以複數爲座標的解析幾何淺論(Ⅳ)

—— 第四章　一些應用 ——

許振榮　呂素齡

§4・1　對於一般角 θ 的Simson線

定理4.1：設P爲 $\Delta A_1A_2A_3$ 之外接圓上任一點。從點 P 依次作與 $\Delta A_1A_2A_3$ 之各邊 A_2A_3、A_3A_1、A_1A_2 成角 θ 之三直線，它們與邊 A_2A_3、A_3A_1、A_1A_2 之交點分列爲 B_1、B_2、B_3，則 B_1、B_2、B_3 三點爲共線。

此直線稱爲 $\Delta A_1A_2A_3$ 之外接圓上的點 P 關於 $\Delta A_1A_2A_3$ 對於角 θ 的Simson線（Wallace線）。$\theta=\dfrac{\pi}{2}$ 時我們得到通常的Simson線。

證明：不妨假設 $\Delta A_1A_2A_3$ 之外接圓爲單位圓。又設點 A_1、A_2、A_3 之座標依次爲 t_1、t_2、t_3；點 P 之座標爲 t。已知：直線 A_1A_2 之方程式爲

$$(4.1)\qquad z+t_1t_2\bar{z}=t_1+t_2\text{ 。}$$

經過點 P，與此直線 A_1A_2 成角 θ 的直線方程式爲

$$(4.2)\qquad z+t_1t_2e^{2i\theta}\bar{z}=t+\frac{t_1t_2}{t}e^{2i\theta}$$

(4.1)式乘 $e^{2i\theta}$ 可得

$$(4.1')\qquad e^{2i\theta}z+t_1t_2e^{2i\theta}=(s_1-t_3)e^{2i\theta}$$

把二方程式(4.2)，(4.1')邊邊相減可得

$$(4.3)\qquad (1-e^{2i\theta})z=t-s_1e^{2i\theta}+\left(t_3+\frac{s_3}{tt_3}\right)e^{2i\theta}\text{ 。}$$

因此，

$$(1-e^{-2i\theta})\bar{z}=\frac{1}{t}-\frac{s_2}{s_3}e^{-2i\theta}+\left(\frac{1}{t_3}+\frac{tt_3}{s_3}\right)e^{-2i\theta},$$

即

$$(e^{2i\theta}-1)\bar{z}=\frac{1}{t}e^{2i\theta}-\frac{s_2}{s_3}+\left(\frac{1}{t_3}+\frac{tt_3}{s_3}\right)\text{ 。}$$

故得

$$(4.4)\qquad -s_3e^{2i\theta}(1-e^{2i\theta})\bar{z}=\frac{s_3}{t}e^{4i\theta}-s_2e^{2i\theta}+\left(tt_3+\frac{s_3}{t_3}\right)e^{2i\theta}$$

另一方面，由(4.3)可得

$$(4.5)\qquad t(1-e^{2i\theta})z=t^2-s_1e^{2i\theta}t$$

$$+(tt_3+\frac{s_3}{t_3})e^{2i\theta}$$

從(4.5)式減去(4.4)式 可得

$$t(1-e^{2i\theta})z+s_3e^{2i\theta}(1-e^{2i\theta})\bar{z}$$

$$=t^2-s_1e^{2i\theta}t+s_2e^{2i\theta}-\frac{s_3}{t}e^{4i\theta}。$$

故得

$$(4.6)\qquad z+s_3e^{2i\theta}\bar{z}=\frac{1}{t(1-e^{2i\theta})}[t^3-s_1e^{2i\theta}t^2+s_2e^{2i\theta}t-s_3e^{4i\theta}]。$$

因爲點 B_1 滿足(4.2)、(4.1)故 B 滿足(4.6)。即點 B_1 在直線(4.6)上。

因爲(4.6)式關於 t_1、t_2、t_3 成對稱，故得知：B_1、B_2、B_3 三點均在此直線上。即 B_1、B_2、B_3 爲共線，而此直線爲 $\Delta A_1A_2A_3$ 之外接圓上的點 P 關於 $\Delta A_1A_2A_3$ 對於角 θ 的 Simson 線。

