項武義先生演講一

從勾股到格式代數(上)

(From Pythagoras to Grassmann)

時間：77年6月22日　　地點：台灣大學舊數館301室

引子：幾何學（Geometry）所研討的對象就是我們日常生活所在的空間（space），我們所經歷的、所見到的範疇都是空間的一部份；地球、太陽、月亮及所有天體運行于其中的太空也是空間的一部份。由於我們生活所在的天地乃是陽光普照、高度透明的大氣層，而且我們都天生有一對明亮的眼睛，我們對於空間的形體、性質都具有豐富的直觀（intuition）和相當確切的觀察。總之，幾何學的基本知識是人類生存的必要知識；而人類又是天生的善於研討幾何學的（born a geometer！），由此可見，幾何學在人類的理性文明中自古以來總是前導的老大哥乃是有其客觀條件的必然性的。

概括地來說，幾何學也就是人類對於空間本質的認識論，空間的形體和直觀的確是十分平實近人的；但是空間的基本性質中却又蘊含着多采多姿、耐人尋味的精微至理，人類對於空間本質的探索與認識，從中國古代和古希臘文明起始，至今已經歷了二千多年鍥而不捨的研討。本章將溯本究源，擇其精要，對於這二千多年來幾何學的進化歷程作一簡明扼要的剖析。我國古代即已確認其基本重要性的勾股定理也就是古希臘幾何學中的畢氏定理（Pathagoras Theorem），十九世紀格氏（Grassmann）所創造的代數體系在本質上其實也就是勾股定理的高維推廣和定量幾何（quantitative geometry）的全盤代數化（systematic algebraization），勾股定理和格氏代數，一古一今相隔二千多年，却是起承呼應，一脈貫串着二千多年來幾何學的進化歷程，它們恰好就是幾何學自古到今的兩個光輝的里程碑。

第一節　幾何學的實驗基礎 (Experimental foundation of geometry)

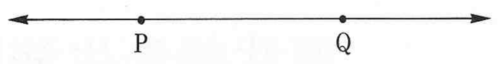
遠在二千多年前的古希臘文明，幾何學即已發展成一門高度演譯的理論體系。但是任何

一門科學都必然植根於實驗，幾何學的基礎所在也就是我們對於生活所在的空間的實踐經驗；通過對於現實空間中的各種形體的實驗觀察，比較分析，綜合總結而得關於空間的一套基本概念與基本性質，本節將對於讀者在初學幾何中業已熟知熟用的基本知識，實事求是地下一番歸本究源的功夫。但是限於篇幅，下面只簡明扼要地剖析其中幾個至精至要的基本概念與基本性質，明確它們的直觀內涵。

(一)點與直線；連結與分割

空間乃是現實世界中萬物萬象存在的地方，我們常常說萬物各得其所，由此可見，空間的最原始也是最基本的單元就是**位置**（location），而空間本質上也就是所有可能的“位置”的總體！在幾何學的研討中，我們用一個點來標記一個位置，換句話說，點也就是位置的抽象化。而空間本身也就可以抽象化地把它看做一個用以表示全宇宙所有可能的位置的點所構成的**點集**（set of points）。

再者，當我們由一個地方走到另一個地方，抽象的提法也就是一個“動點”（moving point）由某一點的位置移動到另一點的位置，其所經過的各點所組成的子集叫做它的軌跡，由此可見，空間的第二個既原始且基本的概念就要算是**通路**（path ways）。在幾何學中，我們用一條線段來表示通路，對於空間中給定的相異兩點，P、Q，連結於其間的各種可能途徑是有無窮多個的。實踐經驗和光的存在明顯地啓示着下述空間最爲基本的結構，亦即在所有連結着空間任意給定的兩點，P、Q，之間的通路之中，**唯一地存在着一條最短者**，它就是連結P、Q 點的**直線段**（straight interval）！在均勻的介質中，由P點射向Q點或由Q點射向P點的光線所經者也就是連結 P、Q 兩點的直線段。當在 Q、P 這兩端都一無阻礙的情況，上述兩向的光線還會繼續無限延伸（如下圖所示），這樣所得的兩端無限延伸的軌跡就



叫做空間中過 P、Q 點的**直線**（straight line）；而上述唯一存在性也就是幾何學中第一個基本性質：**空間中相異兩點確定一條直線**。（簡稱爲“兩點定一線”，通常也就以符號 PQ或QP表示由P、Q這相異兩點所唯一確定的那條直線。）

連結任給兩點的直線段是空間最爲基本的結構；由相異兩點所確定的直線則是空間最基本的子集。相應於上述兩者，我們可以自然地定義空間子集的**凸性**（Convexity）和**平直性**（straightness），亦即

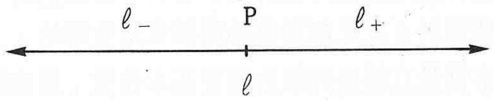
凸　性：$P、Q\in\Omega\Rightarrow\overline{PQ}\subset\Omega$，

平直性：$P、Q\in\Omega\Rightarrow PQ\subset\Omega$。

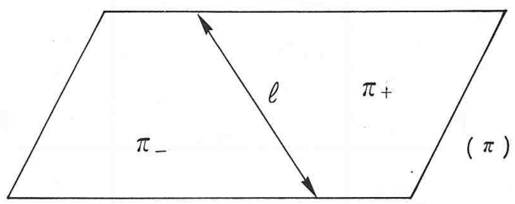
任何平直子集當然都也是凸集，但是一個凸集却不一定是平直子集。例如一條直線段就是凸集但不是一個平直子集。一條直線本身當然是一個平直子集，全空間當然也是一個平直子集。其實，在空間中除了上述兩種平直子集之外，就只有另一種介於兩者之間的平直子集，叫做平面（plane），換句話說，平面就是那種比直線要大（亦即至少含有不共線的三點）但是又不等於全空間的平直子集。總之，直線乃是含有相異兩點的極小平直子集；平面乃是含有不共線三點的極小平直子集而全空間則是唯一含有不共面四點的平直子集。

在直觀上，**分割**（separation）乃是和連結（connection）互相對立的兩種概念。由此可以想到，我們應該接着改用分割的觀點來探索空間的結構與本質。從直觀上來看，顯然有下述三種分割，即

