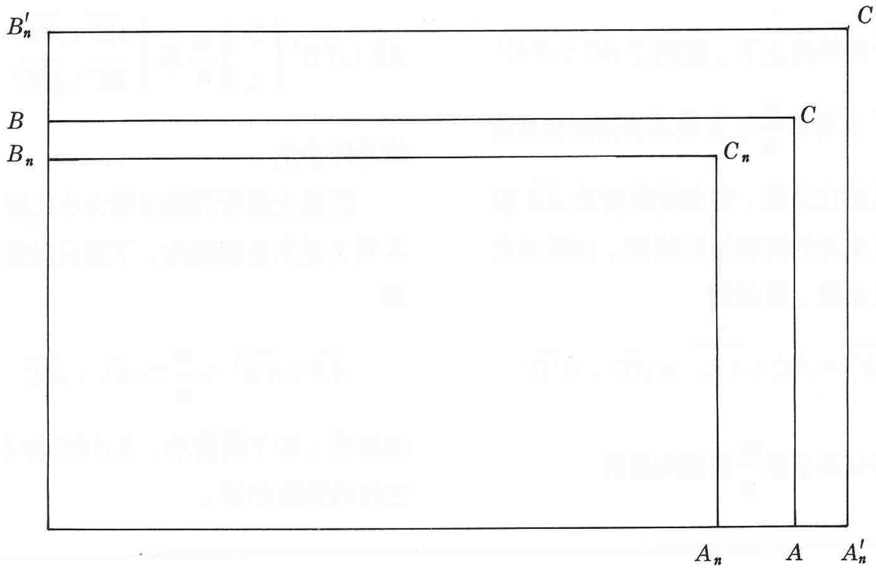
對於任給 m，$n\in N$ 恒成立。

而 $a:b>a':b'$ 的充要條件則是：存在一對適當的 m、$n\in N$ 使得 $na>mb$ 但是 $na'<mb'$。

上述檢定法則顯然是對的，但是要用它來得出 $a:b=a':b'$ 這樣一個結論，就得檢驗前述的大小關係對於所有的 m、n 都是同步的，豈不是要做無窮多個驗證才能得出一個相等的結論。也許在此讀者忍不住會疑問，像這樣的檢驗法則究竟會有些什麼用途呢？它的牛刀小試就是用來挽救古希臘幾何學的空前危機，重新奠定被不可公度的發現所動搖了的幾何基礎。下述兩個補證就是它的初步應用。

【例1】：矩形面積公式的補證

設矩形的長與寬分別是 a、b，當它們和單位長 u 的比值 $a:u$ 和 $b:u$ 都是分數時，在



㈠中業已證明了它的面積是 $(a:u)\cdot(b:u)$ 單位長平方，在這裡所要加以補證者是當 $a:u$ 和 $b:u$ 中至少有一個是非分數時，其面積依然是 $(a:u)\cdot(b:u)$ 單位長平方。

設 $a:u=\alpha$，$b:u=\beta$ 而且

$$\frac{\ell}{n}<\alpha<\frac{\ell+1}{n},\quad \frac{m}{n}<\beta<\frac{m+1}{n}$$

則顯然有

$$\frac{\ell\cdot m}{n^2}=\frac{\ell}{n}\cdot\frac{m}{n}<\alpha\cdot\beta<\frac{\ell+1}{n}\cdot\frac{m+1}{n}$$
$$=\frac{\ell m}{n^2}+\frac{\ell+m+1}{n^2}$$

再者，如上圖所示，$\square OA_nC_nB_n$ 和 $\square OA'_nB'_nC'_n$ 分別是以 $\frac{\ell}{n}u$，$\frac{m}{n}u$ 和 $\frac{\ell+1}{n}u$，$\frac{m+1}{n}u$ 爲它們的長與寬的矩形，它們的面積分別是單位長平方的 $\frac{\ell m}{n^2}$ 和 $\frac{(\ell+1)(m+1)}{n^2}$ 倍。因爲三個矩形之間顯然有

$$\square OA_nC_nB_n\subset\square OACB\subset\square OA'_nC'_nB'_n$$

所以當然也有

$$\frac{\ell m}{n^2}<\square OACB:\text{單位長平方}<\frac{(\ell+1)(m+1)}{n^2}$$

由此可見，"$(a:u)\cdot(b:u)=\alpha\cdot\beta$" 和"以 a，b 爲長寬的矩形面積和單位長平方的比值"乃是兩個同爲介於 $\frac{\ell m}{n^2}$ 和 $\frac{(\ell+1)(m+1)}{n^2}$ 之間的數值。

