關於"Li-Yorke混沌"的故事

李天岩

本文是李天岩教授為日本數學雜誌"數學セシナー"所寫的中文稿

在科學界，關於混沌(Chaos)現象和奇異吸引子(Strange Attractor)的研究領域裡，名氣最大的奇異吸引子大概就是所謂的Lorenz Attractor吧。在Lorenz Attractor成名的過程中，有一個關鍵性的教授Allen Feller的名字卻很少有人知道。

我在美國University of Maryland做研究生時，我Ph.D.論文的指導教授J.A.Yorke先生所屬的Institute是"Institute for Fluid Dynamics and Applied Mathematics".(現在的名稱已改成Institute for Physical Science and Technology).那個Institute所包含的領域非常之廣。比如說，Solid State Physics，Plasma Physics，Chemical Engineering，Applid Mathematics，……等等。其中有一個相當奇怪的program，叫做氣象組(Meteorology program)，A. Feller是這個program的教授。

大約在1972年時，Feller教授將E.N. Lorenz所寫關於"氣象預測"model的4篇文章交給Yorke教授。當時Feller教授覺得Lorenz的文章過於理論化、數學化。他們不感興趣。也許我們搞數學的會比較感興趣。那4篇文章都是在氣象的期刊上登的。若不是Feller教授，我們不太可能有機會接觸到它。那段時間，我們讀了那幾篇Lorenz寫的文章，覺得很有意思。

在1973年4月中的一天下午，我到Yorke教授的辦公室。當時他對我說："I have a good idea for you！"那時我在做微分方程方面的研究。我以爲他所謂的"good idea"是關於微分方程方面的高深idea。但是我卻開玩笑地說"Is your idea **good** enough for *Monthly*？"*Monthly*(編者按：指American Mathematical Monthly)是一個相當普遍的月刊。它就好像日本的"數學セシナー"一樣，是一般學生都能看得懂的淺近雜誌。它並不刊載非常高深的idea.(這種學生向老師開玩笑的事，在美國非常普遍，但是在國內好像並不多見。)Yorke教授聽了我的話之後，只是笑了一下。當時他告訴我的idea就是後來出了名的Li-Yorke定理：對於一個從R^1到R^1上的函數f，我們用$f^n(x)$來代表$f\circ f^{n-1}(x)$. 如果對一點$a\in R^1$，我們有$f^k(a)=a$而且$f^j(a)\neq a$ for $0\leq j<k$，則我們稱a是週期k的點。

定理：假設f是從實數空間R到實數空間R的連續函數。同時假設f有一個週期3的點。則

(a)對任一個正整數n，都存在一個週期n的點x_n

(b) 1.存在一個不可數的子集合S，對其

中的任何兩點 $x \neq y$ 。我們有

$$\liminf_{n \to \infty} | f^n(x) - f^n(y) | = 0$$

以及

$$\limsup_{n \to \infty} | f^n(x) - f^n(y) | > 0$$

的性質

2.對任一個週期點 $p \in R$ 以及 S 裡的點 x ，我們有

$$\limsup_{n \to \infty} | f^n(p) - f^n(x) | \neq 0$$

這個 idea 的原始出發點是在Lorenz 那些文章之中。我聽了這個 idea 之後，馬上感慨的說，“ It will be a perfect work for Monthly！” 的確是如此，因爲它根本不牽涉高深的語言，一般學生都應看得懂，不是嗎？

大約兩星期後，我就完全證明了這個定理，證明過程中所用到的只是初等微積分裡的“中値定理”，實在不是太“高深”。我們將它寫好之後,就眞的投到Monthly 去了。那時那篇文章的Reference只有Lorenz的那4篇文章。