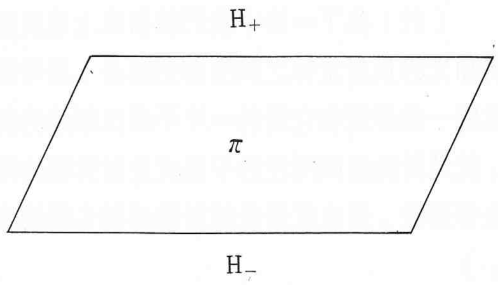
(i)一條直線 ℓ 上任給一點P把 ℓ 分割成兩段：



(ii) 一個平面 π 上任給一條直線 ℓ 把該平面分割成兩片：



(iii) 空間中的任給一個平面 π 把空間分割成兩塊：



我們可以用集合符號來表達上述三種分割並刻劃其性質如下：

(i) $\ell = \ell_- \cup \{ P \} \cup \ell_+$，

(ii) $\pi = \pi_- \cup \ell \cup \pi_+$，

(iii)（全空間）$U = H_- \cup \pi \cup H_+$，

上述三種分解中的每一個子集都是**凸集**；而且任何一條連結分居兩側的兩點的直線段則必然和分割子集相交，亦即

(i) $A \in \ell_-$，$B \in \ell_+ \Rightarrow P \in \overline{AB}$，

(ii) $A \in \pi_-$，$B \in \pi_+ \Rightarrow \overline{AB} \cap \ell \neq \phi$，

(iii) $A \in H_-$，$B \in H_+ \Rightarrow \overline{AB} \cap \pi \neq \phi$。

再者，從連結與分割的直觀來看，一條直線 ℓ 是連續不斷的（Continuous）。但是除去其中任給一點 $P \in \ell$，則直線 ℓ 就被剪斷成上述 ℓ_-，ℓ_+ 這樣兩段。由於**連續不斷性**（Continuity）的直觀內涵乃是相當深刻精微的一種，我們將在定量幾何中再詳加剖析。

(二)疊合(Congruence)與對稱(symmetry)

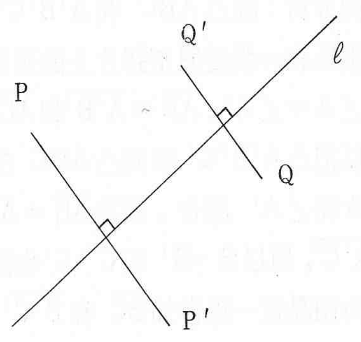
概括地說，兩個幾何形體若形狀大小完全一樣則稱之為**全等**。例如兩個用硬紙板剪成的平面形，它們是否全等的實踐檢驗法就是把一個移去和另一個對比，看一看它們是否能完全疊合。用直尺比量長度的經驗告訴我們兩個直線段互相疊合的充要條件就是它們“等長”。同樣的，兩個角區互相疊合的充要條件也就是它們等角。

因為三角形是平面形之中最簡單也是最基本的一種，所以三角形的疊合條件理當就是研究平面形的全等問題的關鍵所在。通常我們用符號$\triangle ABC$ 表示那個以 A、B、C 為其頂點的三角形。它顯然具有三個角，記為$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$，和三個邊，記為$\overline{AB}$，$\overline{BC}$，$\overline{CA}$，合稱為這個三角形的六個元素。能夠互相疊合的兩個三角形，$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$，的六個對應元素當然是逐一相等的，換句話說，三個角和三個邊都逐一對應相等乃是兩個三角形能夠互相疊合的必要條件。由此可見，值得下功夫研討的基本問題乃是那幾種角邊相等的組合業已構成三角形疊合的充要條件？為此，我們可以作下述實驗與分析：設$\triangle ABC$ 和$A'B'C'$ 分別是畫在一張紙和一張透明塑膠片上的兩個三角形。若有$\angle A = \angle A'$，$\overline{AB} = \overline{A'B'}$和$\overline{AC} = \overline{A'C'}$，則可以把$\triangle A'B'C'$ 移到$\triangle ABC$ 的上面，使得$\angle A$和$\angle A'$ 疊合。因為$\overline{AB} = \overline{A'B'}$和$\overline{AC} = \overline{A'C'}$，所以B、B′ 和C、C′也隨而疊合。再者由兩點定一線得知$\overline{BC}$ 和$\overline{B'C'}$ 當然也隨着B、B′ 和C、C′的疊合而疊合。由此可見，兩個三角形之間只要有兩邊一夾角對應相等，即足以保證它們能夠互相疊合。上述三角形的疊合充要條件簡稱之為 S A S 疊合條件，同樣的，若有$\overline{AB} = \overline{A'B'}$，$\angle A = \angle A'$和$\angle B = \angle B'$，則可以把$\triangle A'B'C'$ 移到$\triangle ABC$ 的上面使得$\overline{AB}$ 和$\overline{A'B'}$ 相疊合。（假若$\triangle ABC$

和△A′B′C′的位置分居於直線AB ＝A′B′的兩側的話，則需要先把塑膠片翻面，然後再將 $\overline{AB}$ 和 $\overline{A'B'}$ 疊合之）因爲∠A＝∠A′和∠B＝∠B′，所以直線AC 、A′C′ 和BC、B′C′ 也都對應相疊合，再由相交兩線定其交點得知C、C′必然業已疊合。由此可知，兩個三角形之間只要有兩角一夾邊（簡稱之爲ASA）對應相等，即足以保證它們能夠互相疊合。

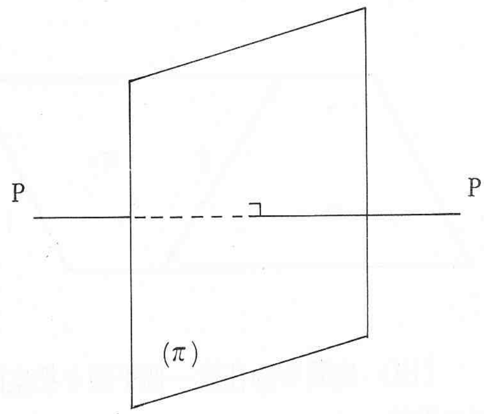
上面所討論的疊合條件其實是空間（或平面）的對稱性的一種表現。我們將在下一節中再詳細分析對稱與疊合之間的密切關聯。在這裡我們只是簡明地說明平面和空間的對稱性。

(i)平面的對稱性：設 ℓ 是平面 π 上任意給定的一條直線。若平面 π 中的兩點P、P′的連結直線段 $\overline{PP'}$ 恰好被 ℓ 所**垂直平分**（如下圖所示），則稱P、P′對於 ℓ 成**反射對稱**（reflectional symmetric）。容易看到，對於 π 中的任給一點P，都唯一地存在着它的對稱點P′（注意：當P∈ℓ時，則它也就是自己的對稱點，亦即P′＝P）；而且對於 ℓ 成反射對稱的兩個平面形是形狀大小完全一致的（亦即全等）。上述事實是平面的重要基本性質，即一個平面對於其中任給一條直線都成反射對稱，簡稱之爲平面的對稱性。



(ii)空間的對稱性：設 π 是空間中任給一個平面，若P、P′的連結直線段 $\overline{PP'}$ 恰好被 π 所垂直平分（如下圖所示），則稱P、P′對於平面 π 成反射對稱。