如果 $\theta=\frac{\pi}{2}$，則上列方程式(4.6)可寫成下列形狀：

$$(4.7)\qquad tz-s_3\bar{z}=\frac{1}{2t}[t^3+s_1t^2-s_2t-s_3]。$$

此方程式表示 P 關於 $\Delta A_1A_2A_3$ 之通常的 Simson 線。

當 $\varphi=\pi-\theta$ 時，由(4.6)可得

$$tz+s_3e^{2i\varphi}\bar{z}=\frac{1}{t(1-e^{2i\varphi})}[t^3-s_1e^{2i\varphi}t^2+s_2e^{2i\varphi}t-s_3e^{4i\varphi}]。$$

因爲

$$e^{2i\varphi}=e^{i(2\pi-2\theta)}=e^{2\pi i}e^{-2i\theta}=e^{-2i\theta},$$

且

$$e^{4i\varphi}=e^{4\pi i}e^{-4i\theta}=e^{-4i\theta},$$

此方程式亦可寫成下列形狀：

$$(4.8)\qquad tz+s_3e^{-2i\theta}\bar{z}=\frac{1}{t(1-e^{-2i\theta})}[t^3-s_1e^{-2i\theta}t^2+s_2e^{-2i\theta}t-s_3e^{-4i\theta}]$$

§4·2 對於一般角 θ，Langley 意義的Simson線

定理4.2：設五點 A_1、A_2、A_3、A_4 及 P 在一圓周上。經過點 P 作一與點 P 關於 $\Delta A_1A_2A_2$ 對於角 θ 之 Simson 線成角 θ 的直線，並使其交點爲點 C_4；其次經過點 P 作一與點 P 關於 $\Delta A_1A_2A_4$ 對於角 θ 之 Simson 線成角 θ 之直線，並使其交點爲點 C_3；經過 P 作一與點 P 關於 $\Delta A_1A_3A_4$ 對於角 θ 之 Simson 線成角 θ 之直線，並使其交點爲點 C_2；最後，經過 P 作一與點 P 關於 $\Delta A_2A_3A_4$ 對於角 θ 之 Simson 線成角 θ 之直線，使其交點爲點 C_1，則四點 C_1、C_2、C_3、C_4 爲共線。此直線稱爲點 P 關於四點 A_1、A_2、A_3、A_4，對於角 θ Langley 意義的 Simson 線。

對於一圓周上的六點 A_1、A_2、A_3、A_4、A_5 和點 P，我們可定義點 P 關於五點 A_1，……，A_5，之對於角 θ Langley意義的Simson 線等等，而可如此無限地繼續下去。

證明：不妨假設所考慮的圓爲單位圓。又設點 A_1、A_2、A_3、A_4 之座標依次爲 t_1、t_2、t_3、t_4，P 之座標爲 t。點 P 關於 $\Delta A_1A_2A_3$ 對於角 θ 之 Simson 線之方程式爲

$$(4.6)\qquad tz+s_3e^{2i\theta}\bar{z}=\frac{1}{t(1-e^{2i\theta})}[t^3-s_1e^{2i\theta}t^2+s_2e^{2i\theta}t-s_3e^{4i\theta}]。$$

經過 P 與此直線成角 θ 之直線之方程式爲

$$tz+s_3e^{4i\theta}\bar{z}=t^2+\frac{s_3}{t}e^{4i\theta}$$

此式可寫成下列形狀：

$$te^{-2i\theta}z+s_3e^{2i\theta}\bar{z}=t^2e^{-2i\theta}+\frac{s_3}{t}e^{2i\theta}$$

此二直線之交點 C_4 滿足下式：

$$t(1-e^{-2i\theta})z=\frac{1}{t(1-e^{2i\theta})}\{t^3(2-e^{-2i\theta})-s_1e^{2i\theta}t^2+s_2e^{2i\theta}t-s_3e^{2i\theta}\}。$$

今設

$$\sigma_1=t_1+t_2+t_3+t_4\ ,$$
$$\sigma_2=t_1t_2+t_1t_3+t_1t_4+t_2t_3+t_2t_4+t_3t_4$$
$$\sigma_3=t_1t_2t_3+t_1t_2t_4+t_1t_3t_4+t_2t_3t_4\ ,$$
$$\sigma_4=t_1t_2t_3t_4\ ,$$

