

從解題的認知活動層次和命題旨意

析評七十七年大學聯考

自然組數學科試題

楊大衛
李 瑞
王意芝

壹、前 言

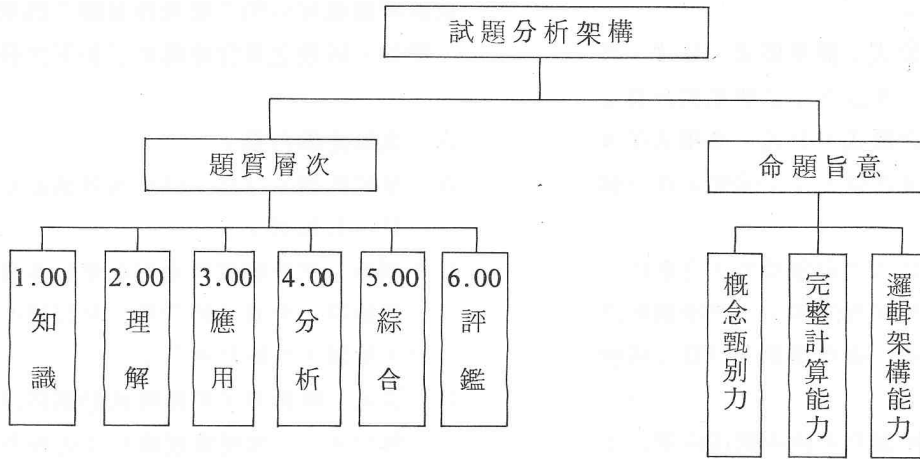
去年此時，我們曾以相同的題目，分析七十六年大學聯招自然組的數學試題，今年我們捲土重來，訴求主題仍然是希望社會各界對聯招試題的分析在方向上要能突破側重解題，以及試題內容的冊章分布狀況，另一方面在論斷試題上則要放棄主觀，建立客觀分析架構及標

準，以供來日命題之參考。一年來，我們對過去聯招數學試題作了更詳細的觀察，在架構上也作了某程度的修改，希望更能接近我們自己定位的目標——進一步發展數學試題難易度評量指標。

貳、分析架構

我們的分析著重於兩個部分，一是解題認知活動層次（以下簡稱題質層次），指解題過程中，所牽涉到的最高認知活動層次；一是命

題旨意，指試題內容要甄測那些能力。（如圖）



題質層次分析，我們借用 Bloom 氏的認知領域目標六層次分類——知識、理解、應用、分析、綜合、評鑑，這一評量架構也是師大科教中心評量學習成就所推廣使用的。（黃光雄等譯，72年6月，復文書局）。這一部份的分析可概略地看出試題的難易度。命題旨意方面，我們從數學的教育目標重點——概念理解，訓練出操作能力（演算），培養分析與組織能力（邏輯建構能力），具體地抽出「概念甄別力」、「計算能力」、及「建構能力」作為分析項目。由於大學聯考屬於總結性的鑑定測試，聯考數學試題之目標既在掄取具適當數學能力的高中畢業生進入大學深造，因此，理想的聯考命題內容應能反映所要甄測的能力，這也是我們要把命題旨意列入分析項目的原因。尤其在考試領導教學的導向之下，透過命題旨意這一部份之分析，可以測出試題所要甄測的數學能力是否有所偏頗，有無偏導數學教學正常化的傾向？

為了方便讀者了解，茲將我們分析項目簡要說明如次：

A 題質層次：分析每一題解題活動過程中所牽涉到的認知層次，共分六層次。詳細內容請參看「數學傳播季刊」第十一卷第三期，（43），76年9月，「從解題認知活動層次

和命題旨意，析評七十六年大學聯考自然組數學科試題」一文，P. 49～50。

B 命題旨意：即分析每一題要考考生那些能力？單純數學概念的理解？抑兼考考生的計算能力、邏輯分析與組織能力？理想的大學數學聯考試題，我們認為除了測試考生的數學概念甄別理解能力外，還應包括計算能力與分析建構能力。