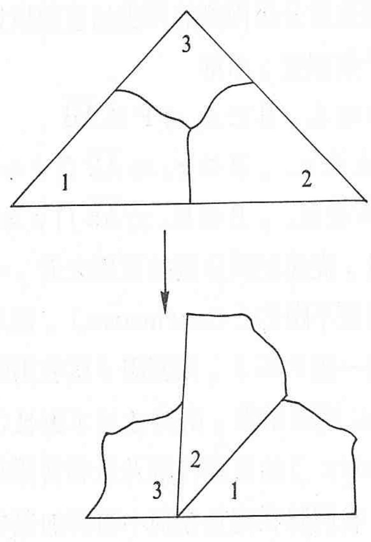
同樣的，對於空間中任給一點P，都唯一地存在着它的對稱點P′；P點和它的對稱點P′重合的充要條件也就是P∈π；而且空間中兩個對於 π 成反射對稱的形體也是全等的。上述事實是立體幾何學的重要基本性質，即空間對於其中任給一個平面都成反射對稱，簡稱之謂空間的對稱性。



〔註：在下一節中我們將指出上述反射對稱和光的反射定律之間的密切關系，屆時即可說明一個形體和它對於一片平面反射鏡的鏡像，就是對於鏡面所在的平面成反射對稱的兩個全等形體。這也就是反射對稱這個名稱的來由。〕

㈢三角形的內角和與平行(Parallelism)：

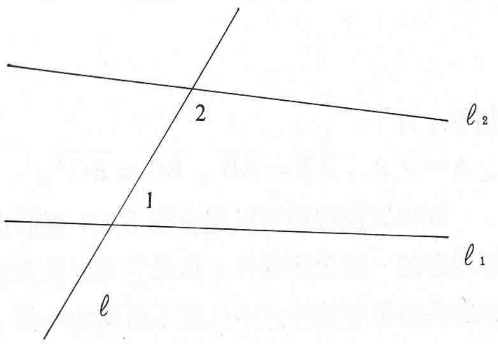
假如我們用紙片先隨意剪成好多個形狀大小各異的三角形，然後再把每一個三角形如下圖所示，用剪開併合的辦法來構造它的三個內角的和角：



這樣逐一實驗，就會發現一個令人驚喜，耐人尋味的“實驗性事實”（ experimental fact ），那就是不論三角形的形狀和大小，每一個三角形三個內角併合而成的和角總是一個平角！（誠然，做實驗是無法避免地會有誤差的；再者，能夠用測量儀器來實測的三角形，其大小也是有限度的。所以上述事實的明確理解應該是：在實驗的誤差範圍之內，任何一個三角形的三內角之和恒爲一平角。）

通常在初等幾何中，把上述實驗性事實作爲一個定理，而是以下述“平行公理”爲基礎加以證明的。在歐幾里德（ Euclid ）所著的「幾何原本（Elements)」中，他把下述命題列爲第五公設（ the fifth postulate ），這也就是大家稱之爲平行公理者。

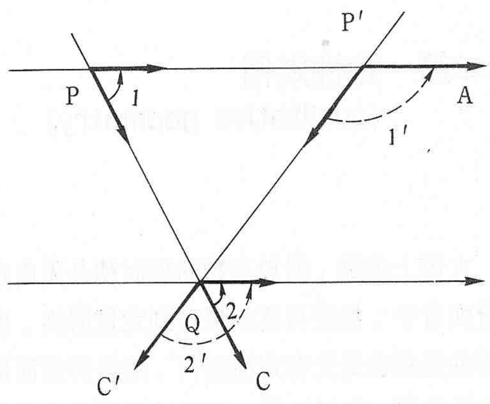
設有共面的三條直線 ℓ，ℓ_1，ℓ_2，若 ℓ 和 ℓ_1，ℓ_2 相交而且同傍內角（如下圖所示之∠1和∠2）之和小於一個平角，則 ℓ_1，ℓ_2 必然相交於 ℓ 的該側的一點。



其實，“三角形的內角和恒爲一平角“和上述“平行公理”乃是空間的兩個密切相關的“基本性質”。在本質上它們都是實驗性的，在邏輯上則是彼此等價的（ logically egui-valent ）。我們將在下一節中剖析兩者的邏輯關係。在這裡且先行分析一下它們在概念上的密切關聯。

平行（ parallel）的直觀內涵就是“等方向”；角度（ angle ）的直觀內含則是同一頂點的兩個射線（ rays）之間的方向差。再者，射線的動態描述乃是動點以定向一直走所成的軌跡。由此易見，我們自然應該把同一射線在各點所指的方向定義爲“同向”。

設PA和QB是共面的兩條射線。我們應該如何去檢驗它們是否“同向”呢？一個自然的想法是連結PQ（如下圖所示），則有 $\overrightarrow{PC}$ 和 $\overrightarrow{QC}$ 同向；而且∠1、∠2分別度量着 $\overrightarrow{PA}$、$\overrightarrow{PC}$ 和 $\overrightarrow{QB}$、$\overrightarrow{QC}$ 的方向差。由此可以想到，$\overrightarrow{PA}$ 和 $\overrightarrow{QB}$ 的同向與否可以歸於它們分別和等向的 $\overrightarrow{PC}$ 和 $\overrightarrow{QC}$ 之間的方向差，亦即∠1和∠2，是否相等來加以檢驗。換句話說，我們可以把∠1＝∠2作爲 $\overrightarrow{PA}$ 和 $\overrightarrow{QB}$ 同向的檢驗法則（亦



即定義）。誠然，上面這種“同向的定義”的確是很自然的；但是在眞正採用上述定義之前，我們還得要再小心檢查一下它是否完全合理。此話從何說起呢？例如設∠1＝∠2，採用上述定義則有 $\overrightarrow{PA}$ 和 $\overrightarrow{QB}$ 同向。再者，設P′是射線 $\overrightarrow{PA}$ 上任取一點，則 $\overrightarrow{PA}$ 和 $\overrightarrow{P'A}$ 也是同向的，所以 $\overrightarrow{P'A}$ 和 $\overrightarrow{QB}$ 當然應該也是同向的，換句話說如上圖所示的∠1′和∠2′也就應該是相

等的。上面這一小段分析說明：我們必須要能夠由$\angle 1=\angle 2$推論得$\angle 1'=\angle 2'$，則上述定義才不致於自相矛盾；才能眞正採用爲同向(亦即平行)的定義。

對上圖稍加分析，即可看到下列幾點：

$\angle 1'+\angle PP'Q=$平角

$\angle 2'=\angle 2+\angle C'OC=\angle 2+\angle P'QP$

若$\triangle PP'Q$的內角和等於平角，則有

$\angle 1'=$平角$-\angle PP'Q=\angle 1+\angle P'QP$

所以當$\angle 1=\angle 2$時即可推論$\angle 1'=\angle 1+\angle P'QP=\angle 2+\angle P'QP=\angle 2'$。反之，若有$\angle 1=\angle 2$和$\angle 1'=\angle 2'$則有

$$\begin{aligned}\text{平角}&=\angle 1'+\angle PP'Q=\angle 2'+\angle PP'Q\\&=\angle 2+\angle P'QP+\angle PP'Q\\&=\angle 1+\angle P'QP+\angle PP'Q\end{aligned}$$