則 $\sigma_1=s_1+t_4$ ，$\sigma_2=s_2+s_1t_4$ ，$\sigma_4=s_3t_4$。

此時從上式可得

$$(4.9)\quad t(1-e^{-2i\theta})z=\frac{1}{t(1-e^{2i\theta})}\{t^3(2-e^{-2i\theta})-\sigma_1e^{2i\theta}t^2+\sigma_2e^{2i\theta}t+t_4e^{2i\theta}t^2-t_4\sigma_1e^{2i\theta}t+t_4^2e^{2i\theta}t-\frac{\sigma_4}{t_4}e^{2i\theta}\}。$$

由此式可得

$$(1-e^{2i\theta})\bar{z}=\frac{t^2}{(1-e^{-2i\theta})}\{\frac{1}{t^3}(2-e^{2i\theta})-\frac{\sigma_3}{\sigma_4}e^{-2i\theta}\frac{1}{t^2}+\frac{\sigma_2}{\sigma_4}e^{-2i\theta}\frac{1}{t}+\frac{1}{t_4}e^{-2i\theta}\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t_4}\frac{\sigma_3}{\sigma_4}e^{-2i\theta}\frac{1}{t}\ \frac{1}{t_4^2}e^{-2i\theta}\frac{1}{t}-\frac{t_4}{\sigma_4}e^{-2i\theta}\}$$

故

$$\sigma_4(1-e^{2i\theta})\bar{z}=\frac{1}{(1-e^{2i\theta})}\{-\frac{\sigma_4}{t}(2-e^{2i\theta})e^{2i\theta}+\sigma_3-\sigma_2t-\frac{\sigma_4}{t_4}+\frac{\sigma_3}{t_4}t-\frac{\sigma_4}{t_4^2}t+t^2t_4\}。$$

即

$$(4.10)\quad \sigma_4e^{2i\theta}\bar{z}=\frac{1}{t(1-e^{2i\theta})^2}\{-\sigma_4(2-e^{2i\theta})e^{6i\theta}+\sigma_3te^{4i\theta}-\sigma_2t^2e^{4i\theta}+(-\frac{\sigma_4}{t_4}t+\frac{\sigma_3}{t_4}t^2-\frac{\sigma_4}{t_4^2}t^2+t_4t^3)e^{4i\theta}\}。$$

另一方面，由(4.9)可得

$$t^2\frac{e^{2i\theta}-1}{e^{2i\theta}}z=\frac{1}{t(1-e^{2i\theta})}\{t^4(2-e^{-2i\theta})-\sigma_1e^{2i\theta}t^3+\sigma_2e^{2i\theta}t^2+(t_4t^3-t_4\sigma_1t^2+t_4^2t^2-\frac{\sigma_4}{t_4}t)e^{2i\theta}\}$$

故

$$(4.11)\quad t^2z=\frac{1}{t(1-e^{2i\theta})^2}\{-t^4(2-e^{-2i\theta})e^{2i\theta}+\sigma_1e^{4i\theta}t^3+(-t_4t^3+t_4\sigma_1t^2-\sigma_2t^2-t_4^2t^2+\frac{\sigma_4}{t_4}t)e^{4i\theta}\}。$$

從(4.10)和(4.11)可得

$$t^2z+\sigma_4e^{2i\theta}\bar{z}=\frac{1}{t(1-e^{2i\theta})^2}\{-t^4(2e^{2i\theta}-1)+\sigma_1e^{4i\theta}t^3-\sigma_4(2e^{6i\theta}-e^{8i\theta})+\sigma_3e^{4i\theta}t-\sigma_2e^{4i\theta}t^2+t^2(-t_4^2+\sigma_1t_4-\sigma_2+\frac{\sigma_3}{t_4}-\frac{\sigma_4}{t_4^2})e^{4i\theta}\}$$

因爲

$$t_4^4-\sigma_1t_4^3+\sigma_2t_4^2-\sigma_3t_4+\sigma_4=0$$

可得

$$-t_4^2+\sigma_1t_4-\sigma_2+\frac{\sigma_3}{t_4}-\frac{\sigma_4}{t_4^2}=0$$

因此，

$$(4.12)\quad t^2z+\sigma_4e^{2i\theta}\bar{z}=\frac{1}{t(1-e^{2i\theta})^2}\{-t^4(2e^{2i\theta}-1)+\sigma_1e^{4i\theta}t^3-\sigma_2e^{4i\theta}t^2+\sigma_3e^{4i\theta}t-\sigma_4(2e^{6i\theta}-e^{8i\theta})\}。$$