1. 概念甄別力：指對試題所考的概念能夠甄別理解的能力。我們祇分析所考的概念內容別以及有無整合性。

① 實質概念：指解題時實際要用到那些數學概念。依現行之課程標準之“目”為給定單位。

③ 概念統整性：指所考概念，在解題時是否牽涉不同範疇概念的統整性。依其統合及整合性分為下列三類：

A：同範疇之獨立概念。

B：異範疇之獨立概念。

C：異範疇，但概念之間彼此須有交互關係。

2. 計算能力：指解題時除了甄別理解所考概念外，必須對式子有完整的計算能力。分為：

A：定義、定理概念之測驗，無實際數值計算。

B：直接代公式，簡單根式、分式、多項式在三次以下，及整數的計算。

C：較複雜之根式、分式、多項式在4次（或4次以上），未知元在三個以上。

D：非直接代入之定理及方法之應用，如棣美弗定理的應用，數學歸納之演繹證明，線性規劃之計算，堪根定理等。

E：能充分掌握及安排兩個或兩個以上D類中之方法或定理之計算順序，如牛頓法、辛普遜法等。

3. 建構能力：指解題時除了甄別理解所測概念外，尚須測試所運用邏輯方面的分析及

組織能力。在建構能力的分析方面，我們依據解題流程中的“階段性目標”為單位，對每一階段之單位建構給以如下之分類：

A：毫無建構行為。

B：單純的循序行為，但不含其他如C、D、E類者。

C：判斷：在解題建構過程中牽涉多種解題途徑，而適切的選擇，足以使往後的解題工作順利執行。

D：遮迴：解題時須能建構遮迴關係以供解題者。（如幾條直線可以切割平面為若干區域問題）

E：迴圈：在解題過程中，須反覆檢核每一過程與結論之關係者。（如Simpson法的證明）

叁、分析作業規則

分析的工作，我們採取集體合作的方式，先是討論確立分析的架構與評量標準，全部考題我們每個人都事先做過，然後再一起進行逐題討論，最後均以取得完全一致觀點作為定案。在題質層次方面，遇有解法不一致時，我們採取從易、從正常（指依新教材正常教學）為原則，但我們會附加說明有別解。解法相同，則確立解題必經的重要步驟，取得一致後，再評定各步驟所牽涉的認知活動層次，以層次最高的那一步驟，作為該題題質層次，也即題質層次的標定，我們是比較各解題重要步驟後，採取從高原則而不是加總。又一題中如分為兩小題，我們係以小題為單位分別評量。後一小題如需用到前面小題所求得的資料，則前面小題的解題步驟，也必須一併納入後一小題考慮

。此外題質層次係以前面分析架構中所標示的為準。

在命題旨意方面，概念甄別力一項，我們先把解題過程中，實際要用到的數學概念內容名稱標出，再判斷解題時需不需要用到概念之間的統整。統整性確定後只標定有無，不另給定權值。由於解法不同，所牽涉到的數學概念可能有異，因此所標示的實質概念以及概念整合性，我們是依循題質層次的解法步驟而來。「計算能力」與「建構能力」是指解題中要用到的技巧，看是否需要用到計算能力或建構能力，或者同時要兼用兩項能力。關於計算能力的標定，我們採取以每一小題為單位，按照分類中之類目一次標定。而在邏輯建構能力方面，則按流程圖中之每一階段性目標為單位依分

類類目給定，全題之建構能力則比較每一定給之“值”依從高原則標示。本次之分析僅標出每題中各種建構能力以及計算能力之有無，而對建構之含量不另給權值。

為方便分析作業，我們自行設計一試題分析表格，共分「流程與邏輯建構」、「解題步

驟」、「題質層次」、「計算能力」、「實質概念」、「統整性」六欄，把上述分析架構全部包容在內。試題逐題逐項分析後，我們另外把分析所得數據分別製成總表。後面各項數據相關圖表及討論，即是以總表的數據為基準。

以下是我們的分析與討論：

肆、解題步驟與題質層次

如果某一試題有兩種以上的可能解法時，除了依循前述規則中從易的原則之外，另外亦考慮解法的發展性而儘可能地提出比較下最正

常的思考途徑，而依照這個思想建構來提出解答。

第一部分 單一選擇題

【子】(一)設集合 G 有 6 個元素， H 有 3 個元素，則所有從 G 到 H 的函數，其總數為

- 1.(A) 729 (B) 216 (C) 120 (D) 56 (E) 20 (4分)

解題流程	解題步驟	題質層次
<pre> graph TD START([START]) --> Formula[代公式] Formula --> END([END]) </pre>	<p>① A 中第一元素至 B 中有 3 種選擇。 A 中第 2 元素至 B 中亦有 3 種選擇。</p> <p style="text-align: center;">⋮</p> <p>A 中第 6 元素至 B 中亦有 3 種選擇。</p> <p>② 利用乘法原理為 $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^6$ 選(A)。</p>	<p>① 理出函數的個數與重覆排列的關係而正確使用公式 (2 . 20)</p> <p>② 重覆排列公式 (1 . 25)</p>

(二)函數 $f : G \rightarrow H$ 稱為嵌射的意思，若 $x_1 \neq x_2$ 則 $f(x_1) \neq f(x_2)$ 。設 G 有 3 個元素， H 有 7 個元素，則所有 G 到 H 的嵌射函數，其總數為：

- 2.(A) 2187 (B) 343 (C) 210 (D) 84 (E) 35

解題流程	解法步驟	題質層次
<pre> START ↓ 理解映射 ↓ 使用公式 ↓ END </pre>	① A 中第一元素對應至 B 中有 一種選擇，第二元素則剩餘 6 種 ($\because 1 - 1$) 餘遞減其選擇。 ② 利用公式 $p(7, 3) = 7 \times 6 \times 5 = 210$ 選(C)	① 解釋題目所予訊息映射是什麼？(2.20) ② 將映射與 $p(m, n)$ 公式的關係理出(2.20)。

(三) 函數 $f: G \rightarrow H$ 稱為蓋射的意思是： H 中任一元素 y 皆可寫成 $y = f(x)$ ，而 $x \in G$ 。設 G 有 9 個元素， H 有 2 個元素，則所有從 G 到 H 的蓋射函數，其總數為
 3.(A) 510 (B) 79 (C) 70 (D) 43 (E) 34

解題流程	解法步驟	題質層次
<pre> START ↓ 解釋蓋射 ↓ 選用排容原理 ↓ 列式 ↓ 解出 ↓ END </pre>	① 所有的函數個數為 9 種，其方法可援〔子〕(一)①之概念。 ② 將不合題意之情形刪除，但須考慮是否有不應刪而刪除之情形，則要在刪除後再加回(本題無此情形) $2^9 - 2 = 510$ 。 選(A)	① 解釋題目所予訊息，何謂蓋射(2.20) ② 選用排容原理(3.20)

【丑】十二張標以 1, 2, …, 12 的卡片，任意分成兩疊，每疊各六張。

(一) 若 1, 2, 3 三張同一疊之機率為 l/m ，其中 l, m 為互質的正整數，則

4. $l =$ (A) 2 (B) 3 (C) 5 (D) 7 (E) 11 (3分)
 5. $m =$ (A) 11 (B) 12 (C) 15 (D) 35 (E) 77

