眞值表在證明集論等式上之應用

黃毅英

在證明集論上的等式時，一般是利用一些已知的定律加以簡化，最後得到證明的。這些定理包括：

等冪律	$A\cap A=A$，$A\cup A=A$
交換律	$A\cap B=B\cap A$， $A\cup B=B\cup A$
結合律	$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$ $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$
分配律	$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$
恒等律	$A\cap X=A$，$A\cap\phi=\phi$， $A\cup X=X$，$A\cup\phi=A$
餘集律	$X'=\phi$，$\phi'=X$，$(A')'=A$
摩根律	$(A\cap B)'=A'\cup B'$， $(A\cup B)'=A'\cap B'$ $A\subset X\Leftrightarrow A\cup B=B\Leftrightarrow A\cap B=A$
吸收律	$\therefore A\cup(A\cap B)=A=A\cap(A\cup B)$

這裏，A、B、$C\subset X$而M'表$X\setminus M$。

而這些定律則是透過符號邏輯由定義逐步推出的。不過，這種運用定律證等式的方法每每是同學們最感頭痛的。例如，證明

(1) $((A\cup B)\cap(A\cap B)')\cap((A\cap C)\cap B')'$
$=((A\cap B')'\cup(B\cap A'))\cap(A\cap C')$

(2) 若$A\subset B$，則
$((A\setminus B)\cup(B\setminus A))\setminus(A\cap C)=B\setminus A$

(3) 若$M\Delta N$表$(M\setminus N)\cup(N\setminus M)$，則
$A\Delta(B\Delta C)=(A\Delta B)\Delta C$

等，就以(3)而言，一般的證法如下。設A、B、$C\subset X$而以M'表$X\setminus M$，

$$\begin{aligned}
&A\Delta(B\Delta C)\\
&=(A\setminus(B\Delta C))\cup((B\Delta C)\setminus A) \quad (\text{定義})\\
&=(A\cap(B\Delta C)')\cup((B\Delta C)\cap A')\\
&=(A\cap((B\setminus C)\cup(C\setminus B))')\\
&\quad\cup(((B\setminus C)\cup(C\setminus B)\cap A') \quad (\text{定義})\\
&=(A\cap((B\cap C')\cup(C\cap B'))')\\
&\quad\cup(((B\cap C')\cup(C\cap B'))\cap A')
\end{aligned}$$

$= (A\cap(B'\cup C)\cap(C'\cup B))$

$\cup(((B\cap C')\cup(C\cap B'))A')$ (摩根律)

$= (A\cap B\cap B')\cup(A\cap B\cap C)$

$\cup(A\cap B'\cap C')\cup(A\cap C\cap C')$

$\cup(A'\cap B\cap C')\cup(A'\cap B'\cap C)$(分配律)

$= (A\cap B\cap C)\cup(A\cap B'\cap C')$

$\cup(A'\cap B\cap C')\cup(A'\cap B'\cap C)$(餘集律)

這便將左邊化成「CNF」(Canonical Normal Form ── 正交形成)。同理,

$(A\Delta B)\Delta C$

$= ((A\Delta B)\setminus C)\cup(C\setminus(A\Delta B))$ (定義)

$= ((A\Delta B)\cap C')\cup(C\cap(A\Delta B)')$

$= (((A\setminus B)\cup(B\setminus A))\cap C')$

$\cup(C\cap((A\setminus B)\cup(B\setminus A))')$ (定義)

$= (((A\cap B')\cup(B\cap A'))\cap C')$

$\cup(C\cap((A\cap B')\cup(B\cap A))')$

$= (((A\cap B')\cup(B\cap A'))\cap C')$

$\cup(C\cap(A'\cup B)\cap(B'\cup A))$ (摩根律)

$= (A\cap B'\cap C')\cup(A'\cap B\cap C')$

$\cup(A\cap A'\cap C)\cup(A\cap B\cap C)$

$\cup(A'\cap B'\cap C)\cup(B\cap B'\cap C)$ (分配律)

$= (A\cap B\cap C)\cup(A\cap B'\cap C')$

$\cup(A'\cap B\cap C')\cup(A'\cap B'\cap C)$(餘集律)

故此,左右邊相等。

當然,另一種證明方法是利用維恩圖(Venn diagram)。不過,一般認為,維恩圖證法不夠嚴緊,且當集合數量較多時,繪畫上會出現困難。可是,維恩圖的精神,是將各集分解成區域(region)去考慮。眞值表與之便有異曲同功之妙了。