故交點 C_4 在此直線(4.12)上。因爲此式關於 t_1、t_2、t_3、t_4 成對稱，故其他的點 C_1、C_2、C_3 亦在此直線上。即此直線爲點 P 關於 A_1、A_2、A_3、A_4 對於角 θ 的 Langley 意義的 Simson 線。

尤其，$\theta=\frac{\pi}{2}$ 時上式(4.12)可寫成下列形狀：

$$(4.13)\quad t^2z-\sigma_4\bar{z}=\frac{1}{4t}\{4(t^4+\sigma_4)-t^4+\sigma_1t^3-\sigma_2t^2+\sigma_3t-\sigma_4\}。$$

此爲點P由於A_1、A_2、A_3、A_4 Langley 意義的Simson線。

§4·3 例題

例1（Steiner定理）：$\Delta A_1A_2A_3$ 的外接圓上的點P關於$\Delta A_1A_2A_3$ 的Simson線，必經過連接點P和$\Delta A_1A_2A_3$ 之垂心H的線段PH的中點。

證明：如上，假設$\Delta A_1A_2A_3$ 之外接圓爲單位圓，點A_1、A_2、A_3的座標依次爲t_1、t_2、t_3，而P之座標爲t，則P關於$\Delta A_1A_2A_3$ 的Simson線方程式爲

$$(4.7)\quad zt-s_3\bar{z}=\frac{1}{2t}(t^3+s_1t^2-s_2t-s_3)。$$

H的座標爲$t_1+t_2+t_3$，故線段PH的中點座標爲

$$\frac{1}{2}(t+t_1+t_2+t_3)=\frac{1}{2}(t+s_1)。$$

現在把$z=\frac{1}{2}(t+s_1)$代入上式(4.7)之左邊可得

$$\begin{aligned}zt-s_3\bar{z}&=\frac{1}{2}(t^2+ts_1)-\frac{s_3}{2}\left(\frac{1}{t}+\frac{s_2}{s_3}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(t^2+ts_1-\frac{s_3}{t}-s_2\right)\\&=\frac{1}{2t}(t^3+s_1t^2-s_2t-s_3)。\end{aligned}$$

故點$\frac{1}{2}(t+s_1)$滿足方程式(4.7)。即PH之中點在Simson線(4.7)上。

例2（定理）：設A_1、A_2、A_3、A_4爲一圓周上四點，則A_4關於$\Delta A_1A_2A_3$之Simson線，A_3由於$\Delta A_1A_2A_4$之Simson線，A_2關於$\Delta A_1A_3A_4$ 之Simson線和A_1關於$\Delta A_2A_3A_4$ 之Simson線等四Simson線爲共點。

證明：不妨假設此圓爲單位圓，又設A_1、A_2、A_3、A_4四點之座標依次爲t_1、t_2、t_3、t_4，則點A_4由於$\Delta A_1A_2A_3$之Simson線之方程式爲

$$zt_4-\frac{\sigma_4}{t_4}\bar{z}=\frac{1}{2t_4}\left[t_4^3+(\sigma_1-t_4)t_4^2-(\sigma_2-t_4\sigma_1+t_4^2)t_4-\frac{\sigma_4}{t_4}\right]$$

即

$$(4.14)\quad zt_4^2-\sigma_4\bar{z}=\frac{1}{2}\left[-t_4^3+2\sigma_1t_4^2-\sigma_2t_4-\frac{\sigma_4}{t_4}\right]$$

同理A_3關於$\Delta A_1A_2A_4$之Simson線爲

$$(4.15)\quad zt_3^2-\sigma_4\bar{z}=\frac{1}{2}\left[-t_3^3+2\sigma_1t_3^2-\sigma_2t_3-\frac{\sigma_4}{t_3}\right]$$