解題流程	解法步驟	題質層次
<pre> START ↓ 求樣本空間樣本數 ↓ </pre>	① 12 個相異物件分為兩堆 $C_6^{12} \cdot C_6^6 \cdot \frac{1}{2!}$ ② 必取某三物入某堆，即先將此三物置入該堆中再由餘下 9 物中補	① 分堆問題，係組合公式之擴展層解釋(2.20)。 ② 理出 1, 2, 3 同堆的實質意義屬解釋(2.20)

求事件樣本點數 ↓ 代古典機率公式 ↓ END	足不三物，計 6 物一摺： C_3^9 $\textcircled{3} C_3^9 / C_6^{12} \cdot C_6^6 \cdot \frac{1}{2!} = \frac{2}{11}$	$\textcircled{3}$ 代古典機率公式 (1 . 25)
-------------------------------------	---	---

(二)若 1、2、3、4 四張中每疊各有兩張的機率為 n/m ，其中 $n、m$ 為互質的正整數，則 $n =$

6. (A) 2 (B) 3 (C) 5 (D) 7 (E) 11 (3 分)

解題流程	解法步驟	題質層次
START ↓ 求樣本空間樣本數 ↓ 求事件樣本點數 ↓ 代古典機率公式 ↓ END	<p>①同上題，樣本空間點數為</p> $C_6^{12} \cdot C_6^6 \cdot \frac{1}{2!}$ <p>②四張異號卡片任取兩張放入一疊，則剩餘兩張自然歸入另一疊，得 1、2、3、4 分為兩疊的方式為 $C_2^4 \cdot C_2^2$，餘下 8 張中取出 4 張以補足題中每疊的 6 張而將剩餘 4 張放入另一疊，故分為兩疊之分法為</p> $C_2^4 \cdot C_2^2 \cdot C_4^8 \cdot C_4^4 \cdot \frac{1}{2!}$ $\textcircled{3} \frac{C_2^4 \cdot C_2^2 \cdot \frac{1}{2!}}{C_6^{12} \cdot \frac{1}{2!}} = \frac{5}{22}$	<p>①同上題，(2 . 20)</p> <p>②事件樣本點的求法為組合公式之利用，應非新情境，故僅止於解釋(2 . 20)。</p> <p>③代公式(1 . 25)</p>

【實】設 $\frac{x^2 - 13}{(x+1)^2(x-2)} = \frac{\ell}{x+1} + \frac{m}{(x+1)^2} + \frac{n}{x-2}$ ，其中 $\ell、m、n$ 皆為常數，則

7. $\ell =$ (A) -4 (B) -2 (C) 0 (D) 2 (E) 4 (2 分)

8. $m =$ (A) -4 (B) -1 (C) 0 (D) 1 (E) 4 (2 分)

9. $n =$ (A) -2 (B) -1 (C) 0 (D) 1 (E) 2 (2 分)

解題流程	解法步驟	題質層次
<pre> START ↓ 去分母 ↓ 代值比較 ↓ END </pre>	<p>① $x^2 - 13 = \ell(x+1)(x-2) + m(x-2) + n(x+1)^2$</p> <p>令 $x = -1$ 得 $m = 4$</p> <p> $x = 2$ 得 $n = -1$</p> <p> $x = 0$ 得 $\ell = 2$</p> <p>第 7 選 (D)</p> <p>第 8 選 (E)</p> <p>第 9 選 (B)</p>	<p>① 多項式整理 (1. 25)</p> <p>② 代值未定係數屬方法知識 (1. 25)</p>

第二部分 非選擇題

一、填充題

1. 函數 $\frac{x^2 - 13}{(x+1)^2(x-2)}$, $x > 2$ 的反導函數為 (甲)。

解題流程	解法步驟	題質層次
<pre> START ↓ 代為部份分式 ↓ 積 分 ↓ END </pre>	<p>① 利用第(寅)題之結果將本題之式子直接化為部份方式：</p> $\int \frac{x^2 - 13}{(x+1)^2(x-2)} dx$ $= \int \frac{2}{x+1} dx + \int \frac{4}{(x+1)^2} dx$ $+ \int \frac{-1}{x-2} dx$ $= 2\ln(x+1) - 4(x+1)^{-1} - \ln(x-2) + C$	<p>① 理解部份分式積分法，由上題直接將結果抄下 (2. 20)。</p> <p>② 代積分公式因非直接代入；有變數雙換成分，故為 (2. 20)</p>

2. 設 $E: x+y+z=1$ 為一定平面, $A(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ 為 E 外一點。若 B 為關於 E 之鏡像, (即線段 \overline{AB} 為 E 所垂直平分), 則 B 之坐標為 (乙)。若 $L: y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}, z = 0$ 為一直線, 則 L 關於 E 之鏡像, 其方程式為 (丙)。