亦即$\triangle PP'Q$的內角和爲一平角。

由此可見，三角形內角和恒爲一平角和上述平行的定義的合理性其實是一回事的兩種表現！

第二節　定性幾何 (qualitative geometry)

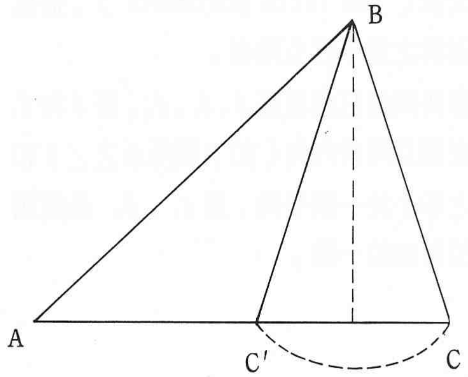
大體上來說，對於事物的研討總是先由定性層面着手，然後再逐步提升到定量層面。幾何學的進程也是先有定性幾何，然後再進而建立定量幾何。概括地說，在定性幾何中我們先對於空間事物之間的等與不等(equalities and inequalities)關係下一番研究功夫。全等形、平行(方向的等)和幾何不等式乃是定性幾何的重點所在。本節將提綱挈領地簡述其要。

(一)全等形、疊合與對稱：

三角形是平面形中的精簡和基本，所以研討全等形自然要從三角形的全等(亦即疊合)條件入手。在上一節中。我們業已認識到SAS和ASA 是三角形的兩組全等條件。現在讓我們以它們(或其中之一)爲出發點來探討並論證三角形的其他幾組全等條件。

【分析】：(i)因爲三角形的內角和恒等於一平角，所以，兩個三角形若有兩個內角對應相等，則其餘的那個內角也必然相等。由此可見，AAS 和ASA 其實是顯然相通的。再者AAA顯然是不足以構成全等條件的。

(ii)下述圖解說明SSA也是不足以構成全等條件的。因爲$\triangle ABC$和$\triangle ABC'$並不全等，但是它們却有兩邊一角(並非夾角！)對應



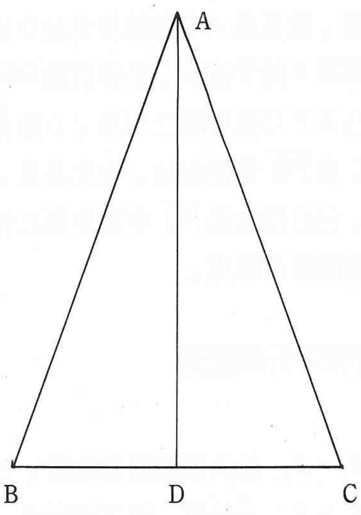
相等，即：

$\angle A=\angle A$，$\overline{AB}=\overline{AB}$，$\overline{BC}=\overline{BC'}$。

(iii)由實踐經驗可以體會到 SSS 應該也是三角形的一組全等條件。但是它可以說是三角形的各組全等條件之中比較不明顯的一種。古希臘幾何學家在研究全等形時，起始就要對它加以論證。稍加分析就可以看到論證的要點在於由三邊之相等推導出一個等角來。

(iv)一般來說，這種“等邊”和“等角”之間的相互轉換，乃是有關全等形的論證之中的要點。下述關於等腰三角形的各種特徵性質則是用來分析、論證各種幾何圖形之中的角邊的等量轉換的基本工具。等腰三角形可以說是全等形論證中貫穿全局的主角。

等腰三角形的特徵定理：



等腰三角形具有下列幾種特徵性質：(i)有兩邊相等（定義），

(ii) 有兩角相等，

(iii) 有一條角平分線垂直於對邊，

(iv) 有一條中線垂直於對邊，

(v) 有一條角平分線平分對邊。

〔等腰三角形乃是具有反射對稱性的最簡單者。如上圖所示，其對稱軸AD 則是角平分線、中線和垂線的三合一。上面所列舉的五點都各別地業已構成等腰三角形的特徵性質，換句話說，一個三角形只要滿足其一，即能推論其他四個。從平面幾何的邏輯網絡來看，等腰三角形有如一個五叉路口，給全等形的論證提供了方便的樞紐，再者，上述定理的證明中，(i)—(iv)的等價性是直截了當的（從略）；(v)的證明中要用到相似形定理的一個推論，即角平分線把對邊分成兩個線段之比等於其兩夾邊之比（如下圖所示）

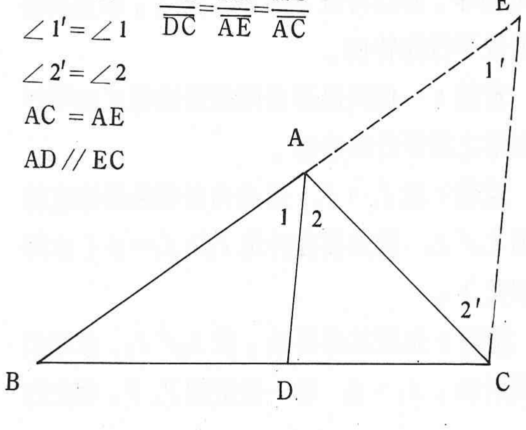
$\angle 1=\angle 2$ $\quad \dfrac{\overline{BD}}{\overline{DC}}=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AE}}=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$

$\angle 1'=\angle 1$

$\angle 2'=\angle 2$

$AC=AE$

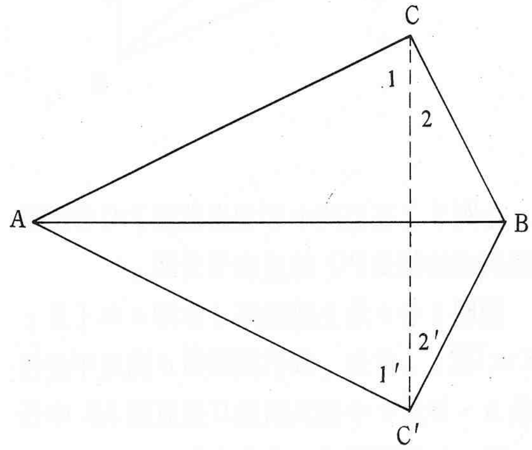
$AD // EC$

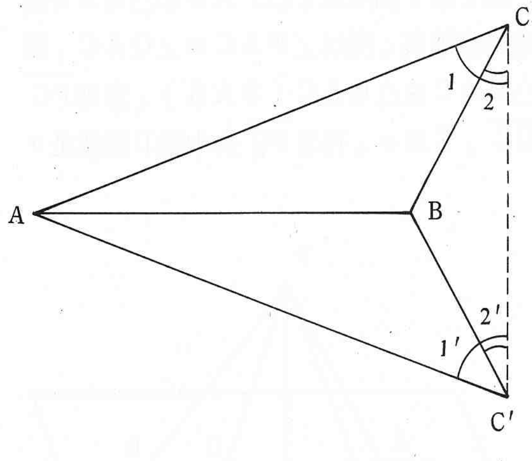


下面讓我們舉幾個重要的實例，來說明等腰三角形在全等形論證中所扮演的角色。

【例1】 S.S.S.定理：兩個三邊對應等長的三角形是全等的。

證明： 設△ABC和△A′B′C′是兩個三邊對應等長的三角形。我們可以把△A′B′C′移到如下圖所示的位置，亦即$\overline{AB}$ 和$\overline{A'B'}$也已疊合者。連結$\overline{CC'}$。由所設$\overline{AC}=\overline{AC'}$，和$\overline{BC}=\overline{BC'}$即得△ACC′和△BCC′都是等腰的。所