此二Simson線之交點滿足

$$\begin{aligned}&z(t_3+t_4)(t_4-t_3)\\&=\frac{1}{2}\Big[-(t_4-t_3)(t_4^2+t_3t_4+t_3^2)+2\sigma_1(t_3+t_4)(t_4-t_3)-\sigma_2(t_4-t_3)+\sigma_4\frac{t_4-t_2}{t_3t_4}\Big]\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}&z(t_3+t_4)\\&=\frac{1}{2}\left[-(t_3+t_4)^2-(t_3+t_4)(t_1+t_2)+2\sigma_1(t_3+t_4)\right]\\&=\frac{1}{2}\left[-(t_3+t_4)\sigma_1+2\sigma_1(t_3+t_4)\right]。\end{aligned}$$

因此

(4.16) $$z=\frac{1}{2}\sigma_1$$

因爲此式爲關於 t_1、t_2、t_3、t_4 成對稱，其他二 Simson 線亦經過此點。

注意：從例 1 可容易地導出例 2 。反之從例 2 也可容易地導出例 1 。

§ 4.4 等極點及等極點直線

定理 4.3：給了一個三角形 $\Delta A_1A_2A_3$ 和一直線 g 時，從三角形之三頂點作與 g 交於角 θ 之三直線，使它們與直線 g 之交點依次爲 B_1、B_2、B_3〔故$\angle(g, A_1B_1)=\angle(g, A_2B_2)=\angle(g, A_3B_3)=\angle\theta$〕。從這些點分別引直線 B_1C_1，B_2C_2，B_3C_3，分別與三邊 A_2A_3，A_3A_1，A_1A_2 成角 $\pi-\theta$，且使點 C_1、C_2、C_3 依次在三邊 A_2A_3，A_3A_1，A_1A_2 上，則三直線 B_1C_1，B_2C_2，B_3C_3 爲共點。

此點稱爲直線 g 關於 $\Delta A_1A_2A_3$ 對於角 θ 的等極點（ isopole ）。滿足 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 的等極點稱爲直極點（ orthopole ）。

證明：不妨假設 $\Delta A_1A_2A_3$ 之外接圓爲單位圓。又設 $\Delta A_1A_2A_3$ 之三頂點 A_1、A_2、A_3 之座標依次爲 t_1、t_2、t_3，並設直線 g 之方程式爲

(4.17) $$\frac{z}{a}+\frac{\bar z}{\bar a}=1 。$$

此時，經過點 A_1 與直線 g 成角 θ（即交角爲 θ）之直線方程式爲

(4.18) $$\frac{1}{a}e^{2i\theta}z+\frac{\bar z}{\bar a}=\frac{e^{2i\theta}}{a}t_1+\frac{1}{\bar a}\cdot\frac{1}{t_1} 。$$

現在來求二直線 (4.17)，(4.18) 之交點 B_1 之座標。將此二方程式邊邊相減，則得

$$\frac{1}{a}(1-e^{2i\theta})z=1-\frac{e^{2i\theta}}{a}t_1-\frac{1}{\bar a}\frac{1}{t_1} 。$$

故

(4.19) $$B_1: z=\frac{1}{e^{2i\theta}-1}\left(e^{2i\theta}t_1+\frac{a}{\bar a}\frac{1}{t_1}-a\right)$$

直線 A_2A_3 之方程式爲

$$z+t_2t_3\bar z=t_2+t_3 。$$

經過 B_1 與 A_2A_3 成角（$\pi-\theta$）之直線，即直線 B_1C_1 之方程式爲

(4.20) $$e^{-2i\theta}z+t_2t_3\bar z=e^{-2i\theta}\left(\frac{e^{2i\theta}t_1+\frac{a}{\bar a}\frac{1}{t_1}-a}{e^{2i\theta}-1}\right)+t_2t_3\left(\frac{e^{-2i\theta}\frac{1}{t_1}+\frac{\bar a}{a}t_1-\bar a}{e^{-2i\theta}-1}\right) 。$$

同理，直線 B_2C_2 之方程式爲

$$e^{-2i\theta}z+t_3t_1\bar z=\frac{e^{-2i\theta}}{e^{2i\theta}-1}\left(e^{2i\theta}t_2+\frac{a}{\bar a}\frac{1}{t_2}-a\right)+\frac{t_3t_1}{e^{-2i\theta}-1}\left(\frac{e^{-2i\theta}}{t_2}+\frac{\bar a}{a}t_2-\bar a\right) 。$$