解題流程	解法步驟	題質層次
<p>START</p> <p>↓</p> <p>求過 A 且垂直於 E 之直線</p> <p>↓</p> <p>求 A 在 E 上垂足 Q</p> <p>↓</p> <p>求 B 點坐標</p> <p>↓</p> <p>求直線 L 與 E 之交點</p> <p>↓</p>	<p>① $x + \frac{1}{2} = y - \frac{1}{2} = z$</p> <p>化為參數式</p> $\begin{cases} x = t - \frac{1}{2} \\ y = t + \frac{1}{2} \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathbf{R}$ <p>② $(t - \frac{1}{2}) + (t + \frac{1}{2}) + t = 1$</p> <p>$\Rightarrow t = \frac{1}{3}$</p> <p>$\therefore$ 交點 $Q: (-\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \frac{1}{3})$</p> <p>③ 設 B 坐標 (a, b, c)</p> $(a, b, c) + (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0) = (-\frac{2}{6}, \frac{10}{6}, \frac{2}{3})$ <p>$\therefore (a, b, c) = (\frac{1}{6}, \frac{7}{6}, \frac{2}{3})$</p> <p>..... (乙)</p> <p>④ $\begin{cases} y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{2} \dots\dots\dots(1) \\ x + y + z = 1 \dots\dots\dots(2) \\ z = 0 \dots\dots\dots(3) \end{cases}$</p> <p>(1)、(3)代入②得 $x = \frac{9}{8}, y = -\frac{1}{8}$</p> <p>$z = 0$</p> <p>得交點 $S: (\frac{9}{8}, -\frac{1}{8}, 0)$</p>	<p>① 空間直線與平面交點, 用參數方程式 (2.20)</p> <p>② 求交點代入 (1.25)</p> <p>③ 反用中點公式為轉譯 (2.10)</p> <p>④ 聯立求解屬方法知識 (1.25)</p>

任取直線上一點 T	⑤ 令 $x = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}, z = 0$	④ 任取一點的方法知識 (1. 25)
求 T 點在 E 上之垂足	$T: (0, -\frac{1}{2}, 0)$	
求 T 關於 E 之對稱點	⑥ $y = t - \frac{1}{2}, x = t, z = t$ 代入 $x + y + z = 1 \quad t = \frac{1}{2}$	⑥ 求垂足同 (乙) 題總標為 (2. 20)
求過 S 及 $(1, \frac{1}{2}, 1)$ 之直線	得交點 $x = \frac{1}{2}, y = 0, z = \frac{1}{2}$	
END	⑦ 設對稱點坐標為 (p, q, r) 則 $(p, q, r) + (0, -\frac{1}{2}, 0) = (1, 0, 1)$ $\therefore (p, q, r) = (1, \frac{1}{2}, 1)$	⑦ 反用中點公式為轉譯為 (2. 10)
	⑧ $\frac{x-1}{\frac{1}{8}} = \frac{y-\frac{1}{2}}{-\frac{5}{8}} = \frac{z-1}{-1}$	⑧ 代入直線兩點式 (1. 25)
	$\Rightarrow \frac{x-1}{1} = \frac{y-\frac{1}{2}}{-5} = \frac{z-1}{-8}$ (丙)	⑨ 本題為對稱點求法之應用，故 (3. 20)

3. 設 A, B, C 為橢圓 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 上三點，而過 C 點之切線與過 A, B 兩切線皆垂直，若 C 點坐標為 $(\frac{9}{5}, \frac{8}{5})$ 則 A, B 兩點坐標為 (丁) 及 (戊)。

解題流程	解法步驟	題質層次
START ↓ 求過 C 之切線 ↓	① $4(\frac{9}{5})x + 9(\frac{8}{5})y = 36$ $\Rightarrow x + 2y = 5$	① 正確使用切線公式 (2. 20)

<p>求過A及過B之切線</p> <p>↓</p> <p>求A、B</p> <p>↓</p> <p>END</p>	<p>②設切線為 $y = 2x + k$, 代入原方程式</p> $40x^2 + 36kx + (9k^2 - 36) = 0$ <p style="text-align: right;">.....(1)</p> $\Delta = 0$ $(36k)^2 - 4 \cdot 40(9k^2 - 36) = 0$ $\therefore k = \pm 2\sqrt{10}$ <p>③代入(1)式得</p> $x = \mp \frac{9\sqrt{10}}{10}$ $y = \mp \frac{9\sqrt{10}}{5} \pm 2\sqrt{10}$ <p>得 $(-\frac{9\sqrt{10}}{10}, \frac{\sqrt{10}}{5}) \dots$(丁)</p> <p>或 $(\frac{9\sqrt{10}}{10}, -\frac{\sqrt{10}}{5}) \dots$(戊)</p>	<p>②用垂直觀念假設直線方程式 (2 . 10) 代入聯立求解應用判別式法 (3 . 20)</p> <p>③代回原式求切點屬方法知識 (1 . 25)</p>
---	--	---

4. 設 a, b, c 三數滿足

$$\begin{cases} a + b + c = 4 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 12 \\ a^3 + b^3 + c^3 = 28 \end{cases} \quad \text{令}$$

$f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$ 若將 $f(x)$ 表成 $x^3 + \ell x^2 + mx + n$ 則 $n =$ (己) 而方程式 $f(x) = 0$ 有一正無理根為 (庚)。

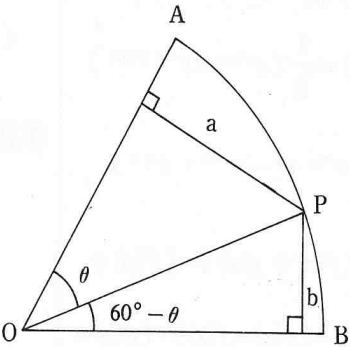
解題流程	解法步驟	題質層次
<p>START</p> <p>↓</p> <p>求 $ab + bc + ca$</p> <p>↓</p> <p>求 abc</p> <p>↓</p> <p>展開 $f(x)$</p> <p>↓</p> <p>比較係數求 n</p> <p>↓</p>	<p>① $a + b + c = 4$</p> $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca)$ <p>由已知得 $ab + bc + ca = 2$</p> <p>又 $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$</p> $= (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$ $\therefore abc = -4$ <p>② $f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$</p> $= x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x - abc$ $= x^3 - 4x^2 + 2x + 4$	<p>①由題目</p> $f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$ $= x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x - abc$ <p>知須求 $a + b + c$, $ab + bc + ca$ 及 abc , 故由已知條件及所須求的結果理出關係而選用因式分解公式屬應用 (3 . 20)</p> <p>②比較係數為方法知識 (1 . 25)</p>

