考題與教材

～七十七年大學入學考題與教材之探討

壹、前　言

數學教育專家釐定“高中數學”課程標準後，教科書的作者即據此標準以作者對數學的學養依照獨有的題材描述高中數學，這歷程就是教科書，我們高中教師當以教本爲工具，憑藉對學科的經驗將教本知識的全貌傳授給學生。學生們深精研究教本的內容，廣泛的演練各種習題，以便接受大學入學考試的測驗，求學升學再求學這是學生必經的歷程。大學入試命題先生依往例常以教科書爲基礎，挑選部分理論設計成考題，以便測出考生的程度，達到選拔優秀人材的目標。

教師尙得透視教本，了解各種描述方法、技巧、教學本意，選擇題目，教導學生演算，使學生熟悉教本旨意，任由考題測量，全部的過程謂之數學教育。

所以教學、教本、認知、考題四種意義相配合並發揮之，當承傳學術，提昇科技締造文明佳蹟是吾等使命。

本文以解答七十七年大學入學考題的歷程，回顧高中數學教本的內容、航向、風格向即將參加來年考試的高中生報告，他方更企求專家指正，俾得正確概念，以利往後工作，誠乃書寫本文的旨意。

貳、77年大學入學考題(自然組)解答

※本學科共分為兩部分。第一部分為單一選擇題，請將答案劃記在「答案卡」上。第二部分為非選擇題，請將答案寫在「非選擇題試卷」上。

第一部分：單一選擇題（共佔 25 分）

說明：本部分共有子、丑、寅三大題，各分成三個小題；答案卡的題號係指小題題號，自第 1 題至第 9 題。請將你的答案劃記在「答案卡」上。每小題五個備選答案中，恰有一個是對的。答錯了倒扣 1/4 題分；若不答，則得零分。

【子】 (一)設集合 G 有 6 個元素，H 有 3 個元素，則所有從 G 到 H 的函數，其總數爲

1. (A) 729　(B) 216　(C) 120　(D) 56　(E) 20　（4分）

(二)函數 $f: G \to H$ 稱爲嵌射的意思是：若 $x_1 \neq x_2$，則 $f(x_1) \neq f(x_2)$。設 G 有3個元素，H 有7個元素，則所有從 G 到 H 的嵌射函數，其總數爲

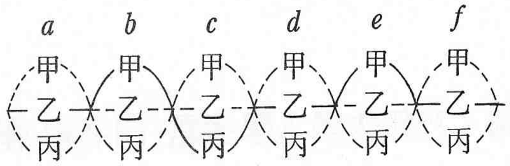
2. (A) 2187　(B) 343　(C) 210
　(D) 84　(E) 35　（3分）

(三)函數 $f: G \to H$ 稱爲蓋射的意思是：H 中任一元素 y 皆可寫成 $y=f(x)$，而 $x \in G$。設 G 有9個元素，H 有2個元素，則所有從 G 到 H 的蓋射函數，其總數爲

3. (A) 510　(B) 79　(C) 70
　(D) 43　(E) 34　（3分）

【解】：(一)設 $G=\{a, b, c, d, e, f\}$

$H=\{$甲，乙，丙$\}$



1.*上圖中每走一路線定出一函數。

2.*實線部份代表一函數對應關係，說明如下：

如：$a \to$乙，$b \to$甲，$c \to$丙，$d \to$乙，$e \to$甲，$f \to$乙

3.*共可定出　$3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^6 = 729$

個路線（函數）　故1.選(A)

(二)令 $G=\{1, 2, 3\}$

$H=\{a, b, c, d, e, f, g\}$

原述即爲 H 中任選三元素排成一列，（依序對應 G 之元素"1""2""3"，故有 $P^7_3 = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$ 種

∴　2.選(C)

(三)令 $G=\{x_1, x_2, \cdots, x_9\}$

$H=\{a, b\}$

G 至 H 的函數共有 2^9 個

但：$x_1, x_2, \cdots, x_9 \to 1$
或 $x_1, x_2, \cdots, x_9 \to 2$ } 此二函數非蓋射應扣除

故所求爲：$2^9 - 2 = 510$　∴ 3.選(A)

【丑】十二張分別標以1，2，…，12 的卡片，任意分成兩疊，每疊各六張。

(一)若1，2，3三張在同一疊的機率爲 ℓ/m，其中 ℓ，m 爲互質的正整數，則

4. $\ell=$
(A) 2　(B) 3　(C) 5　(D) 7　(E) 11　(3分)

