上期問題徵答

優勝名單

優良：胡豐崇

問題詳解

12201 打油問題（周雲雄提供）

1.顧客上門欲打一斤油，油行老闆一時之間找不到一斤的容器，手邊只有7斤及11斤的容器各一，請問老板能否用“倒進倒出”的辦法，最後倒出一斤油給顧客。

2.若上述兩容器的容量分別為 a ，b時，在何種條件下，上述問題仍可解。

3.既然可倒出一斤油，就可倒出任意 k 斤油。令 $C_k(a,b)$ 為倒出 k 斤油所需的（“倒進倒出”的）最低次數。試求 $C_k(a,b)$。

4.令 $S(a,b)=\sum_{k=1}^{100} C_k(a,b)$ 當 $a=10$ $b=1$時，易見 $C_{10k+j}(a,b)=k+C_j(a,b)$，故 $S(10,1)=10\sum_{j=1}^{10}C_j(a,b)+10\sum_{k=1}^{9}k=300+450=750$ 。能否找到 a，b 使得 $S(a,b)<S(10,1)$，即 a，b 容器平均來說比 10，1 容器有效。更進一步，可否找到 a_0，b_0，使得

$$S(a_0,b_0)=\min_{a,b} S(a,b)$$

〔註：可用電腦做一模擬實驗〕

解答（周雲雄提供）

1,2 可倒出一斤油的充要條件是 a，b 互質：$(a,b)=1$。因為 $(a,b)=1$ 是等值於存在自然數 m，n 使得

(1)　$ma-nb=1$

上式表示欲倒出一斤油的方法之一是:用 a 斤的容器倒進 m 次，用 b 斤的容器倒出 n 次。譬如說在問題1裡 $(7,11)=1$，用歐幾里得長除法可得。

(2)　$8\cdot 7-5\cdot 11=1$ 。

若將容器甲（7斤）注滿8次倒入容器乙（11），每次容器乙注滿時即將其倒空（共倒空5次）則在 $8+5=13$ 次運作後可在容器甲裡得到一斤油。

3.滿足(1)式的 m，n 並非唯一。因為

(3) $(m-\ell b)a+(-n+\ell a)\cdot b=1$，$\ell$ 是任意整數

(3)式也代表一個方法，它所需要的運作次數是 $|m-\ell b|+|-n+\ell a|$ 。我們需找到適當的 ℓ 使得 $|m-\ell b|+|-n+\ell a|$ 最小。以問題1為例，取 $\ell=1$ 時

$$-3\cdot 7+2\cdot 11=1$$

運作次數為 $|-3|+2=5$ 為最經濟。

對一般的 k 時，由(1)式可得

$$(mk)a-(nk)\cdot b=k$$

$$(mk-\ell b)\cdot a+(-nk+\ell a)\cdot b=k$$

，ℓ 是任意整數而且上式涵蓋了所有倒出 k 斤的辦法，所以

(4) $C_k(a,b)$

$$=\min_{\ell}(|mk-\ell b|+|-nk+\ell a|)$$

(4)式看似複雜，其實計算起來很容易。以問題 I 及 $k=20$ 爲例，由(2)得

$$160\cdot 7-100\cdot 11=20$$

由於 $11\cdot 7-7\cdot 11=0$，我們可將 160 降低，而且每次降 11：$160=14\cdot 11+6=15\cdot 11-5$，於是

$$-5\cdot 7+5\cdot 11=20,$$

$$6\cdot 7-2\cdot 11=20。$$

因爲 $6+|-2|<|-5|+5$，故應取上述第二式而得 $C_{20}(7,11)=8$。

4.很容易計算出 $S(10,1)=750$。當 a 或 b 大於 100 時，可以證明 $S(a,b)>S(10,1)$。所以我們只需考慮 $1\leq a<b\leq 100$ 的情況。不難寫一個程式去驗證

$$\min S(a,b)=670$$

且有三組解：$a=9$，$b=10$；$a=9$，$b=11$ 或 $a=10$，$b=11$。由於這是實驗結果，目前我們還不清楚當 100 變成任意一自然數 n 時，最佳解 a_0，b_0 會變成如何。實驗顯示其中似乎有規律性：

$n=100$ 時

$S(9,10)=S(9,11)=S(10,11)=670=\min$；　$S(1,10)=750$

$n=200$ 時

$S(14,15)=1890=\min$；

$S(1,10)=2500$

$n=300$ 時

$S(17,18)=3468=\min$；

$S(1,10)=5250$

$n=400$ 時

$S(19,20)=S(19,21)=S(20,21)=5340=\min$；

$S(1,10)=9000$

$n=500$ 時

$S(22,23)=7458=\min$；

$S(1,10)=13750$

$n=600$ 時

$S(24,25)=9800=\min$；

$S(1,10)=19500$

$n=700$ 時

$S(26,27)=12350=\min$；

$S(1,10)=20250$

$n=800$ 時

$S(28,29)=15092=\min$；

$S(1,10)=34000$

$n=900$ 時

$S(29,30)=S(29,31)=S(30,31)=18010=\min$；

$S(1,10)=42750$

$n=1,000$ 時

$S(31,32)=21088=\min$；

$S(1,10)=52500$