以它們的底角分別相等，即

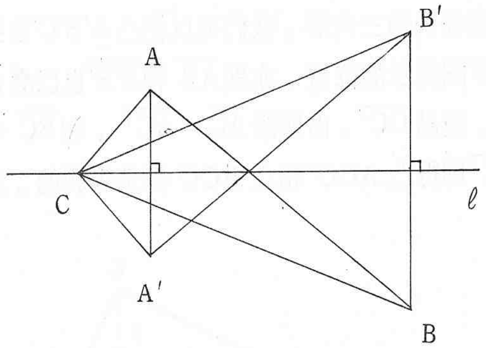
$\angle 1=\angle 1'$，$\angle 2=\angle 2'$

由此易見$\angle C=\angle C'$。再由S.A.S.即得△ABC和△ABC′是全等的。

【例2】 設A、A′和B、B′分別是平面π中對於直線ℓ成反射對稱的點。則$\overline{AB}$ 和$\overline{A'B'}$必定是等長的。

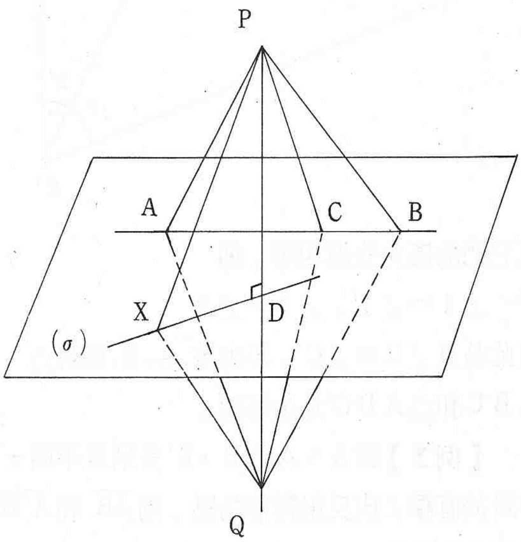
證明： 在ℓ上任取一點C，連結$\overline{AC}$,$\overline{A'C}$,$\overline{BC}$,$\overline{B'C}$。如下圖所示，△CAA′和△CBB′

都是等腰的〔具有性質(iv)〕由此易見△ABC和△A′B′C′之間有二邊一夾角對應相等所以是全等的，這也就證明了$\overline{AB}=\overline{A'B'}$。



【例3】在空間中和相異兩點P、Q等距離的點所成的集是PQ的垂直平分面。

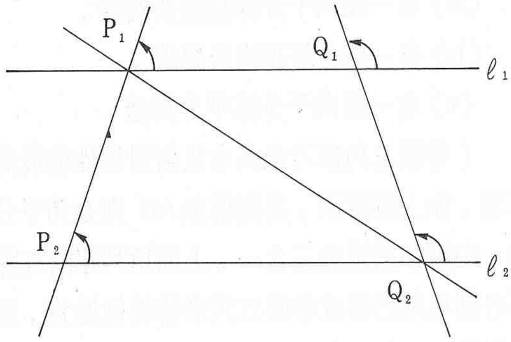
證明：令σ是上述點集，亦即$\sigma=\{X;\ \overline{PX}=\overline{QX}\}$。首先，我們要證明$\sigma$滿足平直性。設A、B是$\sigma$中相異兩點C是直線AB中任給一點。如下圖所示。△PAB和△QAB的三邊對應等長，所以∠PAC＝∠QAC，因此△PAC≅△QAC〔SAS〕，亦即$\overline{PC}=\overline{QC}$，$C\in\sigma$。再者$\overline{PQ}$的中點D顯然是$\sigma$中的一點。



設X是σ中任給相異於D的一點。由上面所證σ的平直性，整條直線$DX\subset\sigma$；而且由於△XPQ是等腰三角形，D點是底邊中點，DX和$\overline{PQ}$是垂直的。由此易見，σ是一個平面，它由所有過$\overline{PQ}$中點D而且和$\overline{PQ}$垂直的直線所組合而成。

(二)平行和平行四邊形

設ℓ_1、ℓ_2是共面的兩條直線，P_1、P_2分別是ℓ_1、ℓ_2上的點，如下圖所示，若ℓ_1、ℓ_2和截線P_1P_2所交的"同位角"相等，則不難由三角形內角和恒爲一平角去推論ℓ_1、ℓ_2



和任何其他截線Q_1Q_2所交的"同位角"也必然相等。〔參看§1.3的討論〕基於上述事實，即可合理地引進下述平行線的定義。

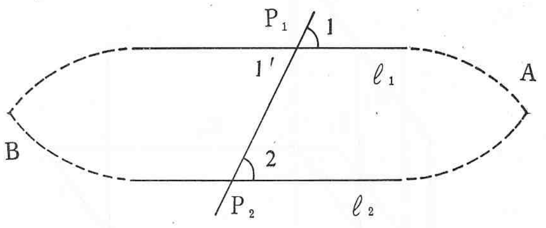
定義：相異兩線ℓ_1、ℓ_2互相平行的充要條件是它們共面而且和任一共同截線所交的同位角相等，將以符號$\ell_1/\!/\ell_2$記之。相重兩線則看做平行的特例。

定義：一個四邊形若兩組對邊都互相平行，則稱之謂平行四邊形。

定理：設ℓ_1、ℓ_2是共面的相異兩條直線，則$\ell_1/\!/\ell_2$的充要條件是$\ell_1\cap\ell_2=\phi$（亦即不相交）。

證明：先證其必要性。設$\ell_1/\!/\ell_2$，亦即如下圖所示，ℓ_1、ℓ_2和一條截線P_1P_2相交的

同位角相等。我們將用反證法來證明 ℓ_1、ℓ_2 不相交，亦即將由 $\ell_1 \cap \ell_2 \neq \phi$ 推導矛盾。設 ℓ_1、ℓ_2 相交於A點，在 ℓ_1上A點的異側取B點