5. $m=$
(A) 11　(B) 12　(C) 15
(D) 35　(E) 77　（3分）

(二)若1，2，3，4四張中，每疊各有兩張的機率爲 n/m，其中 n，m 爲互質的正整數，則 $n=$

6. (A) 2　(B) 3　(C) 5　(D) 7　(E) 11　(3分)

【解】

(一) $$\frac{2 \cdot \overbrace{C^9_3}^{\text{從}4,5,6,\cdots,12\text{取三張與}1,2,3\text{合成一疊}} \cdot C^6_6}{C^{12}_6 \cdot C^6_6} = \frac{2 \cdot \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot 1}{\frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}} = \frac{2}{11} = \frac{\ell}{m}$$

4. $\ell = 2$　選(A)

5. $m = 11$　選(A)

(二) $$\frac{\overbrace{C^4_2}^{1,2,3,4\text{選}2\text{張爲一疊}} \cdot C^2_2 \cdot \overbrace{\frac{1}{2}}^{(1,2),(3,4),\text{與}(3,4),(1,2)\text{分法相同}} \cdot C^8_4 \cdot C^4_4}{C^{12}_6 \cdot C^6_6}$$

$$= \frac{\frac{4 \cdot 3}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot 1}{\frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} \cdot 1} = \frac{5}{22} = \frac{n}{m}$$

6. $n = 5$　選(C)

【本題探討】～品嘗函數

反覆回味高中數學，可以了解"函數"這

語言的用途。

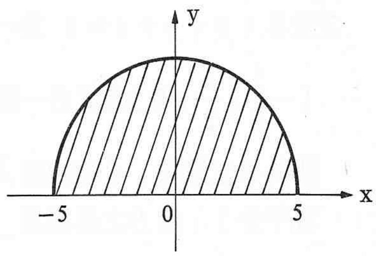
1.*如代數式$\sqrt{25-x^2}$表示實數時x的範圍大家熟知：$-5\leq x\leq 5$，而$\sqrt{25-x^2}\geq 0$

2.*以代數符號$f(x)$表$\sqrt{25-x^2}$，∵$\sqrt{25-x^2}$隨x改變而改變，人們用$f(x)$稱之較爲簡便。

3.*當$x=3$，$f(x)=4$，以$f(3)=4$敘述之，若$x=6$，則$f(6)$不爲實數

又方程式$\sqrt{25-x^2}=4$，則根$x=\pm 3$，而方程式$\sqrt{25-x^2}=-4$，則不存在實根，

∴$\int_{-5}^{5}\sqrt{25-x^2}\,dx$表半徑爲5的半圓面積，當然$\int_{-5}^{7}\sqrt{25-x^2}\,dx$這個積分無意義。



∵$5<x\leq 7$時$\sqrt{25-x^2}$不爲實數，不能積分。

4.* 上述的知識可由函數說明：(函數的功能)

函數：$f(x)=\sqrt{25-x^2}$，

或謂：$f:x\rightarrow\sqrt{25-x^2}$

定義域：$A=\{x\in R|-5\leq x\leq 5\}$

值域$B=\{k\in R|0\leq k\leq 5\}$

1.** A中每一元素x在B中都有元素$\sqrt{25-x^2}$與之對應，f爲A到B的函數。

2.** B中每一元素k在A中均有元素與之對應（f爲蓋射）即$5\geq k\geq 0$時，方程式$\sqrt{25-x^2}=k$之x有解。

且　x在A中　$(-5\leq x\leq 5)$

3.** 若函數　$f(x)=\sqrt{25-x^2}$之定義域爲A，則定積分$\int_{-5}^{5}\sqrt{25-x^2}\,dx$有意義。

6* 當$\ln x_1=\ln x_2$則$x_1=x_2$恒成立，（即$x_1\neq x_2$，則$\ln x_1\neq\ln x_2$）而$\sin x_1=\sin x_2$時，$x_1=x_2$未必成立。

這說明：ln爲嵌射（1－1函數）故等號兩端可去對數，sin函數非嵌射，故不能在等號兩端去函數符號。

7.* 仔細體會函數語言之學習動機即在前述描述的方便。而考題已增添函數原始功能，那統計函數個數的數學題目，必定有其研究價值，新教材給我們的啓示：現今數學的本能是將“自然事例轉化爲數學語言，經過演算後，把肯定的結論還給自然現像”或用數學的語言去解除研究自然現像的障礙，幾乎數學教學應朝此方向邁進已是普遍的共識吧！