想求直線 B_1C_1 和 B_2C_2 之交點座標，把這二個方程式邊邊相減，可得

$$t_3(t_2-t_1)\bar z=\frac{e^{-2i\theta}}{e^{2i\theta}-1}\left[-e^{2i\theta}(t_2-t_1)+\frac{a}{\bar a}\frac{t_2-t_1}{t_1t_2}\right]+\frac{s_3}{e^{-2i\theta}-1}\left[e^{-2i\theta}\frac{(t_1+t_2)(t_2-t_1)}{t_1^2t_2^2}-\bar a\left(\frac{t_2-t_1}{t_1t_2}\right)\right]$$

故

$$t_3\bar z=\frac{e^{-2i\theta}}{e^{2i\theta}-1}\left[-e^{2i\theta}+\frac{a}{\bar a}\frac{1}{t_1t_2}\right]$$

$$+\frac{1}{e^{-2i\theta}-1}\left[e^{-2i\theta}\frac{(t_1+t_2)t_3}{t_1t_2}-\overline{a}t_3\right]$$

$$=\frac{1}{e^{2i\theta}-1}\left[-1+\frac{a}{\overline{a}}\frac{t_3}{s_3}e^{-2i\theta}\right]$$

$$+\frac{1}{1-e^{2i\theta}}\left[\frac{(t_1+t_2)t_3}{t_1t_2}-\overline{a}t_3e^{2i\theta}\right]$$

$$=\frac{1}{1-e^{2i\theta}}\left[\frac{s_2t_3}{s_3}-\frac{a}{\overline{a}}\frac{t_3}{s_3}e^{-2i\theta}-\overline{a}t_3e^{2i\theta}\right]。$$

因此，

$$\overline{z}=\frac{1}{1-e^{2i\theta}}\left[\frac{s_2}{s_3}-\frac{a}{\overline{a}}\frac{1}{s_3}e^{-2i\theta}-\overline{a}e^{2i\theta}\right]$$

故

$$z=\frac{1}{1-e^{-2i\theta}}\left[\frac{s_1}{s_3}\cdot s_3-\frac{\overline{a}}{a}s_3e^{2i\theta}-ae^{-2i\theta}\right]$$

即

$$(4.21)\quad z=\frac{1}{e^{2i\theta}-1}\left[s_1e^{2i\theta}-\frac{\overline{a}}{a}s_3e^{4i\theta}-a\right]。$$

此因爲關於 t_1、t_2、t_3成對稱，故三直線B_1C_1，B_2C_2，B_3C_3 交於此點。即此點爲 isopole。當 $\theta=\frac{\pi}{2}$時可得

$$(4.22)\quad z=\frac{1}{2}\left(a+\frac{\overline{a}}{a}s_3+s_1\right)$$

此爲直極點之座標。

定理 4.4：設四點A_1、A_2、A_3、A_4在一圓周上，g爲所與之直線，則g關於$\Delta A_1A_2A_3$之等極點，g關於$\Delta A_1A_2A_4$ 之等極點，g關於$\Delta A_1A_3A_4$ 之等極點，及g關於$\Delta A_2A_3A_4$之等極點等四點爲共線。

此直線稱爲直線g關於一圓上的四點 A_1、A_2、A_3、A_4 之等極點直線（ isopole line ）。當 $\theta=\frac{\pi}{2}$時的等極點直線稱爲直極點直線（ orthopole line ）。

證明：不妨假設所考慮的圓爲單位圓。設A_1、A_2、A_3、A_4之座標爲 t_1、t_2、t_3、t_4。又設g之方程式爲（4.17）式。

如上所示 $s_1=\sigma_1-t_4$，$s_3=\frac{\sigma_4}{t_4}$，由（4.21）式可得

$$(4.23)\quad z=\frac{1}{e^{2i\theta}-1}\left[(\sigma_1-t_4)e^{2i\theta}-\frac{\overline{a}}{a}\frac{\sigma_4}{t_4}e^{4i\theta}-a\right]$$

$$=\frac{1}{e^{2i\theta}-1}\left[\sigma_1e^{2i\theta}-a-t_4e^{2i\theta}-\frac{\overline{a}}{a}\frac{\sigma_4}{t_4}e^{4i\theta}\right]$$