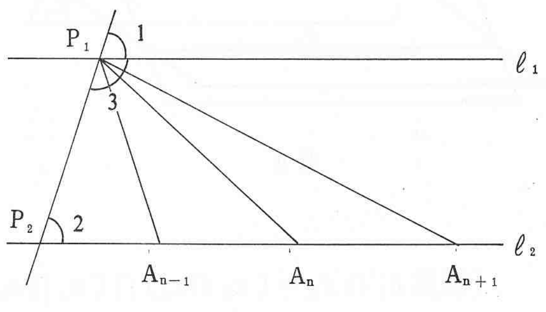
使得 $\overline{P_1B}=\overline{P_2A}$，連結 $\overline{BP_2}$，再由所設 $\angle 1'=\angle 1=\angle 2$ 即得 $\triangle AP_2P_1 \cong \triangle BP_1P_2$〔S.A.S〕。由此可見

$\angle BP_2P_1=\angle AP_1P_2$

$\angle BP_2P_1+\angle 2=\angle AP_1P_2+\angle 1=$平角

亦即B、P_2、A共在 ℓ_2 線上，因此 ℓ_1、ℓ_2 至少有A、B這樣兩個交點，這顯然是和兩點定一線相矛盾的！所以 ℓ_1、ℓ_2 是不可能相交的！

再證其充分性：設 ℓ_1、ℓ_2 共面而且不相交，$\angle 1$、$\angle 2$ 是它們和截線 P_1P_2 所交的同



位角。我們要證明它們必然相等。當然，我們不妨設 $\angle 1 \geq \angle 2$，亦即 $\angle 2+\angle 3 \leq$平角，然後再進而證明 $\angle 2+\angle 3=$平角，如上圖所示，在 ℓ_2 的同側逐步取點列 $\{A_n\}$ 使得 $\overline{A_nA_{n+1}}=\overline{P_1A_n}$。由三角形的內角和恒為一平角和等腰 $\triangle P_1A_nA_{n+1}$ 的底角相等即得

(i) $\angle P_1A_{n+1}P_2=\frac{1}{2}\angle P_1A_nP_2$

(ii) $\angle 2+\angle P_2P_1A_n=$平角$-\angle P_1A_nP_2$

再者，因為 ℓ_1 和 ℓ_2 是不相交的，所以 ℓ_1 總是位於角區 $\angle P_2P_1A$ 之外，亦即 $\angle 3>\angle P_2P_1A_n$，故有

(iii) $\angle 2+\angle 3>\angle 2+\angle P_2P_1A_n=$平角$-\angle P_1A_nP_2$。

當n無限增大時，由(i)一式易見 $\angle P_1A_nP_2$ 可以小到任意小，所以由(iii)一式即得 $\angle 2+\angle 3$ 必須$\geq$平角。這也就證明了 $\angle 2+\angle 3=$平角，亦即 $\angle 1=\angle 2$。

平行四邊形特徵定理：平行四邊形具有下列幾種特徵性質：

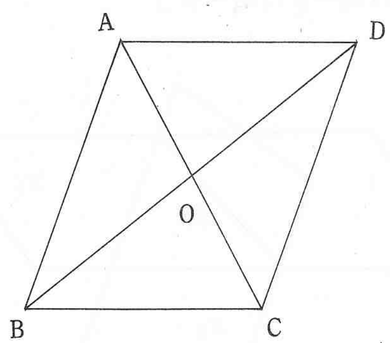
(i) 兩組對邊都互相平行(定義)

(ii) 兩組對邊各別等長，

(iii) 兩組對角各別相等，

(iv) 一組對邊平行且等長，

(v) 對角線互相平分。



〔上述定理的證明是直截了當的(從略)，平行四邊形的幾何特性在於任一對角線都把它分割成兩個全等的三角形，即 $\triangle ABC \cong \triangle CAD$；$\triangle ABD \cong \triangle CDB$；而且它是具有心對稱的最簡單的平面形，其對稱中心就是上圖所示的對角線的交點O。再者，平行四邊形是所有涉及平行的論證中的主角，上述平行四邊形的五個特徵性質，是幾何性質的邏輯網絡中的又一個五叉路口，它給平行的研討提供了方便的樞紐。等腰三角形和平行四邊形，一個是最簡單的軸對稱者，另一個則是最簡單的心對稱者，兩者各別扮演着全等和平行的研究和論證中的主角。造物之偏愛既簡單又對稱者，的確有其耐人尋味的妙處。〕

空間中兩個平面 π_1、π_2 的交截有下述三

種可能性，即相重 $\pi_1=\pi_2$，相交於一直線和不相交 $\pi_1\cap\pi_2=\phi$ 。

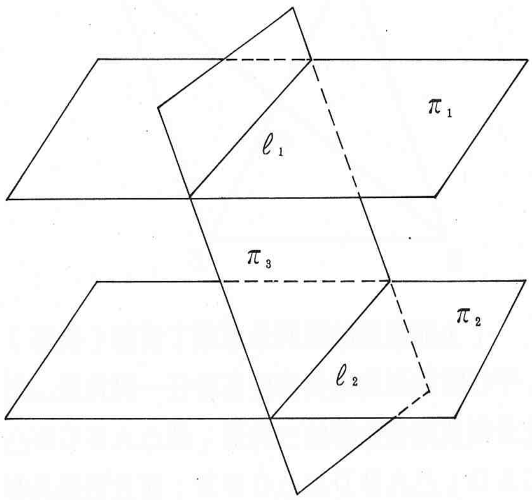
定義：當 $\pi_1=\pi_2$ 或 $\pi_1\cap\pi_2=\phi$ 時，則稱 π_1、π_2 互相平行，將以符號 $\pi_1 /\!/ \pi_2$ 記之。

同樣的，空間中的一個平面 π 和一條直線的交截也有三種可能性，即相含 $\pi\cap\ell=\ell$，相交於一點和不相交 。

定義：當 $\pi\cap\ell$ 是 ℓ 或 ϕ 的情形，則稱 π 和 ℓ 相平行，將以符號 $\pi /\!/ \ell$ 記之。

現在讓我們來看一看空間三個平面的交截情況 。

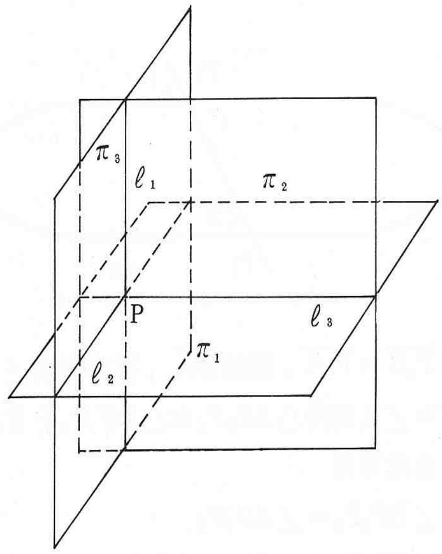
(i)設 π_1、π_2、π_3 是三個相異的平面 。若有 $\pi_1\cap\pi_2=\phi$ ，$\pi_1\cap\pi_3=\ell_1$ ，$\pi_2\cap\pi_3=\ell_2$（如下圖所示）則 $\ell_1 /\!/ \ell_2$ 。〔因爲 ℓ_1、ℓ_2 共在平面 π_3 中而且 $\ell_1\cap\ell_2=(\pi_1\cap\pi_3)\cap(\pi_2\cap\pi_3)=\pi_1\cap\pi_2\cap\pi_3=\phi\cap\pi_3=\phi$〕