8.* 平常學習一個定義必有充分的時間，例題，習題反覆的演練，體驗定義的意境，本次考試在考卷上突然的定義一個名詞，隨即進入解題狀態，生死關頭的緊張思考，對全體考生是很辛苦的，不過這是一份公平的考題（對僅學新教材的考生而言），因爲映射、嵌射、蓋射是舊教材的名詞，新教材已不列入，當然不教學了，考生不必太慌張可自然的承受測驗。

【寅】設$\dfrac{x^2-13}{(x+1)^2(x-2)}$

$=\dfrac{\ell}{x+1}+\dfrac{m}{(x+1)^2}+\dfrac{n}{x-2}$，

其中ℓ，m，n皆爲常數，則

7.　$\ell=$

(A)-4　(B)-2　(C)0

(D)2　(E)4　（2分）

8.　$m=$

(A)-4　(B)-1　(C)0

(D)1　(E)4　（2分）

【解】通分後，分子：

x^2-13

$$=\ell(x+1)(x-2)+m(x-2)$$
$$+n(x+1)^2$$

當 $x=2$，$-9=9n$　∴ $n=-1$

$x=-1$，$-12=-3m$　$m=4$

比較 x^2 項　$1=\ell+n$　得 $\ell=2$

7. 選(D)　　8. 選(E)

第二部分：非選擇題（共佔75分）

說明： 在本部分中，第一題為填充題（共 45 分），第二題至第四題為計算或證明題（每題 10 分）。請都在「非選擇題試卷」上作答。

一、填充題： 本題共有九個空格，每個空格5分，請答在「非選擇題試卷」上的第一欄；務必寫上格號（甲、乙、…、壬）後，再寫答案。（為節省空間，本題作答請不要寫出演算過程。）

1. 函數 $\dfrac{x^2-13}{(x+1)^2(x-2)}$，$x>2$，的反導函數為__(甲)__。

【解】 $\displaystyle\int\frac{x^2-13}{(x-1)^2(x-2)}\,dx$

$$=\int\left(\frac{2}{x+1}+\frac{4}{(x+1)^2}+\frac{-1}{x-2}\right)dx$$

$$=2\ln(x+1)+4(-1)\cdot\frac{1}{x+1}$$
$$-\ln(x-2)+C$$

$$=\ln\frac{(x+1)^2}{x-2}-\frac{4}{x+1}+C\cdots\cdots(甲)$$

【本題之探討】～分項分式之源起與功能

初接〔寅〕題，立即感應出這是恒等計算，直覺的計算沒有陷阱，高中生在學校答數學考題，常遭陷阱暗算，可說怵目驚心，對這題的運算常有"信心不足"的思緒，但就是這種演算，還是算出答案，信心奠定。

以後續作填充1題，若能想出利用上題積分，心胸定是非常爽快，普通考生在參考書的補充題皆有習作，不覺困難，依平常心去演算必有斬獲。

【回顧教本教學】

1* 分項分式這單元不在教本範圍內，但它的演算道理仍可爲一般高中生接受。

2* 由分項分式之演算可以尋求有理函數之反導數，使我們恍然大悟從前分項分式的教學是爲積分教學舖路，分項分式的功能得以表達。

3* 反函數、極坐標對積分術亦很有貢獻，先期教材均有詳述，目的爲大學修習微積分舖路，今之教材不予列入，許是爲減輕高中生課業負擔之安排！

2. 設 E：$x+y+z=1$ 爲一定平面，$A\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},0\right)$爲 E 外一點。若 B 爲 A 關於 E 之鏡像，（即線段 $\overline{AB}$ 爲 E 所垂直平分），則 B 之坐標爲__(乙)__。

若 L：$y=\dfrac{1}{3}x-\dfrac{1}{2}$，$z=0$，爲一直線，則 L 關於 E 之鏡像，其方程式爲__(丙)__。

【解】1* B 爲 A 關於平面 E 的對稱點坐標是：

$$\left(-\frac{1}{2}-2\cdot\frac{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+0-1}{1^2+1^2+1^2},\right.$$

$$\frac{1}{2}-2\cdot\frac{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+0-1}{1^2+1^2+1^2},$$

$$\left.0-2\cdot\frac{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+0-1}{1^2+1^2+1^2}\right)$$

即 $B\left(\dfrac{1}{6},\dfrac{7}{6},\dfrac{2}{3}\right)\cdots\cdots$(乙)