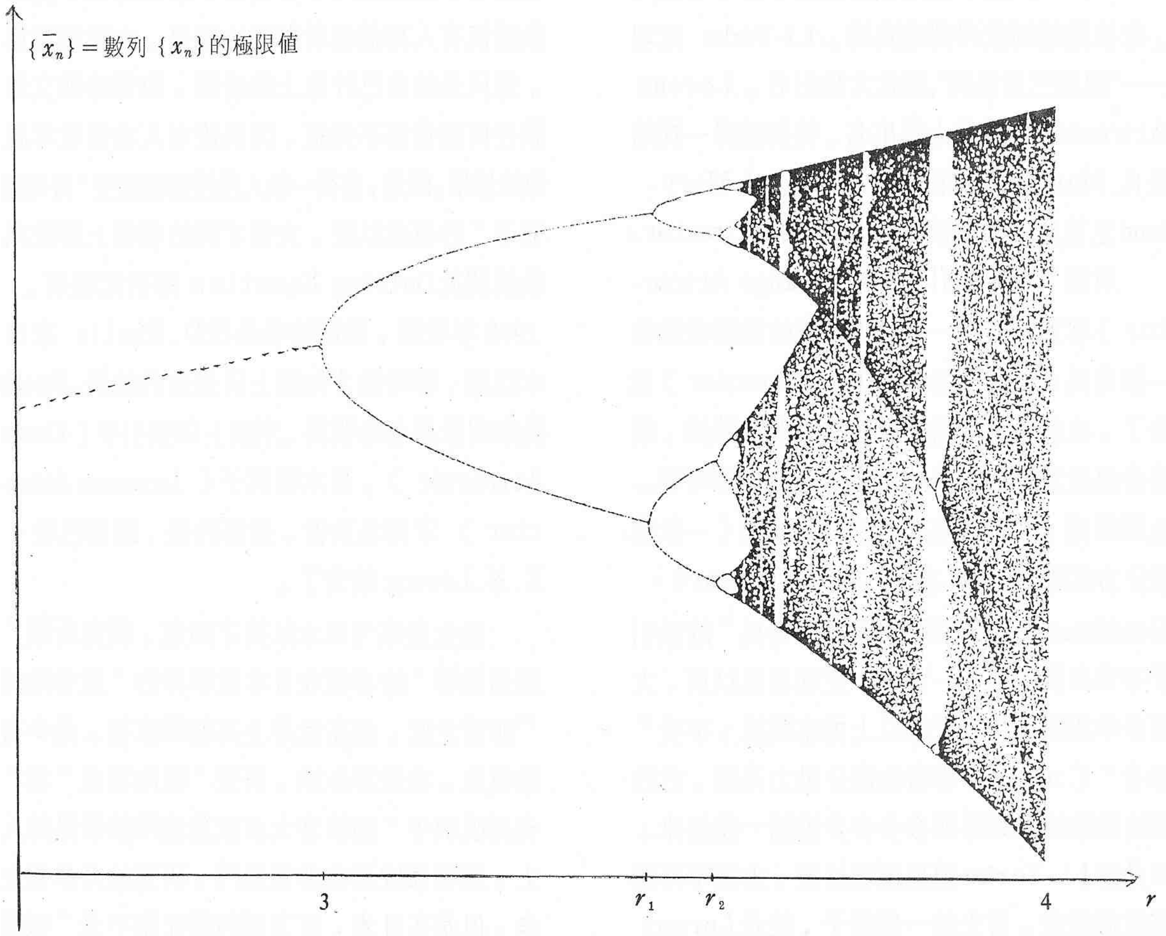
沒想到，沒過多久那篇文章就被Monthly退回。他們說，我們這篇文章過於偏向“研究性”，並不適合Monthly這個期刊的讀者。因此，他們建議我們將原稿轉寄其他的期刊。但是我們若一定要投回Monthly，他們建議我們把它改寫到一般學生都看得懂的地步。

文章退回以後，Yorke 教授還是堅持要寄回Monthly，因爲Monthly比較一般化，它的讀者群相當之大。(其實，我眞恨不得他能同意我轉寄別的期刊。)當初我們研究這個問題，以及寫這篇文章，只是着迷於它本身的趣味。這和我博士論文的內容根本無關。因此我並沒有花功夫去改它。事實上，我也不知道該怎麼改。於是乎，這篇文章就在我桌上躺了將近一年。