(ii) 設 π_1、π_2、π_3 是三個相異平面，而且兩兩分別交於三條相異的直線，即有

$\pi_1\cap\pi_2=\ell_3$ ，$\pi_2\cap\pi_3=\ell_1$ ，$\pi_3\cap\pi_1=\ell_2$

ℓ_1 ，ℓ_2 ，ℓ_3 相異，則 ℓ_1，ℓ_2，ℓ_3 這三條截線只有下述兩種可能的交截方式，即三線共交於一點或三線互相平行，亦即如圖A的 $\ell_1\cap\ell_2=\ell_2\cap\ell_3=\ell_3\cap\ell_1=\{P\}$ 或如圖B的 $\ell_1 /\!/ \ell_2$ ，$\ell_2 /\!/ \ell_3$ ，$\ell_3 /\!/ \ell_1$：



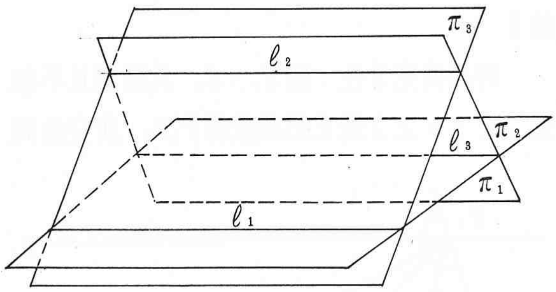


圖 B

〔因爲 $\ell_1\cap\ell_2=(\pi_2\cap\pi_3)\cap(\pi_1\cap\pi_3)=\pi_1\cap\pi_2\cap\pi_3$，同理也有 $\ell_2\cap\ell_3=\ell_3\cap\ell_1=\pi_1\cap\pi_2\cap\pi_3$ 。再者，ℓ_1 ，ℓ_2 ，ℓ_3 顯然是兩兩共面的 。由此可見，若 $\pi_1\cap\pi_2\cap\pi_3\neq\phi$ 則有 $\ell_1\cap\ell_2=\ell_2\cap\ell_3=\ell_3\cap\ell_1=\pi_1\cap\pi_2\cap\pi_3=\{P\}$ 。若 $\pi_1\cap\pi_2\cap\pi_3=\phi$ 則有 $\ell_1 /\!/ \ell_2$ ，$\ell_2 /\!/ \ell_3$ ，$\ell_3 /\!/ \ell_1$ 。〕

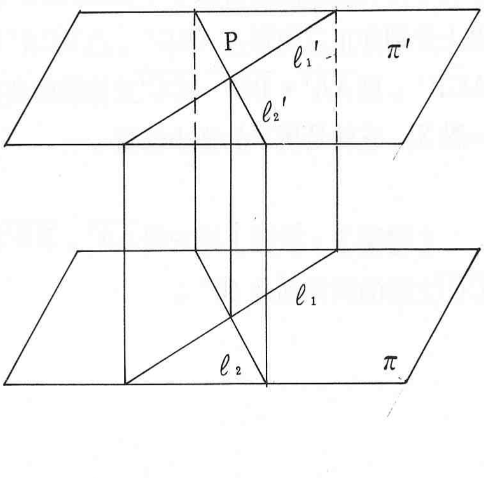
定理：(i)對於一個給定平面 π 和一個給定點P ，存在一個唯一過P點而且平行的平面 π' 。

(ii) 若 $\pi_1 /\!/ \pi_2$ 和 $\pi_2 /\!/ \pi_3$ 則有 $\pi_1 /\!/ \pi_3$（傳遞性）

(iii) 若 $\ell_1 /\!/ \ell_2$ 和 $\ell_2 /\!/ \ell_3$ 則有 $\ell_1 /\!/ \ell_3$（傳遞性）

證明：(i)若 $P\in\pi$ 則顯然 $\pi'=\pi$，所以我們只要討論 $P\notin\pi$ 的情形。先在 π 中任取二條相交的直線 ℓ_1、ℓ_2。令 π_1、π_2 分別是由 $\{\ell_1$、$P\}$ 和 $\{\ell_2$、$P\}$ 所決定的平面；ℓ_1'、ℓ_2' 分別是在 π_1、π_2 之中過P點而且分別和 ℓ_1、ℓ_2 平行的直線。如下圖所示，ℓ_1'、ℓ_2' 是相交于P點，而且有 $\ell_1'/\!/\ell_1$，$\ell_2'/\!/\ell_2$。則由 ℓ_1'，ℓ_2' 所唯一決定的平面 π' 乃是和 π 平行者，亦即 $\pi'\cap\pi=\phi$。假若不然，設 $\pi'\cap\pi=\ell'$ 則 ℓ' 至少和 ℓ_1'，ℓ_2' 中之一相交於一點A（因為 ℓ'，ℓ_1'，ℓ_2' 共在平面 π' 中，若 $\ell'\cap\ell_1'=\phi$，$\ell'\cap\ell_2'=\phi$ 則有 $\ell_1'/\!/\ell_2'$。這是和所作 $\ell_1'\cap\ell_2'=\{P\}$ 相矛盾的）設 $\ell'\cap\ell_1'=\{A\}$。則 π，π' 和 π_1 的三條截線，$\{\ell',\ \ell_1',\ \ell_1\}$，必須共交於A點，這顯然和所作 $\ell_1'/\!/\ell_1$ 相矛盾！由此可見 π' 不可能和 π 相交，亦即 $\pi'/\!/\pi$。

再者，設 π'' 是一個過P點而且和 π 平行的任一平面。則不難由平行線的唯一性看到 $\pi''\cap\pi_1=\ell_1'$，$\pi''\cap\pi_2=\ell_2'$。因此 $\pi''=\pi'$。這樣也就完全證明了過P點而且平行於 π 的平面的唯一存在性。