2*

$$L:\begin{cases}y=\dfrac{1}{3}x-\dfrac{1}{2}\\ z=0\end{cases}$$ 取二點：

$p_1(0,-\frac{1}{2},0)$，$p_2(3,\frac{1}{2},0)$

關於E的對稱點（鏡像）分爲：

$$p_1'(0-2\cdot\frac{0-\frac{1}{2}+0-1}{1^2+1^2+1^2},$$

$$-\frac{1}{2}-2\cdot\frac{0-\frac{1}{2}+0-1}{1^2+1^2+1^2},$$

$$0-2\cdot\frac{0-\frac{1}{2}+0-1}{1^2+1^2+1^2})$$

即 $p_1'(\frac{2}{3},\frac{1}{6},\frac{2}{3})$，同理

$p_2'(\frac{11}{3},\frac{7}{6},\frac{2}{3})$

p_1'，p_2' 所連直線方程式

$$\begin{cases}\dfrac{x-\frac{2}{3}}{\frac{11}{3}-\frac{2}{3}}=\dfrac{y-\frac{1}{6}}{\frac{7}{6}-\frac{1}{6}} \\ z=\dfrac{2}{3}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}\dfrac{x-\frac{2}{3}}{3}=\dfrac{y-\frac{1}{6}}{1} \\ z=\dfrac{2}{3}\end{cases}\quad\cdots\cdots\text{（丙）}$$

【本題之探討】～空間坐標幾何之綜體思考

空間坐標幾何最爲高中生喜愛，此類問題有實體感容易掌握，計算有固定公式，如若聚精會神演算，沒有陷阱的惶恐，更無特技的隱憂，是普通隨堂練習的考題，答題不困難，得分更容易。

仍然越過“鏡像”改以“對稱”直接思考較爲貼切，熟悉，因爲熟悉較能集中意志思索求解。

【回顧教本之教學】

1.* 空間坐標系中的平面方程式，直線方程式對我們讀者而言是演算思考最得心應手的一章，但此“劇情”是否結束在空間坐標系中？依作者的佈局，後續的一次方程組與行列式（第三册第二章）把空間中平面間之關係由聯立方程組來表達，尤有進者，行列式不過是推動方程組公解的一工具，沒有舊教材那麼熱烈的探討。

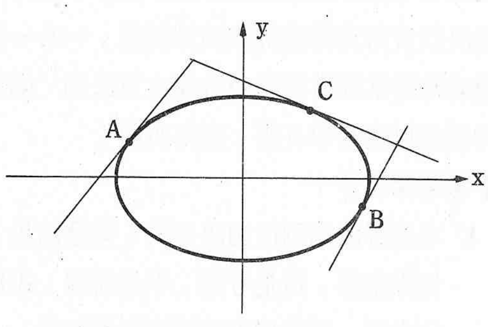
2* 理科數學下册第二章矩陣又把聯立方程組說明得更詳細，特別是齊次方程組的功能顯示在章末的幾個例題，（克希荷夫定律，里昂提夫模式…）從空間坐標、平面方程、聯立方程組、矩陣代數這一系列的描繪，在教本作者細細的編寫，岑岑的道明，努力的把我們高中數學即粗俗的算學串聯成一有系統，有結果的完整知識，展示數學的功能，語言（數學）的美感，供我們讀者享用眞應感謝教本作者。

3.設A，B，C爲橢圓$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$上三點，而過$C$點之切線，與過$A$，$B$之兩切線皆垂直。若$C$點坐標爲$(\frac{9}{5},\frac{8}{5})$，則$A$，$B$兩點坐標爲__(丁)__及__(戊)__。

【解】1.* 過C之切線：

$$L:\frac{\frac{9}{5}\cdot x}{9}+\frac{\frac{8}{5}\cdot y}{4}=1$$

即 $x+2y=5$，斜率：$-\frac{1}{2}$



2^* 垂直 L 之切線：$y=2x\pm\sqrt{9\cdot4+4}$

即 $2x-y\pm2\sqrt{10}=0$

3^* 而過 $A(x_1, y_1)$ 之切線

$$\frac{x_1x}{9}+\frac{y_1y}{4}-1=0$$

與 $2x-y+2\sqrt{10}=0$ 同義

$$得\ \frac{\frac{x_1}{9}}{2}=\frac{\frac{y_1}{4}}{-1}=\frac{-1}{2\sqrt{10}}\Rightarrow$$

$$A(x_1, y_1)=\left(\frac{-9}{\sqrt{10}}, \frac{2}{\sqrt{10}}\right)$$

4^* 過 $B(x_2, y_2)$ 之切線

$$\frac{x_2x}{9}+\frac{y_1y}{4}-1=0$$

與 $2x-y-2\sqrt{10}=0$ 同義

$$\therefore \frac{\frac{x_2}{9}}{2}=\frac{\frac{y_2}{4}}{-1}=\frac{1}{2\sqrt{10}}\Rightarrow$$

$$B(x_2, y_2)=\left(\frac{9}{\sqrt{10}}, \frac{-2}{\sqrt{10}}\right)$$

【回顧教本之教學】～錐線的切線

"理科數學（上册）"的主題一介紹微分、積分。"錐線的切線"不若傳統般的"重頭戲"需利用單章多節的介紹，據作者手筆，領悟出錐線方程式的圖形非函數圖形，得將之表爲函數再利用導數來求切線方程式，這是微分的用途，要明白告知讀者，每一嶄新的定義一導數必有其產生的因素，憑此克服或解說某種的事實之特性——錐線的光學性質即是一例。