當 n 無限增大時，上述兩個左、右夾逼分數之間的差別，亦即

$$\frac{\ell+m+1}{n^2}=\frac{1}{n}\left(\frac{\ell}{n}+\frac{m}{n}+\frac{1}{n}\right)$$
$$<\frac{1}{n}\left(\alpha+\beta+\frac{1}{n}\right)$$

是可以小到任意小的！由此可見下述兩個常數

$\alpha\cdot\beta$ 和 $(\square OACB:\text{單位長平方})$

之間的差別要比上述可以小到任意小的分數還要小！唯一的可能是其差爲零！這也就用逼近法證明了

$$\square OACB:\text{單位長平方}=\alpha\cdot\beta$$
$$=(a:u)\cdot(b:u)$$

【例2】：相似三角形定理的補證

在㈠中所述的證明，其實是在 $\overline{AB}:\overline{A'B'}$

$=$某一分數$\frac{m}{n}$的前提之下，證明了$\overline{AC}:\overline{A'C'}$和$\overline{BC}:\overline{B'C'}$也等於$\frac{m}{n}$。自從希伯斯發現可公度性並非普遍成立之後，當然就得對於$\overline{AB}$和$\overline{A'B'}$是不可公度的情形加以補證，以歐都克斯檢定法則爲起點，要證明

$$\overline{AB}:\overline{A'B'}=\overline{AC}:\overline{A'C'}=\overline{BC}:\overline{B'C'}$$

也就是要對於任給分數$\frac{m}{n}$都能夠證明

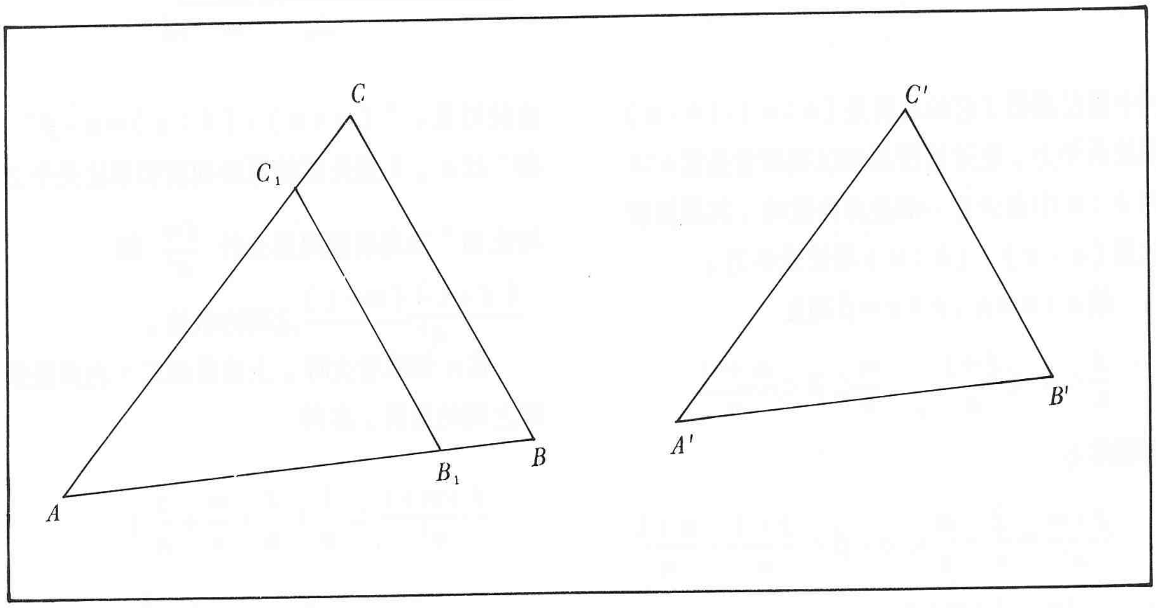
$$\overline{AB}:\overline{A'B'}\begin{Bmatrix}>\\<\end{Bmatrix}\frac{m}{n}\text{和}\begin{Bmatrix}\overline{AC}:\overline{A'C'}\\\overline{BC}:\overline{B'C'}\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}>\\<\end{Bmatrix}\frac{m}{n}$$