受到這個啓發,我們可利用眞值表去證明任何集合上複雜的等式。以(1)為例,要證左右相等,即要證

$x\in$左邊$\Leftrightarrow x\in$右邊

若以 p, q, r 分別表「$x\in A$」、「$x\in B$」、「$x\in C$」, $x\in$左邊等價於

$((p\vee q)\wedge\sim(p\wedge q))\wedge\sim((p\wedge r)\wedge\sim q)$

而 $x\in$右邊等價於

$((p\wedge\sim q)\vee(q\wedge\sim p))\wedge\sim(p\wedge r)$

由兩者之眞值表,即可證得兩命題等價:

$p\ q\ r$	$((p\vee q)\wedge\sim(p\wedge q)$ $\wedge\sim((p\wedge r)\wedge\sim q)$	$((p\wedge\sim q)\vee(q\wedge\sim p))$ $\wedge\sim(p\wedge r)$
T T T	F	F
T T F	F	F
T F T	F	F
T F F	T	T
F T T	T	T
F T F	T	T
F F T	F	F
F F F	F	F

這種技巧,對如(2)之條件性等式依舊適用。先用 $M\setminus N=M\cap N'$ 將左右邊簡化如

$((A\cap B')\cup(B\cap A'))$

$\cap(A\cap C)'=B\cap A'$

再以上述的 p, q, r 作出眞值表。由於 $A\subset B$,故應將第三、四行删去,即得兩邊等價而證畢。

$p\ q\ r$	$((p\wedge\sim q)\vee(q\wedge\sim p))$ $\wedge\sim(p\wedge r)$	$q\wedge\sim p$
T T T	F	F
T T F	F	F
T F T	—	—
T F F	—	—
F T T	T	T
F T F	T	T
F F T	F	F
F F F	F	F

此法不只可用作證明等式,亦可以之簡化式子。如,簡化

$(C\setminus(A\cup(C\setminus B)))\cup(A\cap B\cap C)$。

即

$(C\cap(A\cup(C\cap B'))')\cup(A\cap B\cap C)$。

又作出眞值表。由於第一及第五行分別相對於 $p\wedge q\wedge r$ 及 $\sim p\wedge q\wedge r$,故原式等於

$(A\cap B\cap C)\cup(A'\cap B\cap C)$ (CNF)
$=(A\cup A')\cap B\cap C$ (分配律)
$=B\cap C$ (餘集律)

p	q	r	$(r\wedge\sim(p\vee(r\wedge\sim q)))\vee(p\wedge q\wedge r)$
T	T	T	T
T	T	F	F
T	F	T	F
T	F	F	F
F	T	T	T
F	T	F	F
F	F	T	F
F	F	F	F

對於(3)，我們當然可以先利用$M\Delta N=(M\cap N')\cup(M'\cap N)$加以簡化，然後作眞值表。一個簡單快捷的方法是先以眞值表定義命題運算＊，以配合集合的Δ，如下：

s	t	$s*t$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

再作$(p*q)*r$及$p*(q*r)$之眞值表作比較。

p	q	r	$(p*q)*r$		$p*(q*r)$	
T	T	T	F	T	T	F
T	T	F	F	F	F	T
T	F	T	T	F	F	T
T	F	F	T	T	T	F
F	T	T	T	F	F	F
F	T	F	T	T	T	T
F	F	T	F	T	T	T
F	F	F	F	F	F	F
步驟			1	2	2	1

故有$(A\Delta B)\Delta C=A\Delta(B\Delta C)$。今再舉一例。對於$A\subset X$，以$\chi_A$表其特徵函數：

$$\chi_A(x)=\begin{cases}0, & x\notin A\\ 1, & x\in A\end{cases}$$

定義$\chi_H*\chi_K$爲$\chi_H*\chi_K(x)=\chi_H(x)+\chi_K(x)-2\chi_H(x)\chi_K(x)$，求證$\chi_H*\chi_K=\chi_A$，其中$A$爲$X$中某子集。

將H，K分成四份考慮：

$x\in H$	$x\in K$	$\chi_H(x)*\chi_K(x)$
T	T	$=1+1-2=0$
T	F	$=1+0-0=1$
F	T	$=1+0-0=1$
F	F	$=0+0-0=0$

故$\chi_H(x)*\chi_K(x)=\chi_{H\Delta K}$。

參考文獻

1. 黃毅英《集合論之練習》(*Exercises in the Language of Sets*)宏豐出版社，1981香港。
2. 黃毅英《作爲語言之集合論》(*Set Theory as a Language*)，香港數理教育學會會刊，1980香港。
3. 黃毅英《眞值表的更多一些應用》(*Sorne More Applications of the Truth Table*)，數學通報，1985香港。

—本文作者任職於香港數理教育學會—