故

$$\overline{z}=\frac{1}{e^{-2i\theta}-1}\left[\frac{\sigma_3}{\sigma_4}e^{-2i\theta}-\overline{a}-\frac{1}{t_4}e^{-2i\theta}-\frac{a}{\overline{a}}\frac{t_4}{\sigma_4}e^{-4i\theta}\right]。$$

由此式，可得

$$(4.24)\quad \frac{\overline{a}}{a}\sigma_4e^{4i\theta}\overline{z}=\frac{1}{e^{2i\theta}-1}\left[-\frac{\overline{a}}{a}\sigma_3e^{4i\theta}+\frac{\overline{a}^2}{a}\sigma_4e^{6i\theta}+\frac{\overline{a}}{a}\frac{\sigma_4}{t_4}e^{4i\theta}+t_4e^{2i\theta}\right]。$$

把（4.23）和（4.24）邊邊相加，可得

$$(4.25)\quad z+\frac{\overline{a}}{a}\sigma_4e^{4i\theta}\overline{z}=\frac{1}{1-e^{2i\theta}}\left[a-\sigma_1e^{2i\theta}+\frac{\overline{a}}{a}\sigma_3e^{4i\theta}-\frac{\overline{a}^2}{a}\sigma_4e^{6i\theta}\right]。$$

故g關於$\Delta A_1A_2A_3$ 之等極點在此直線上。因爲此式爲由於 t_1、t_2、t_3、t_4成對稱，g關於其他三角形$\Delta A_1A_2A_4$、$\Delta A_1A_3A_4$、$\Delta A_2A_3A_4$之等極點亦在此直線上。故直線（4.25）爲g關於A_1、A_2、A_3、A_4的等極點直線。

當 $\theta=\frac{\pi}{2}$時（4.25）式可寫成下列形狀

$$(4.26)\quad z+\frac{\bar a}{a}\sigma_4\bar z=\frac{1}{2}\Big[a+\sigma_1+\frac{\bar a}{a}\sigma_3+\frac{\bar a^2}{a}\sigma_4\Big]。$$

此直線爲 g 關於一圓周上四點 A_1、A_2、A_3、A_4 的直極點直線。

§ 4·5 例題

例1：設 P_1P_2 爲 $\Delta A_1A_2A_3$ 之外接圓之一弦。則點 P_1 關於 $\Delta A_1A_2A_3$ 之 Simson 線和點 P_2 關於 $\Delta A_1A_2A_3$ 之 Simson 線之交點爲直線 P_1P_2 關於三角形 $\Delta A_1A_2A_3$ 之直極點。

證明：不妨假設 $\Delta A_1A_2A_3$ 之外接圓爲單位圓，並設 A_1、A_2、A_3 之座標依次爲 t_1、t_2、t_3，P_1、P_2 之座標爲 z_1、z_2。此時直線 P_1P_2 之方程式爲

$$z+z_1z_2\bar z=z_1+z_2$$

故把此方程式寫成 $\frac{z}{a}+\frac{\bar z}{\bar a}=1$ 時 $a=z_1+z_2$，$\bar a=\frac{z_1+z_2}{z_1z_2}$，而 $\frac{\bar a}{a}=\frac{1}{z_1z_2}$。

點 P_1 關於 $\Delta A_1A_2A_3$ 之 Simson 線之方程式爲

$$zz_1-s_2\bar z=\frac{1}{2z_1}\left(z_1^3+s_1z_1^2-s_2z_1-s_3\right)$$

同理點 P_2 關於 $\Delta A_1A_2A_3$ 之 Simson 線之方程式爲

$$zz_2-s_2\bar z=\frac{1}{2z_2}\left(z_2^3+s_1z_2^2-s_2z_2-s_3\right)。$$

把此二方程式邊邊相減可得其交點之座標如下：

$$(z_1-z_2)z=\frac{1}{2z_1z_2}\{z_1z_2(z_1+z_2)(z_1-z_2)+s_1z_1z_2(z_1-z_2)+s_3(z_1-z_2)\}$$

故

$$z=\frac{1}{2z_1z_2}\{z_1z_2(z_1+z_2)+s_1z_1z_2+s_3\},$$

即

$$(4.27)\quad z=\frac{1}{2}\Big\{(z_1+z_2)+s_1+\frac{s_3}{z_1z_2}\Big\}$$

此式爲在（4.22）式中代入 $a=z_1+z_2$，$\frac{\bar a}{a}=\frac{1}{z_1z_2}$ 後所得的。故（4.27）表直線 P_1P_2 關於 $\Delta A_1A_2A_3$ 之直極點。