總是同步的。

因爲上面所列的四種大小比較式的論證在本質上是完全相同的，下面只敍述其中之一，即

$$\overline{AB}:\overline{A'B'}>\frac{m}{n}\Rightarrow\overline{AC}:\overline{A'C'}>\frac{m}{n}$$

的證明，如下圖所示，ΔABC和$\Delta A'B'C'$的三內角對應相等。



在$\overline{AB}$上取B_1點使得$\overline{AB_1}:\overline{A'B'}=\frac{m}{n}$（因爲$\overline{AB}:\overline{A'B'}>\frac{m}{n}$，所以$B_1$位於$\overline{AB}$之上），過$B_1$點作$\overline{B_1C_1}\,/\!/\,\overline{BC}$，交$\overline{AC}$於$C_1$點，顯然$\overline{AC_1}$比$\overline{AC}$短，而且$\Delta AB_1C_1$的三內角也和$\Delta A'B'C'$者對應相等，由前述業已證明的（可可公度的）情形，即有$\overline{AC_1}:\overline{A'C'}=\frac{m}{n}$，這也就證明了

$$\overline{AC}:\overline{A'C'}>\overline{AC_1}:\overline{A'C'}=\frac{m}{n}$$

至此，具有基本重要性的相似三角形定理才算是完全的嚴格地得到證明。

【註】(i)上面對於相似三角形和矩形面積公式的補證,其實是相當簡樸的,那就是運用分數可以無限逼近非分數的思想，把不可公度的情形的論證，歸於已經得證的可公度的情形來加以推導，這也就是歐都克斯逼近法的基本思想。

(ii)其實，畢氏學派雖然一開始就採取了一個與事實不符的“命題”作爲他們論證的基礎，但是他們的研討，業已深刻地揭示了長度的度量及可不可公度性在定量幾何的基礎理論上的重要性，而且他們還把早期希臘幾何對於全等形的研究推進到相似形的探討。回顧這一段史話，畢氏學派在幾何學的奠基與拓展上實

在厥功甚偉，美中不足之處是他們誤放了一塊動搖的“基石”。幸好其門人希伯斯及早發現了其中的毛病，而歐都克斯則爲了挽救上述危機，發明了逼近法這種“新工藝”，巧妙地把它加以鞏固，經過了上面這一段曲折和近百年的努力，希臘幾何學才眞正脫胎換骨，趨於成熟。

㈢定量幾何的基礎理論

總結本節的討論，定量幾何的基礎理論可以列述如下：

⑴**實 數 系：**

用來表達計算個數型的量的數系是我們熟知的整數系，用來表達、計算度量型的量（如長度、角度、面積、重量等等）的數系叫做實數系；它除了包括正負分數之外，還包含着許許多多正負非分數（這是那些不可公度量之間的比值！）改用數系的說法，歐都克斯的檢驗法則可以改述如下：

“設有兩個實數 α，α'，若它們和所有分數總是具有同樣的大小關係，則 $\alpha=\alpha'$。”

換句話說，一個實數 α 可以用“大於它的所有分數”（亦稱爲有理數）和“小於它的所有分數”這兩個分數子集唯一地加以描述。

改用數列的術語來說，歐都克斯法則所相應的也就是數列極限的**唯一性**（uniqueness）。設有一對左、右夾逼數列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 和被夾逼的兩個實數 α, α'，亦即

$$a_1\leq a_2\leq\cdots\leq a_n\leq a_{n+1}\leq\cdots\leq\left\{\begin{matrix}\alpha\\ \alpha'\end{matrix}\right\}$$
$$\leq\cdots\leq b_{n+1}\leq b_n\leq\cdots\leq b_2\leq b_1$$