透析教本，何以錐線的內容編排縮水至如此簡單，扼要，比起舊教材減少甚多，實乃作者堅決以實用爲歸宿排除演算玩藝，一心一意讓讀者時時掌握描寫高中數學之方法和"劇情"的終結以達教學目標，至爲明顯。

【考題探討】

1^* 本題解法爲利用切線公式（微分結果）求切點坐標，這是考題，不是授課，遮住微分本能，單考切線演算不影響教學。

2^* 思考容易，辨別清晰，不需特技，無畏陷阱，演算坦然，是考生歡迎的考題。

4.設 a，b，c 三數滿足 $\begin{cases} a+b+c=4 \\ a^2+b^2+c^2=12 \\ a^3+b^3+c^3=28 \end{cases}$，令 $f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$。若將 $f(x)$ 表成 $x^3+\ell x^2+mx+n$，則 $n=$ ㈢ ，而方程式 $f(x)=0$ 有一正無理根爲 ㈤ 。

【解】

1^* $f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$

$\quad=x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc$

而 $f(x)=x^3+\ell x^2+mx+n$

$\therefore\ \ell=a+b+c=4\qquad n=-abc$

$$\because \underbrace{a^3+b^3+c^3}_{28}=\underbrace{(a+b+c)}_{4}\cdot(\underbrace{a^2+b^2+c^2}_{12}-\underbrace{(ab+bc+ca)}_{2})+\underbrace{3abc}_{3(-n)}$$

$28=4\cdot(12-2)+3(-n)$

*其中 $\underbrace{(a+b+c)^2}_{16}=\underbrace{a^2+b^2+c^2}_{12}+2(ab+bc+ca)$

$16=12+2\cdot(ab+bc+ca)$

$\therefore ab+bc+ca=2$

$\therefore n=4$……㈢

2^* $f(x)=x^3-4x^2+2x+4$

$\quad=(x-2)(x^2-2x-2)=0$

之根爲：2，$1+\sqrt{3}$，$1-\sqrt{3}$

其中正無理根爲 $1+\sqrt{3}$……㈤

【本題之探討】～根與係數

基礎數學中根與係數的演算題最受學生歡迎，普通高中生都能熟悉此一節，因是造題容易，變換精彩，逸趣盎然，橫生出繁多補充題，致教學應接不暇，然而不明之處倒也不少，因爲除了演算求取答案竟不知扮演何種角色，使能克服何種研習的障礙，此點最納悶。

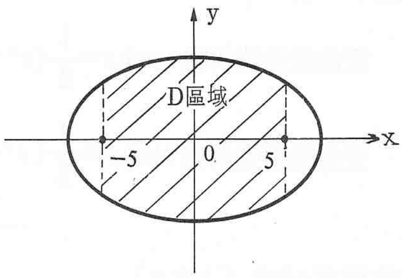
新教本筆下的高中數學對此描寫僅僅淺釋而已，並未跨大演練，特別聯立方程組之"韻

味”與本題相左，新教材重視聯立方程組的幾何意義～圖形的交點、實根個數，更重視實用意義～齊次方程組的運輸、電流……特寫。

新教材導引我們讀者不要再拘泥於傳統的數學演算，它引進明顯的定義、定理將零碎的高中數學串聯成一有系統，講實用的“故事”，我們確應拋棄傳統數學包袱，同心協力走進一個實用高中數學之年代。

5.設橢圓Γ之方程式為 $\frac{x^2}{34}+\frac{y^2}{9}=1$，兩焦點為（$-c$，0）及（$c$，0），其中 $c>0$。設 D 為Γ內部而被兩正焦弦所夾之區域。將 D 繞Γ的長軸旋轉一周，而形成一酒桶狀立體區域。由積分定義知，此一立體區域之體積 V 可以表成 $\int_{-c}^{c} f(x)\,dx$，則 $f(x)=$ ＿㈦＿，而 V 之值為 ＿㈧＿。