<pre> 解方程式 ↓ 求無理正根 ↓ END </pre>	$n = 4 \dots\dots\dots$ 己 ③ $f(x) = x^3 - 4x^2 + 2x + 4$ $= (x - 2)(x^2 - 2x - 2)$ $f(x) = 0 \Rightarrow x = 2$ 或 $x^2 - 2x - 2 = 0$ $x = \frac{2 \pm \sqrt{12}}{2}$ 無理根有 $1 \pm \sqrt{3}$ 其中正根為 $1 + \sqrt{3} \dots\dots$ (庚)	③三次方程式降次求根，有理根檢定法之執行 (1.25) ④判別無理正根為個別事實知識 (1.12)
---------------------------------	---	--

5. 設橢圓 Γ 之方程式為 $\frac{x^2}{34} + \frac{y^2}{9} = 1$ 兩焦點為 $(-C, 0)$ 及 $(C, 0)$ ，其中 $C > 0$ 。設 D 為 P 內部而被兩正焦弦所夾之區域。將 D 繞 P 的長軸旋轉一周，而形成一酒桶狀之立體區域。由積分定義知，此一立體區域之體積 V 可以表成 $\int_{-c}^c f(x) dx$ ，則 $f(x) =$ (辛) 而 V 之值為 (壬)。

解題流程	解法步驟	題質層次
<pre> START ↓ 求 f(x) ↓ 求 C 值 ↓ 求體積 ↓ END </pre>	① $\frac{x^2}{34} + \frac{y^2}{9} = 1$ $\Rightarrow y^2 = \frac{1}{34}(306 - 9x^2)$ 又 $C = \sqrt{34 - 9} = 5$ ② $\int_{-5}^5 y^2 \pi dx =$ $\int_{-5}^5 \frac{\pi}{34} (306 - 9x^2) dx$ $\therefore f(x) = \frac{\pi}{34} (306 - 9x^2) \dots\dots$ (辛) ③ $V = \int_{-5}^5 \frac{\pi}{34} (306 - 9x^2) dx$ $= \frac{1155}{17} \pi \dots\dots\dots$ (壬)	①由旋轉體體積的求法知須求 $(f(x))^2$ 及 C 才能使公式 $\int_{-c}^c y^2 \pi dx$ 適用，屬解釋 (2.20) ②譯出 $f(x) = \frac{\pi}{34} (306 - 9x^2)$ (2.10) ③積分運算 (1.25)

二、在扇形 OAB 中 O 為圓心， $\overline{OA} = \overline{OB} = r$ 為半徑， $\angle AOB = 60^\circ$ 。若 P 為圓弧 \widehat{AB} 上一點，而 P 至 OA 的距離為 a ，至 OB 的距離為 b ，試將 r 以 a 與 b 表示之。

解題流程	解法步驟	題質層次
<pre> START ↓ 作圖 ↓ 選參數 θ ↓ 消去 θ ↓ 寫出 r、a、b 之關係式 ↓ 整理 ↓ END </pre>	 <p> 令 $\angle POA = \theta$ 則 $b = r \sin(60^\circ - \theta)$ $b = r \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta - \frac{1}{2} \sin \theta \right)$ $= r \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{r} - \frac{1}{2} \frac{a}{r} \right)$ $\therefore b = \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{r^2 - a^2} - \frac{a}{2}$ $\frac{2}{\sqrt{3}} \left(b + \frac{a}{2} \right) = \sqrt{r^2 - a^2}$ $\frac{4}{3} \left(b + \frac{a}{2} \right)^2 = r^2 - a^2$ $\frac{4}{3} b^2 + \frac{4}{3} ab + \frac{a^2}{3} + a^2 = r^2$ $\therefore r = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{a^2 + ab + b^2}$ </p>	<p>①依題意作圖為概念轉譯(2.10)</p> <p>②選擇新參數 θ 超過題目所予訊息，以次選擇為基礎之列式事實上須照顧到後來的式子，已達應用層次(3.20)</p> <p>③將 r、a、b 列式以尋求其關係。其中化簡計算之方向從頭至尾須有事先之規劃已達綜合(5.10)</p>

三、定義二函數如下： $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ ， $g(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ 試將 $f(x+y)$ 及 $g(x+y)$ 分別以 $f(x)$ 、 $g(x)$ 、 $f(y)$ 、 $g(y)$ 表示之。

解題流程	解法步驟	題質層次
<pre> START ↓ </pre>	<p>① $f(x) = \frac{1}{2} (e^x - e^{-x})$</p> <p>$g(x) = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x})$</p>	<p>①步驟之選用，已經反映出對方法整體的掌握，故此種選用已達應用層次(3.20)。</p>