而且 (b_n-a_n) 可以小到任意小。

則 $\alpha=\alpha'$。

在這裡，很自然應該看一看上述左、右夾逼數列極限的**存在性**（existence）所相應的又是什麼呢？設有任給一對左、右夾逼數列，亦即

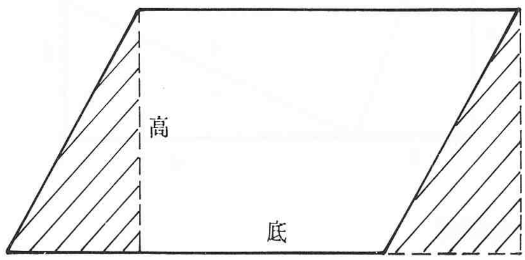
$$a_1\leq a_2\leq\cdots\leq a_n\leq a_{n+1}\leq\cdots\leq b_{n+1}$$
$$\leq b_n\leq\cdots\leq b_2\leq b_1,$$

而且 (b_n-a_n) 可以小到任意小，是否一定會存在一個介於所有 a_n, b_n 之間的實數 α 呢？上述存在性問題的肯定，其實也就是直線乃是連續不斷的這個直觀的**解析描述**（analytical description），通常稱之謂實數系的完備性或連續性。

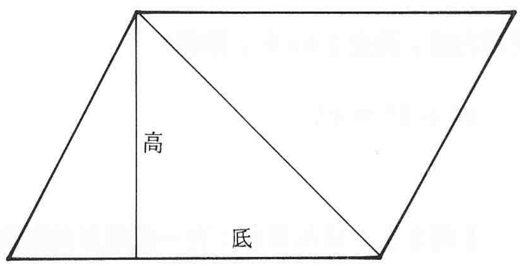
⑵**面積公式：**

前面業已嚴格論證了矩形面積公式，它是一切平面形面積公式的基礎，由它就容易用割補法推導其他面積公式，例如

(i) 平行四邊形面積＝底×高



(ii) 三角形面積＝$\frac{1}{2}$底×高



⑶**勾股定理、出入相補和相似三角形定理**

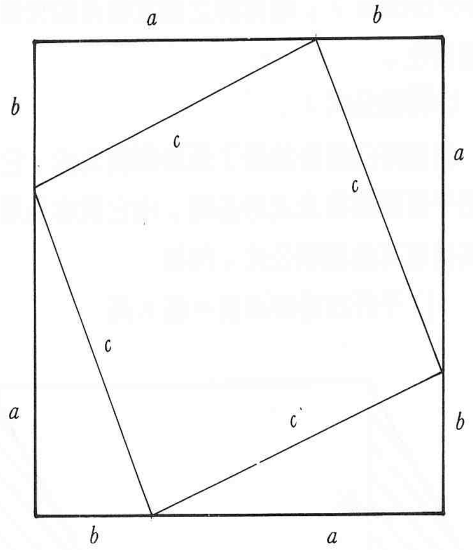
我國古代，即已善用面積公式，來進一步推導定量幾何中的基本定理，茲以勾股、出入相補和相似形的論證作爲本節的結束。