1974 年是University of Maryland數學系，生物數學的“特殊年”。在這一年裡，每星期都要請“生物數學”這個領域裡最傑出的學者來校演講。在5月的第一個星期，他們所請的學者是赫赫有名的Robert May 教授。他是當時普林斯頓大學生物系的教授。R.May 教授在那一星期中，每一天都給一個演講。最後一天演講的內容是函數 $f_r(x) = r\,x(1-x)$ $x \in [0,1]$，$0 < r < 4$ 的 iteration,這個函數在他們生物界的領域裡是一個非常重要的Model 。通常被稱爲“Logistic Model”。

關於這個函數的iteration,現在已是擧世皆知。但是R.May 教授當時只是述說了前面一部份較規則的動態。也就是說，當 r 較小時我們做 $x_{n+1} = r\,x_n(1-x_n)$ 這樣的 iteration，對於“隨意”取的 x_0，$\{x_n\}$ 這個數列最後都趨於一個點。但是當 r 慢慢變大，當它超過3時，$\{x_n\}$ 這個數列卻走向一對週期二的點。當 r 再變大，而超過某一個數值時，$\{x_n\}$最後走向一組週期4的點。然後，隨 r 的逐漸變大,$\{x_n\}$最後會趨近一組週期 2^m 的點。但是當 r 大於某個數值後，卻會出現一些“奇怪的現象”。比方說，對某些 r 來說 $\{x_n\}$最後走向一組週期5的點，對某些 r 來說 $\{x_n\}$最後趨近一組週期6的點。對某些 r 來說 $\{x_n\}$在兩個 interval 之間跑來跑去。尤其當 $r = 4$ 時，$\{x_n\}$ 這個數列在整個 $[0,1]$ 這個區間跑來跑去。當時,R.May 教授無法解釋這個現象。想像中也許只是計算上的誤差所造成的吧。

在微分方程的理論中,有一個著名的Poincaré-Bendixson 理論。它大概的意思是說，在 R^2 上的微分方程 $\dot{x} = f(x)$，若 f 是很光滑而能保證這個微分方程的解的“存在性”以及“惟一性”時，則從任何一點 x_0 出發的解在有限區間裡它的軌跡最後都趨近於一個週期解。這個兩度空間的理論雖然在三度以上的空間裡無法證明，但是大家多多少少都相信，即使在三度以上空間裡的微分方程，從任何初始值 x_0 出發的解，它的軌跡最後的變化還是相當“規則”的。比如說，



$x_{n+1}=rx_n(1-x_n)$ 的 iteration

解的軌道最後趨向almost periodic quasi-periodic 的解等等。若是在計算上，微分方程的解的軌道上出現非常不規則而混亂的現象，常常被認為是計算方式上的問題，或是計算上的誤差。因此而時常埋沒了些開創性的工作。（這種事，不幸在日本發生，下面會談到）。

現在再回頭來看“Logistic Model”的iteration

$$x_{n+1}=r\,x_n(1-x_n)$$

r 比較小時，數列 $\{x_n\}$ 最後趨向一組週期點，這是非常規則的變化。但是當 r 大於某一個數值時，數列 $\{x_n\}$ 出現非常不規則的變化。若是用Li-Yorke定理來解釋，這種不規則的混亂現象並不一定是計算方式的問題，或是計算上的誤差所導致的結果。事實上這些混亂現象存在於函數它自己本身的特性。

Yorke教授聽完R.May 教授的演講後，在送May 上飛機時，把在我桌上躺了將近一年的那篇關於Li-Yorke定理的文章給他看。他看了文章的結果後，大為吃驚。他認為這個定理大大的解釋了他的疑問。Yorke 教授從飛機場回來後，立刻跑來找我說：「我們應該馬上改寫這篇文章。」文章在兩星期內改寫完成，