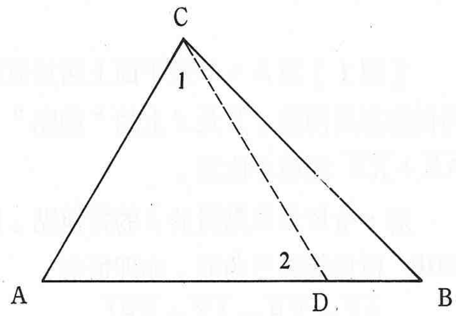
(ii) 設 $\pi_1\cap\pi_2=\phi$，$\pi_2\cap\pi_3=\phi$。若 $\pi_1\cap\pi_3\neq\phi$。令P是 $\pi_1\cap\pi_3$ 中的任取一點。則 π_1，π_3 都是過P點而且和 π_2 平行的平面，由上述唯一性即得 $\pi_1=\pi_3$。換句話說，π_1、π_3 之間的交截不是空集就是相重，亦即 $\pi_1/\!/\pi_3$。

(iii) 不妨設 ℓ_1，ℓ_2，ℓ_3 三線不共在一平面上（因為這種情形是很簡單的）。今 ℓ_1、ℓ_2 和 ℓ_2、ℓ_3 所定的平面分別為 π_3 和 π_1，在 ℓ_3 上任取一點P，令 π_2 為由 ℓ_1、P所決定的平面，$\ell_3'=\pi_1\cap\pi_2$。由前面關於三面交截的討論得知 $\ell_1/\!/\ell_2$，$\ell_2/\!/\ell_3'$，$\ell_1/\!/\ell_3'$。由此可見，ℓ_3' 和 ℓ_3 都是在 π_1 中過P點而且和 ℓ_2 平行的直線。所以 $\ell_3'=\ell_3$。這也就證明了 $\ell_3/\!/\ell_1$。

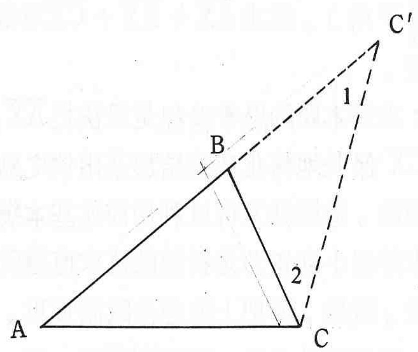
(三)幾何不等式

前面兩段所討論的全等形和平行都是幾何中的"相等"。等和不等乃是對立的兩面。本節將以幾何中的不等關係的簡明敘述作為結束。

(i)大邊對大角，大角對大邊：設△ABC的邊長之間具有不等關係 $\overline{AB}>\overline{AC}$，則它們的對角之間也有不等關係∠C>∠B，反之亦然。



證明：在 $\overline{AB}$ 上截取一段 $\overline{AD}=\overline{AC}$，連結



$\overline{DC}$。則△ACD等腰，所以其底角∠1=∠2。由此可見∠C>∠1=∠2>∠B。

(ii)三角形的兩邊之和大於第三邊： 在$\overline{AB}$的延線上截取一段$\overline{BC'}=\overline{BC}$。則△BCC'等腰所以其底角∠1=∠2。

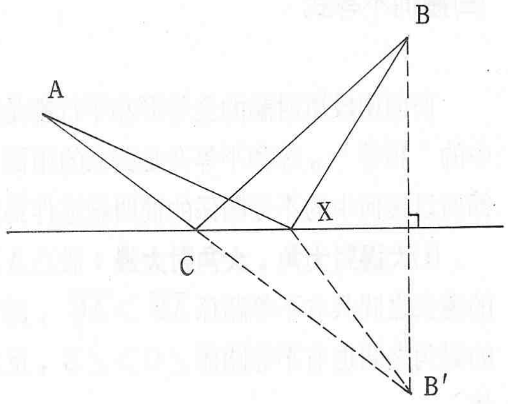
由此可見△ACC'中

∠C'=∠1=∠2<∠ACC'

所以它們的對邊之間也有大小關系

$\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC'}>\overline{AC}$。

下面讓我們舉兩個實例，初步說明上述基本幾何不等式的一些用法。



【例1】 設A、B是平面上居於直線ℓ的同側的相異兩點，X是ℓ上的"動點"。試求$\overline{AX}+\overline{XB}$的極小位置。

解： 令B'是B點對於ℓ的對稱點。則△XBB'恒爲等腰三角形，亦即恒有

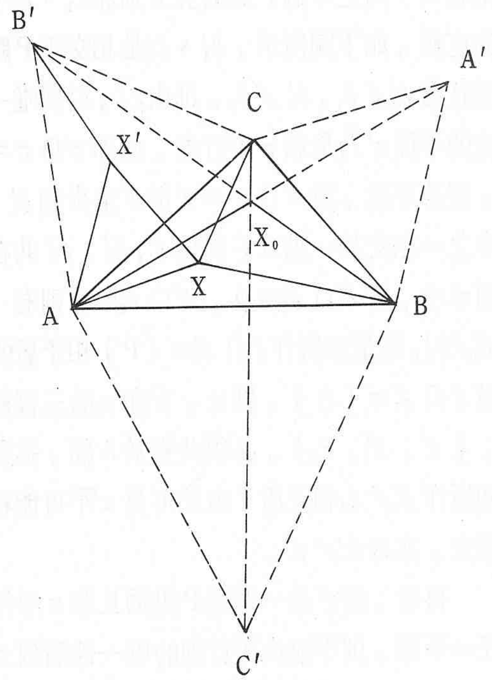
$\overline{AX}+\overline{XB}=\overline{AX}+\overline{XB'}$

由此易見當X位於$\ell\cap\overline{AB'}$=C點時，其和爲極小，總長的極小值爲$\overline{AB'}$之長度。

【例2】 設△ABC的任一內角都小於120°($\frac{2}{3}$平角)。試求$\overline{AX}+\overline{BX}+\overline{CX}$取極小值的位置。

解： 求解本題的思考過程是設法把$\overline{AX}$，$\overline{BX}$和$\overline{CX}$保長地轉化成連結於某兩個定點之間的折線段。這樣就又可以利用前述基本幾何不等式求得極小位置乃是折線段拉成直線段的特殊位置。誠然，要把上述想法賦諸實現，是得要下一番探索功夫的。如下圖所示，把△ACX旋轉60°到△AB'X'的位置，就是實現上述想法的具體做法。因爲△AXX'是一個正三角形，所以$\overline{AX}=\overline{XX'}$，$\overline{CX}=\overline{B'X'}$，亦即有

$\overline{AX}+\overline{BX}+\overline{CX}=\overline{B'X'}+\overline{X'X}+\overline{XB}$



由此可見，極小的情形是X必須在$\overline{BB'}$之上。同理，它也應該在$\overline{AA'}$和$\overline{CC'}$之上。總結上述分析，即得本題的解答如下：在△ABC的三邊上分別作正三角形△ABC'，△BCA'和△ACB'。則$\overline{AA'}$、$\overline{BB'}$、$\overline{CC'}$三條線段共交於一點X_0，它就是所求的極小位置。

【習題】：試證上述三線$\overline{AA'}$，$\overline{BB'}$和$\overline{CC'}$之間的夾角都是60°。

—本文作者任敎於美國加州大學柏克萊分校數學系—