【例1】：**勾股定理**：設 a，b 和 c 分別是一個直角三角形的兩直角邊和斜邊邊長（古

書稱之謂勾、股和弦），則有

$$a^2+b^2=c^2$$

證明：如下圖所示，我們可以把一個邊長爲 $a+b$ 的正方形分割成四個上述直角三角形和一個邊長爲 c 的正方形：



由此即得

$$(a+b)^2=c^2+4\cdot\frac{1}{2}a\cdot b$$
$$=c^2+2a\cdot b$$

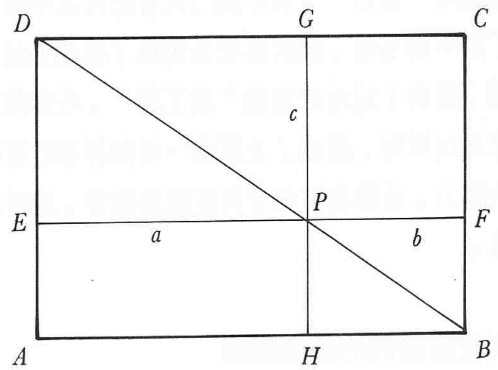
展開右側，消去 $2a\cdot b$，即得

$$a^2+b^2=c^2$$

【例2】：出入相補：在一個矩形的對角線上任取一點 P，過它分別作兩邊的平行線，則所割的兩對線段成比例，亦即下圖所示，

$$\overline{EP}:\overline{PF}=\overline{GP}:\overline{PH}$$

證明：由 $\Delta ABD\cong\Delta CDB$，$\Delta EPD\cong\Delta GDP$ 和 $\Delta HBP\cong\Delta FBP$ 容易看到▭$AHPE$ 和▭$PFCG$ 是等面積的，亦即有



$$a\cdot d=b\cdot c$$

所以　$a:b=c:d$

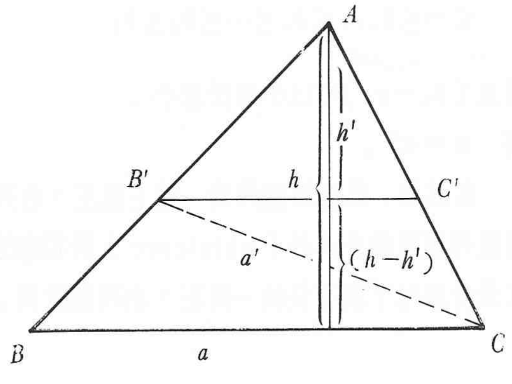
【註】：上述比例式是我國古代幾何測量的基本工具，在本質上，它其實也就是直角三角形的相似形定理，因爲比例式 $a:b=c:d$ 和

$$\overline{AB}:\overline{HB}=(a+b):b=(c+d):d$$
$$=\overline{AD}:\overline{HD}$$

是等價的，而上述比例式也就是 ΔABD 和 ΔHBP 相似，效法上面出入相補的古法，讓我們給希臘幾何中的“驕傲”——相似三角形定理——也來一個中國式證明。

【例3】：相似三角形定理的另證

證明：如下圖所示，我們不妨把兩個相似三角形 ΔABC 和 $\Delta A'B'C'$ 移置成下述位置，即 $A=A'$，$\overline{B'C'}\parallel\overline{BC}$。效法古意，我們可以用兩種割補方式來計算梯形⏢$BCC'B'$ 的面積，亦即



$$\square BCC'B' = \Delta ABC - \Delta AB'C'$$

$$= \frac{1}{2}a \cdot h - \frac{1}{2}a' \cdot h'$$

$$= \Delta B'BC + \Delta B'C'C$$

$$= \frac{1}{2}(h-h') \cdot a$$

$$+ \frac{1}{2}(h-h') \cdot a'$$

整理上述代數等式即得

$$h'a' - h'a = 0 \quad \text{亦即} \quad \frac{h}{h'} = \frac{a}{a'}$$

再用面積公式，即有

$$\frac{\Delta ABC}{\Delta AB'C'} = \frac{\frac{1}{2}ha}{\frac{1}{2}h'a'} = \left(\frac{h}{h'}\right) \cdot \left(\frac{a}{a'}\right) = \left(\frac{a}{a'}\right)^2$$

同理亦有上述面積之比也等於 $\left(\frac{b}{b'}\right)^2$ 和 $\left(\frac{c}{c'}\right)^2$，亦即

$$\left(\frac{a}{a'}\right)^2 = \left(\frac{b}{b'}\right)^2 = \left(\frac{c}{c'}\right)^2$$

因爲正數的平方相等時，則其本身業已相等，亦即

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} 。$$

（未完待續）