三個月後 *Monthly* 接受我們這篇文章，它登在 1975 年 12 月份的 *Monthly* 上。

R. May 是舉世聞名的教授。那年暑假時，他被邀請到歐洲到處演講。Li-Yorke 定理——"週期三則混沌"，因此大爲出名。Lorenz Attractor 也跟着大爲出名。特別值得一提的是 R. May 教授在來 University of Maryland 之前並不知道所謂的 Lorenz Attractor。

所謂"奇異吸引子"（Strange Attractor）事實上是指一個動力系統的軌跡最後被一個奇異（混亂）的吸引子（Attractor）吸去了。也就是說，我們若追踪軌跡的路線，最後會趨近於一個混亂的狀態，毫無規則可尋。上面提過，在二度空間裡的微分方程（一般稱微分方程爲微分動力系統。）由於 Poincaré-Bendixson 理論的保證，這種"奇異"的吸引子不會出現。在 Li-Yorke 定理出現以前，大家多半相信即使在三維以上的空間裡，不受"躁音"（noise）影響的微分動力系統，它的解的軌跡的長期路徑多多少少追隨一些規律。但是當 Li-Yorke 定理出現以後，大家不再迷信這個假定。首先的一個例子，就是 Lorenz Attractor（它是三維空間裡的微分動力系統）。後來大家發現"奇異吸引子"到處都是，各個領域都有。這個混亂的現象，不是人爲計算上的錯誤或誤差所造成的。而是"神的旨意"。

我來日本以後才知道，其實在 1960 年初期，京都大學工學院電機系的教授上田晥亮先生（當時他還是研究生）就已經在研究 Duffing Equation

$$\ddot{x} + k\dot{x} + x^3 = B\cos t$$

時，發現這種混亂的現象。這個微分方程在許多數學部門的發展史上佔有相當的地位。數學家對它的研究總有七、八十年的歷史了吧。當時，上田晥亮發現，對某些參數 k，B 而言（比如說 $k = 0.05$，$B = 7.5$）這個微分方程的解，所走的軌跡當 t 很大時，它會亂七八糟的亂走一通，毫無規律可尋。這是以前從沒有發現的事。因此那時不管是數學家或是工學院的教授沒有人相信他所得到的結果。大家都認爲，這只是他自己計算上的錯誤。他當時連文章該往何處投都不知道，因爲沒有人會慎重考慮他的結果。但是，自從一般人慢慢都能接受"奇異吸引子"的概念以後，大家才開始相信上田晥亮教授關於 Duffing Equation 的研究結果。1978 年暑假，法國的名教授 D. Ruelle 來日本訪問，那時他才知道上田先生的結果。Ruelle 後來到世界各地張揚。所謂上田吸引子（Ueda Attractor），日本吸引子（Japanese Attractor）才聞名於世。遺憾的是，頭彩已被 E. N. Lorenz 搶去了。

我也是來到日本以後才知道，研究所謂"應用數學"的專家在日本數學界的"社會地位"非常之低。這在世界上其他國家裡，是少有的現象。在世界各地，研究"混沌現象"和"奇異吸引子"的學者大多數是應用數學界的人士。這個領域現在非常熱門，研究的人非常之多。但是在日本，這方面的研究都不是"數學界"的人士在做。日本數學界的人士，很少有人知道什麼是"日本吸引子"。這在我看來是非常奇怪的事。

我覺得所謂的"應用數學"，應該是首先設法了解自然界上的一些現象和問題。好比說，想想爲什麼蘋果會從樹上掉到牛頓的頭上。然後找出這些現象在數學上的正確描述，以及解決這些問題的方法。然後把這些現象的描述，以及解決這些問題的方法理論化，希望同時能解決一些類似的問題。理論化之後，若是遇到這個理論不能解決的問題，則要更進一步，設法推廣原有的理論。這比躲在象牙塔裡做些莫名其妙的抽象工作要有意思多了，我想。

——本文作者現任教於美國密西根州立大學