【解】1* 橢圓Γ：$\frac{x^2}{34}+\frac{y^2}{9}=1$ 之二焦點為（-5，0），（5，0），$c=5$



2* $V=\int_{-5}^{5}\pi\cdot y^2\cdot dx$

$=\int_{-5}^{5}\pi\cdot 9\left(1-\frac{x^2}{34}\right)dx$

*$\left(\text{D區域：}-5\le x\le 5,\ y^2=9\cdot\left(1-\frac{x^2}{34}\right)\right)$

$\therefore f(x)=9\pi\left(1-\frac{x^2}{34}\right)$ ……㈦

3* $V=9\pi\left(x-\frac{x^3}{3\cdot 34}\right)\Big|_{-5}^{5}$

$=9\pi\left[5-\frac{5^3}{3\cdot 34}-\left((-5)-\frac{(-5)^3}{3\cdot 34}\right)\right]$

$=90\pi-\frac{250}{34}\cdot 3\pi=\frac{1155}{17}\pi$ ……㈧

【本題之探討】～定積分的意義

這是十足反映定積分學習意義的考題，考生可不慌不忙的依照題意做直覺的演算，不會有偏差，高三一年來精研微積分不遺餘力，答寫本題應可舒展所學，其樂無比。

解題經驗豐富的考生知道題中的 C 值為焦心距“5”因此演算 $f(x)$ 的答案沒有“C”的困擾。

說明： 以下第二題至第四題為計算或證明題，每題 10 分。請將演算過程寫在「非選擇題試卷」上；先標明題號（二、三、四），再作答。

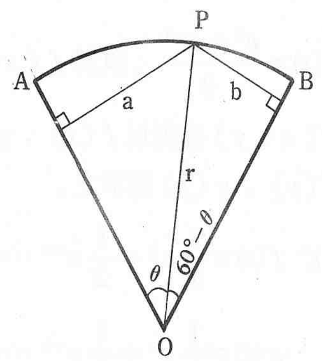
二、在扇形 OAB 中，O 為圓心，$\overline{OA}=\overline{OB}=r$ 為半徑，$\angle AOB=60°$。若 P 為圓弧 $\widehat{AB}$ 上一點，而 P 至 OA 之距離為 a，至 OB 之距離為 b，試將 r 以 a 及 b 表示之。

【解】1* 令 $\angle AOP=\theta$，則 $\angle BOP=60°-\theta$

2* $\because \sin\theta=\frac{a}{r}$，$\sin(60°-\theta)=\frac{b}{r}$

$\therefore r=\frac{a}{\sin\theta}=\frac{b}{\sin(60°-\theta)}$

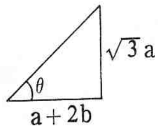
即：$a\sin(60°-\theta)=b\sin\theta$



$a\sin 60°\cos\theta-a\cos 60°\sin\theta$
$=b\sin\theta$

得：$\dfrac{\sqrt{3}}{2}a\cos\theta=\left(\dfrac{a}{2}+b\right)\sin\theta$，

而 $\tan\theta=\dfrac{\sqrt{3}\,a}{a+2b}$



3* $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}\,a}{\sqrt{3a^2+(a+2b)^2}}$

4* $\because r=\dfrac{a}{\sin\theta}=\dfrac{\sqrt{3a^2+(a+2b)^2}}{\sqrt{3}}$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{a^2+ab+b^2}$$

【本題之探討】～三角函數邊角關係

若以平常心依直角三角形邊角關係切入探索，本諸固有解題經驗，往下探討，豁然開朗，必能穩固解答的思緒。這種考題不必特技，絕活，不過萬一心慌，失去沈着，徒勞無功不無可能。

【教材之回顧】

三角函數是基礎數學，常常遭遇為解題而學習解法，迷失在龐大的解群當中，茫然不知用途為何，令人心寒，今後的學習～升學總複習應以六册高中數學觀點，仔細觀察三角函數的出處（源起），對解說現象或解除演算障礙重要性特別注意理解，記憶，如果只是區域性的演“藝”習題，可列為次要進行升學準備，減輕壓力，記憶清晰不雜亂，以獲得開朗的心情應考，於事有益。

三、定義二函數如下：$f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$，

$g(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$。試將 $f(x+y)$ 及 $g(x+y)$ 分別以 $f(x)$，$g(x)$，$f(y)$，$g(y)$ 表示之。