<pre> graph TD A[求 e^x 及 e^-x] --> B[算 f(x+y)] B --> C[以 f(x), g(x) 表 e^x、e^-x, f(y), g(y) 表 e^y、e^-y] C --> D[算 g(x+y)] D --> E[以 f(x)、g(y) 表 e^x, e^-x, f(y)、g(y) 表 e^y, e^-y] E --> F([END]) </pre>	$\Rightarrow f(x) + g(x) = e^x$ $g(x) - f(x) = e^{-x}$ $f(x+y) = \frac{1}{2}(e^{x+y} - e^{-(x+y)})$ $= \frac{1}{2}(e^x \cdot e^y - e^{-x} \cdot e^{-y})$ $= \frac{1}{2}[(f(x) + g(x)) \cdot (f(y) + g(y)) - (g(x) - f(x)) \cdot (g(y) - f(y))]$ $= f(x)g(y) + g(x)f(y) \dots \dots \dots \text{答}$ $g(x+y) = \frac{1}{2}(e^{x+y} + e^{-(x+y)})$ $= f(x)f(y) + g(x)g(y) \dots \dots \dots \text{答}$	<p>② 以 $f(x) + g(x) = e^x$ 及 $g(x) - f(x) = e^{-x}$ 為由已知測未知為推論 (2.30)</p> <p>③ 計算則屬例行計算為 (1.25)</p>
---	--	---

四、考慮方程式 $(x-2)(x^2+2x+2) = 10^{-5}$ 。

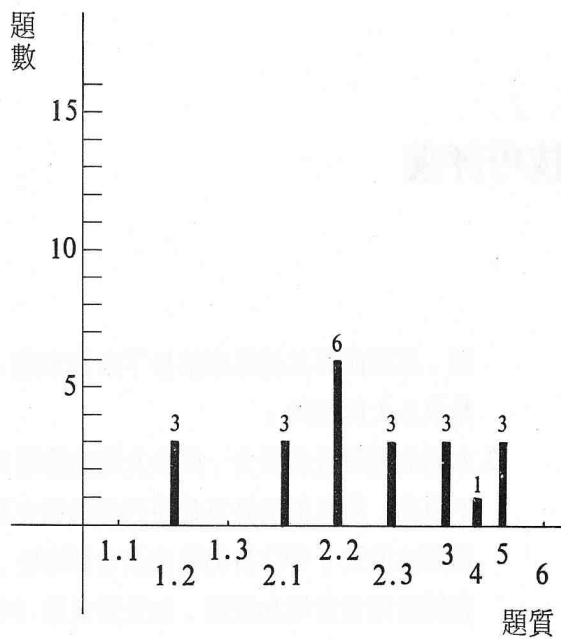
1. 試問此方程式有幾個實根，並簡單說明理由。
2. 求此方程式之任一實根至小數第五位。〔近似值與該實根到小數第五位前（含第五位）完全相同〕。

解題流程	解法步驟	題質層次
<pre> graph TD START([START]) --> A[求 f'(x)] A --> B[求臨界點] B --> C[求極值所在位置] C --> D[作略圖] </pre>	<p>1. 設</p> $\textcircled{1} f(x) = (x-2)(x^2+2x+2) + 10^{-5}$ $f'(x) = (x^2+2x+2) + (x-2)(3x+2)$ $= 3x^2 - 2$ <p>$\textcircled{2}$ 令 $f'(x) = 0 \quad \therefore x = \pm \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$</p> $\textcircled{3} f\left(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} + 2\sqrt{\frac{2}{3}}$ $= \frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} - 4 + 10^{-5}$ $< \frac{4}{3} - 4 - 10^{-5}$ < 0 $f''(x) = 6x$	<p>① 求 $f'(x)$ 為公式之計算 (1.25)</p> <p>② 極值計算方法 (1.25)</p>

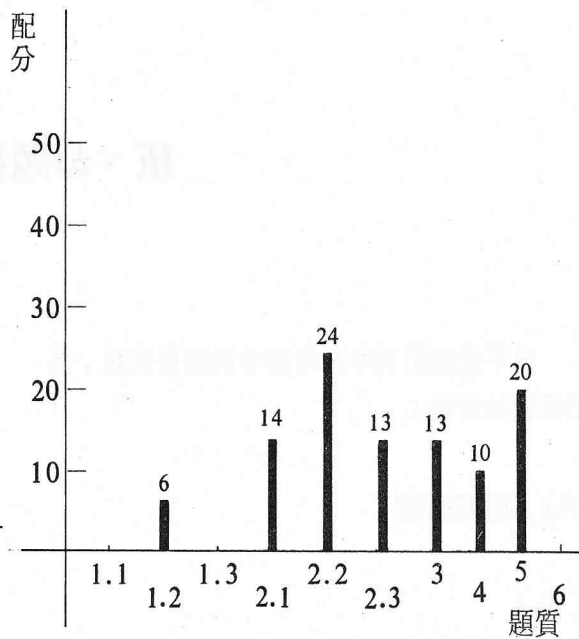
<p style="text-align: center;">↓</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 5px auto; width: 80%;">判讀圖形解題</div> <p style="text-align: center;">↓</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 5px auto; width: 80%;">求實根之近似位置</div> <p style="text-align: center;">↓</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 5px auto; width: 80%;">牛頓法求近似值</div> <p style="text-align: center;">↓</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 5px auto; width: 80%;">判別根的近似度</div> <p style="text-align: center;">↓</p> <div style="border: 1px solid black; border-radius: 15px; padding: 5px; margin: 5px auto; width: 80%;">END</div>	$f''\left(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right) = 6 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right) < 0$ <p>∴ $f\left(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$ 為極大值</p> <p>∴ 相對極大值為負。</p> <p>④ 函數略圖如下</p> <div style="text-align: center;"> </div> <p>故僅有一解……………答 1</p> <p>2.</p> <p>⑤ $f(1) < 0$ $f(2) > 0$ ∴ 根必在 1 及 2 之間</p> <p>⑥ 設初值 $a_1 = 2$</p> $a_2 = 2 - \frac{f(2)}{f'(2)} = 2 - \frac{0.00001}{10}$ $= 1.99999$ <p>⑦ ∵ $f(1.99999)$</p> $= (1.99999 - 1)(1.99999^2 + 2 \cdot 1.99999 + 2) + 0.00001 < 0$ <p>又 $f(2) > 0$ 故實根介於 2 及 1.99999 之間 ∴ 1.99999 之精確度確實已達小數點第五位</p>	<p>③ 概念變為圖形 (2.10)</p> <p>④ 以上方式全數係由考生自行建構之方法，屬提出方案解決問題 (5.20) 由應用導數則為 (3.20) 選用牛頓法為 (3.20)</p> <p>近似值檢定未經精確計算但須完整說明 (2.20)</p>
---	--	---

表一 七十七年度大學聯考自然組數學科試題分析總整理表

題 號	配分	冊 數	章 數	實 質 概 念	概念統整性	計算能力	邏輯能力	題質層次
[子] (一) 1.	4	4	1	重覆排列	A	B	B	2.10
(二) 2.	3	4	1	異物直線排列	A	B	B	2.20
(三) 3.	3	4	1	重覆排列、排容原理	A	B	C	3.20
[丑] (一) 4.	3	4	2	古典機率	A	B	B	2.20
5.	3	4	2	古典機率	A	B	B	2.20
(二) 6.	3	4	2	古典機率	A	B	B	2.30
[寅] 7.	2	1	5	分式、多項式	A	B	A	1.20
8.	2	1	5	分式、多項式	A	B	A	1.20
9.	2	1	5	分式、多項式	A	B	A	1.20
非一 1.(甲)	5	理上	4	對數、代數式積分	C	C	B	2.20
2.(乙)	5	3	1	空間平面及直線關係	B	C	C	2.20
(丙)	5	3	1	空間平面及直線關係	B	C	C	3.20
3.(丁)	5	理上	2	橢圓切線，直線垂直	B	C	C	2.30
(戊)	5	理上	2	橢圓切線，直線垂直	B	C	C	2.30
4.(己)	5	1	5	多項式恒等	A	B	C	3.20
(庚)	5	1	5	一次有理因式檢定	A	C	C	2.20
5.(辛)	5	理上	3	旋轉體的體積	B	B	B	2.10
(壬)	5	理上	5	旋轉體的體積	B	B	B	2.10
非二	10	2	3	複角三角函數	A	C	E	5.10
非三	10	2	1	指數運算	A	B	C	4.10
非四 1.	5	理上	1	高次函數圖形	B	E	E	5.20
2.	5	理下	1	牛頓法	B	E	E	5.20



圖一 題質題數雙向圖



圖二 題質配分雙向圖

表二 題質、計算雙向配分表

題質 \ 計算	A	B	C	D	E
1.1					
1.2		6			
1.3					
2.1		14			
2.2		9	15		
2.3		3	10		
3		8	5		
4		10			
5			10	10	
6					
合計		50	40	10	

伍、命題技巧評議

以下是我們對本次考題中的部份試題，提出我們的看法：

(A) 逐題評議：

【子】

實質概念為重覆排列，屬低計算、低邏輯，亦無概念統整性，本應為一穩定考生情緒的題目，但其中 2、3 兩小題中的嵌射、蓋射等詞的出現，學生是否能馬上反應出題中的解說，是很大的問題。而且以新數學教材的精神，似也應儘量避免這類“術語”，第 3 小題中簡略的使用排容原理，為較高層次的認知活動，估計其通過率可能不高。

【丑】

題質層次與前題相若，無統整性，邏輯及計算亦不高，主要甄測的是組合的推廣一分堆問題，在處理這類問題時，只要對基本概念了解，加上細心，相信不會太難。猜想，命題委員將此二題置於試卷開頭，是希望以不算太難的題目先讓考生能解出，以緩和其應考時的緊張。但由於前述的“術語問題”及此二題本身為排列組合，均為一般學生所畏懼的單元，是不是會因此而得到相反的效果，實是值得思考的。

【非一】

1. 基本在測試有理函數的積分方法，以及基本的積分公式，如果能在認知活動上看穿了使用部份分式的方式來積分，則已經沒有邏輯或計算了，我相信做過了第〔寅〕

題，應該能將其結果直接抄下來解本題，是沒多大問題的。

2. 本題的邏輯量相當大，但涉及的建構層次不頂高，須掌握的計算程序因量的擴大而範圍亦擴大，(丙)格的答案沒有標準性，在閱卷時常會增加麻煩，如果對象為 50 人以下的小型考試，這種題目尚可接受，如果將近五萬人上下的大型聯考，又得限時閱卷完畢，是否會影響評閱的正確性，也頗值得懷疑。
3. 與第 2 題的邏輯及計算相彷彿，認知活動層次也相類似。唯在計算的能力上可能須要更繁的數字計算。預料上題(第 2 題)及本題將會是鑑別度蠻高的問題。
4. 如果將考古題描述為“須有一定之解題程序，才能非常容易地解出問題，而這種解題程序又非原創性的，這種問題稱作考古題”。則無疑地本題就是一道非常典型的考古題。如果沒有見過此題，與做過類似問題的考生來說，通過的機會定有很大的差別，聯考應甄測出能思考，而非強調記憶，在命題之初實應在此方面多加注意。
5. 頗為標準的旋轉體體積概念的測試，相信只要真正了解了旋轉體體積列式的原則，本題不應為一難題，在積分的問題中本題的認知活動不高，但由於微積分在整個高中數學中屬於相當高位階的概念，在學微積分之前，則須要相當大量而且成熟的先前概念，相信真能對微積分有透澈了解的學生比例不會很高，因此相信本題的通過