【解】1* $f(x)=\dfrac{1}{2}e^x-\dfrac{1}{2}e^{-x}$ ………①

$g(x)=\dfrac{1}{2}e^x+\dfrac{1}{2}e^{-x}$ ………②

$\Rightarrow\quad e^x=f(x)+g(x)$，

$e^{-x}=f(x)-g(x)$

2* $f(x+y)=\dfrac{e^{x+y}-e^{-x-y}}{2}$

$=\dfrac{1}{2}\left[e^x\cdot e^y-e^{-x}\cdot e^{-y}\right]$

$=\dfrac{1}{2}\left[(f(x)+g(x))(f(y)+g(y))\right.$

$\left.\quad-(f(x)-g(x))(f(y)-g(y))\right]$

$=\dfrac{1}{2}\left[2f(x)g(y)+2f(y)g(y)\right]$

$=f(x)g(y)+f(y)g(y)$………答

$g(x+y)=\dfrac{e^{x+y}+e^{-(x+y)}}{2}$

$=\dfrac{1}{2}\left[e^x\cdot e^y+e^{-x}\cdot e^{-y}\right]$

$=\dfrac{1}{2}\left[(f(x)+g(x))(f(y)+g(y))\right.$

$\left.\quad+(f(x)-g(x))(f(y)-g(y))\right]$

$=f(x)f(y)+g(x)g(y)$………答

【本題之探討】～指數運算

一般升學參考書都列有此題的詳解，因為這是雙曲線函數，於高層次的數學中常常出現，是很重要的演算公式，有如三角函數之演算特性，常稱

雙曲線餘弦函數 $\cosh x=\dfrac{1}{2}(e^x+e^{-x})$

雙曲線正弦函數 $\sinh x=\dfrac{1}{2}(e^x-e^{-x})$

………等等

如此得有 $\sinh(x\pm y)$

$=\sinh x\cosh y\pm\cosh x\sinh y$

$\cosh(x\pm y)$

$=\cosh x\cosh y\pm\sinh x\sinh y$

他如：$\tanh x=\dfrac{\sinh x}{\cosh x}$，$\coth x=\dfrac{\cosh x}{\sinh x}$

即有 $\tan(x\pm y)=\dfrac{\tanh x\pm\tanh y}{1\pm\tanh x\tanh y}$

（以下略）

【教材之回顧】

為便於介紹指數、對數函數的微分、積分

，基礎數學第二册第一章把指數，對數函數做一普通層次的介紹，多半注重函數圖形的特徵之描繪，為理科數學微分、積分奠定基礎，指數函數的功能顯示在積分的應用例題：如細菌繁殖速度以指數函數來預估，要比其他函數預估的誤差為小，…對數函數之演算特徵（功能）表達於第二册第一章的例題中，說明超大數、超小數如果使用對數演算，可以讓人心、人腦接受，方便無比。

參考書（升學專用）的補充題多如牛毛，有時還脫離教科書編寫的航向，濫予補充，我們教者、學者均疲於奔命，本次考題恰為教本習題，將可導引讀者以後重視教本學習，掌握學習目標（航向），推動正常教學功不可沒。

四、考慮方程式 $(x-2)(x^2+2x+2)=-10^{-5}$。

1.試問此方程式有幾個實根，並簡單說明理由。

2.求此方程式任一實根之近似值至小數第五位。〔近似值與該實根到小數第五位前（含第五位）完全相同。〕

【解】1.* 設 $f(x)=(x-2)(x^2+2x+2)+10^{-5}$

$$=x^3-2x-4+10^{-5}$$

$$f'(x)=3x^2-2 \quad , \quad f''(x)=6x$$

2.* 於 $f'(x)=3x^2-2=0$ 時

$$x=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$$

而 $f''\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)=6\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}>0$

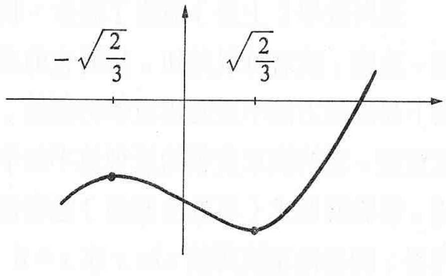
$\therefore f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ 為極小值（負數）

$f''\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)=-6\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}<0$