率亦不會很高。這裏有一值得提出的問題，在這次的考試中，我們發現，第五冊（理上）的題目不少，是不是意味著目前應注重理科數學的課程講授？如果先前概念不夠成熟又怎麼辦？如果因為應付考試而一味地去講授解題方法，忽略了真正微積分概念的傳授，是否為整個數學教學之福，是否能契合新教材精神，都將是值得討論的議題。

【非二】

是一道相當不錯的問題，在數學解題的領域裏“表示法”是相當重要的一環，整個數學有大半的概念與表示法有關，本題是一個相當須要認知活動的題目，許多處理問題的手段都須要能前後呼應。在邏輯及計算也都要有一定的能力，才有可能通過。能解出本題的考生，相信必然有很大的機會是個高數學能力的學生。

【非三】

也是一個表示法的問題，可惜的是它也是一個常見於坊間參考書籍，或補習班講義的考古題，而且在以往的聯考試題中亦不止一次出現。這種題目的缺點就是在：見過了就很容易解出，而未曾見過則會感覺很難。如此對於概念及認知活動的測試便不太容易達到目的，是否在往後的試題中還是應儘量避免這類問題，亦即儘量避免用特別方法則易，不用則難的問題，或可扣合甄測目標。

【非四】

1.我們在解此題時，認為以圖解方式，就圖來說明僅有一實根的事實，是個較為正常的想法，但不知學生能否做到，這讓我們想到，究竟高中數學教育的目標何在？其實本題就教學而言，是個很能測出學生有否數學能力的問題，但可能由於通過率的偏低而失去鑑別力。平心而論，命題可能沒有問題，我們憂慮的是本題的通過率而

回頭要問問今後的教學是否應該把重點著重在概念的形成以及概念的統整？所謂解題應是達成目標的手段，本身絕不應作為目標的。

2.牛頓法的使用，在題目中並未提及，因此想得到以牛頓法解題的人，大概就有一大半的機會做得出本題的近似解，但在檢驗根的精確程度時，却又要能再一次用堪根的方式，並加以解釋精度達到要求，非有透澈理解，實在不太可能，短短 80 分鐘的考試時間，要能即時反應出這些方式，須要相當高的認知、邏輯，以及計算及說明能力，本題可以說是這張考卷中最難的問題。

(B) 綜合評議：

整體而言，認知層次尚屬正常，中度理解以下問題有 12 小題，佔全數的 54%，而其配分有 44 分佔 44%，就配分而言，每題平均 3.6 分，而高度理解以上問題有 10 題佔 56%，每題平均為 5.6 分，此一數據顯示在配分上較之去年有相當地改進。有概念整合以上的問題有 41%，計算能力在 C 以上者有 41%，邏輯能力在 C 級以上者 50%，與去年比較，在認知層次上較去年提高，而計算能力的要求下降，根據表二從對過去 10 年聯考試題的分析觀察，我們得到一個很有趣的可以約略預測當年聯考的高低標平均得分的方式，從表中，計算 C 級（含 C）以下且認知 2.20（含 2.20）以下的總分為高標，認知 2.20（含）且計算 B 級（含）以下總和為低標。以此方式推得本年的高標預測為 44 分，而低標總分為 29 分，衡諸實際的 43 及 28 各差一分，可說是相當地接近了，其餘我們的評議表列如下：

- 1.概念的整合性仍屬偏低，是否將題數酌量減少，而提高題目的概念整合或統合性。
- 2.屬於高度邏輯能力的考題降低，似應加重。

3. 考古題的題數分量太重，大大地減低了甄測實力的意義。
4. 再一次我們能證明，概念有整合性的問題，其邏輯建構能力的須求則越高，一分負責掄才的試題在這方面真是要多下些功夫，方才能甄選出適當的人才入學。

5. 計算數據較諸去年有簡化的趨勢，無寧是件可喜現象。

綜觀整分考卷，許多地方都有進步，但絕對的得分仍未能提高，可能出在題質層次的普遍提高，或有其他原因，很值得分析、推敲。

陸、結 語

連續兩年面對新教材實施後的聯考自然組數學試題，我們相當地憂慮過低的平均分數。深盼聯招試題在命題後又未實際交由考生作答之前，能建立一套預警式的評估系統，能預先知道此次考題將會出現如何的結果，在假設大樣本不至有何大變動的條件之下，逐題地檢視歷屆聯招考題，分析其何以通過率太高或太低，何以有好的鑑別度或不好的鑑別度，列出這些原因，交由命題委員參考，並在命題之先能作各種與題質層次有關的雙向表，如“題質—計算能力雙向表”，“題質—邏輯雙向表”，“題質—章冊雙向表”並各給以配分，然後再行命題，相信必能獲得各種項目的合理分配，不至於弄到有所偏頗，以本次考題而言，就出現了第一冊以理上題目太多的情形，而形成各冊分佈不均的現象。此次我們將 76 年度的架構作了部份修改，在概念甄別力、計算能力，及邏輯建構能力上都作了進一步的細化，這些因素最終目的是希望能夠量化，我們也知道僅

僅細化某些因素是不充分的，因素分析及多變分析的研讀刻不容緩，要建立一套客觀架構，量化是最重要的工作，也是我們在這些分析項目中要繼續努力的方向。

今後，是否能將這些分析因素層化、量化，悠關架構建立的成效，此外教材概念結構尚未進行分析亦屬緊要工作。我們希望有興趣的高明人士能參加我們的工作，或提供指導。

我們不敢說這兩次分析（76 年，77 年）的架構已毫無暇疵，之所以提出的原因，除了試著作比較客觀的分析而外，希望能獲得大家的不吝賜正。

——本文作者均為高中數學教師——