$\therefore f\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ 為極大值（負數）

3.* 因極大值、極小值同為負數，即極大點、極小點均在 x 軸下方，圖形與 x 軸交點恰有一，

$\therefore f(x)=0$ 恰有一實根。



Ⅱ.1.* $\because f(1)f(2)<0$，故此實根 α 在（1，2）間。

2.* $\because f(2)>0$，$f''(2)>0$，取 $a_1=2$

由牛頓法 $a_2=a_1-\dfrac{f(a_1)}{f'(a_1)}$

$$=2-\frac{f(2)}{f'(2)}=2-\frac{10^{-5}}{10}$$

$$=1.999999$$

3.* $\because f(x)=(x-2)^3+6(x-2)^2+10(x-2)+10^{-5}$

$f(a_2)=f(1.999999)$

$$=(-10^{-6})^3+6\cdot(10^{-6})^2+10\cdot10^{-6}+10^{-5}>0$$

$f(1.99999)$

$$=(-10^{-5})^3+6\cdot(10^{-5})^2+10\cdot10^{-5}+10^{-5}<0$$

$\therefore f(1.99999)f(1.999999)<0$

$\therefore 1.99999<\alpha<1.999999$

$\therefore \alpha \fallingdotseq 1.99999\cdots$ 為所求實根近似值準確至小數點以下第五位。

【本題之探討】～微分之應用，數值方法

本題正確的反映教本深摯的意義，從微分之應用中得悉三次函數的極大、極小值同號時，圖形與 x 軸有一交點，從此確證三次方程式恰有一實根，而後憑籍牛頓法，二分逼近法解出實根的近似值使準確至小數點以下第五位的長程思考，簡易演算，充分發揮教本綜合精神，相當內行，令人敬佩！熟讀教本的考生還得提煉教本深摯意義方能解答本題，今後學習不

獨一味解題，可要貫穿教本意義，練習綜合性（在教本航向的主題下）的習題以準備升學。

【教材的回顧】

理科數學（上册）說明了微分、積分的起源、功能，讀者可以熟知。然而它的必要性卻在下册數值方法中透露出數學的價值。我們知道買憲－霍納法求實根的近似值不如牛頓法方便，泰勒展開式（導數的應用）是數值求法的利器，例如從正弦函數 $\sin x$ 在 $x=0$ 處的 n 次泰勒展開式中，可求得 $\sin 1^{\circ}$ 的近似值，並估計它的誤差……等等，給讀者的感覺是人類求取數值的精確度是如何的辛苦，而泰勒展式的功能又是如此的偉大，給與人類求知之貢獻爲人景仰。

知悉定積分的近似求法——矩形法、梯形法、拋物線法，再來認識下列例題：

"試求 $\int_0^{0.1}\frac{\ln(x+1)}{x}dx$ 正確至小數第四位"

【解】1.* 由泰勒展式知：

$$\ln(x+1)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots$$

$$\text{而}\frac{\ln(x+1)}{x}=1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+\cdots$$

2.* $\int_0^{0.1}\frac{\ln(x+1)}{x}dx$

$$=\int_0^{0.1}\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+\cdots\right)dx$$

$$=\left(x-\frac{x^2}{2.2}+\frac{x^3}{3.3}-\frac{x^4}{4.4}+\cdots\right)\Big|_0^{0.1}$$

$$\fallingdotseq 0.1-\frac{1}{2^2}\times 0.1^2+\frac{1}{3^2}\times 0.1^3$$

$$-\frac{1}{4^2}\times 0.1^4+\cdots\cdots$$

$$\fallingdotseq 0.1-0.0025+0.000111\cdots$$

$$\fallingdotseq 0.0976\cdots\cdots\text{答}$$

從此明白一般積分公式困難求解的定積分"$\int_0^{0.1}\frac{\ln(x+1)}{x}dx$"必可透過"泰勒展式"求取近似值。辛辛苦苦精研"數值方法"的讀者是不難領會作者描繪"數值方法"的本意的。

參、結　語

升學考題是根據教本命題已無疑問，本次考題雖有舊教材的名詞，但只要固守新教材的航道，把握新教材的"實用"原則，讀者即可擁有思考判斷的能力，特別是隨機因應的智能，即使面臨命題落點不平均的考題亦能從容作答。

我們讀者得覺悟：教科書不是升學參考書，會把全部有關考題解法完全收錄，讓我們"一本萬利"順利通過升學考試。研習教本若僅習作例題的相關習題，考題的模擬試題，一定迷失航向，終致無法收拾的慘局，依教本作者的心意，回味例題，習題如何補充說明數學與自然現象的關係，牢牢的抓住"數學形成的道理"再從事相關例題的演練必能在考場如意。

回顧本次考題，除了承受舊教材名詞的震憾外，多數考題並非絕招不可觸摸，反而有貼切、柔和的感覺，給我們的印象是數學考題沒有想像的恐怖。而在新教材"實用"主題下，可以拋開傳統習題的沉重包袱，安心的吸取有用的知識，給與今後的教學佈下了一條康莊的大道，讓後起的讀者享受新知的幸福，我們得珍惜它。

——本文作者任教於建國中學——