例2：設 $z+\frac{\bar z}{t_i}=\frac{1}{1+t_i}$，$i=1,2,3,4$ 爲所與的四條直線。則從這些四直線除去去任一直線所剩下的三直線成一個三角形。如此，可得四個三角形。設 g 爲所與的直線，則 g 由於上述四個三角形之各個三角形的直極點（共有四點）爲共線。

設 g 之方程式爲 $\frac{z}{a}+\frac{\bar z}{\bar a}=1$。已知：對應於 $i=1$，2 之二直線之交點 z_{12} 爲 $z_{12}=\frac{1}{(1+t_1)(1+t_2)}$。從 z_{12} 至直線 g 所作的垂線之方程式爲

$$\frac{z}{a}-\frac{\bar z}{\bar a}=\frac{1}{a(1+t_1)(1+t_2)}-\frac{1}{\bar a}\frac{1}{(1+t_1)(1+t_2)}$$

此垂線之垂足 z'_{12}（即直線 $\frac{z}{a}+\frac{\bar z}{\bar a}=1$ 與此直線之交點）之座標爲

$$(4.28)\quad z'_{12}=\frac{1}{2}\Big\{a+\frac{1}{(1+t_1)(1+t_2)}-\frac{a}{\bar a}\frac{t_1t_2}{(1+t_1)(1+t_2)}\Big\}$$

從此點 z'_{12} 至所與的第三直線 $z+\frac{\bar z}{t_3}=\frac{1}{1+t_3}$ 所作的垂線之方程式爲

$$(4.29)\quad z-\frac{\bar z}{t_3}=\frac{1}{2}\left\{a+\frac{1}{(1+t_1)(1+t_2)}-\frac{a}{\bar a}\frac{t_1t_2}{(1+t_1)(1+t_2)}\right\}-\frac{1}{2t_3}\left\{\bar a+\frac{t_1t_2}{(1+t_1)(1+t_2)}-\frac{\bar a}{a}\frac{1}{(1+t_1)(1+t_2)}\right\}$$

設從點 z_{23} 至直線 g 所作的垂線之垂足爲 z'_{23}。同理從 z'_{23} 至所與的第一直線所作的垂線之方程式爲

$$(4.30)\quad z-\frac{\bar z}{t_1}=\frac{1}{2}\left\{a+\frac{1}{(1+t_2)(1+t_3)}-\frac{a}{\bar a}\frac{t_2t_3}{(1+t_2)(1+t_3)}\right\}-\frac{1}{2t_1}\left\{\bar a+\frac{t_2t_3}{(1+t_2)(1+t_3)}-\frac{\bar a}{a}\frac{1}{(1+t_2)(1+t_3)}\right\}。$$

此二垂線之交點，即直線 g 關於 $\Delta z_{12}z_{23}z_{31}$ 的直極點之座標可求之如下：
即把此二方程式邊邊相減可得：

$$\left(\frac{1}{t_1}-\frac{1}{t_3}\right)\bar z=\frac{1}{2}\frac{1}{1+t_2}\left(\frac{1}{1+t_1}-\frac{1}{1+t_3}\right)+\frac{a}{2\bar a}\frac{t_2}{1+t_2}\left(\frac{t_3}{1+t_3}-\frac{t_1}{1+t_1}\right)+\frac{\bar a}{2}\left(\frac{1}{t_1}-\frac{1}{t_3}\right)+\frac{t_2}{2(1+t_2)}\left\{\frac{t_3}{t_1(1+t_3)}-\frac{t_1}{t_3(1+t_1)}\right\}+\frac{\bar a}{2a}\frac{1}{1+t_2}\left\{\frac{1}{t_3(1+t_1)}-\frac{1}{t_1(1+t_3)}\right\}。$$

故

$$\frac{t_3-t_1}{t_1t_2}\bar z=\frac{1}{2}\frac{1}{1+t_2}\frac{t_3-t_1}{(1+t_1)(1+t_3)}+\frac{a}{2\bar a}\frac{t_2}{1+t_2}\cdot\frac{t_3-t_1}{(1+t_1)(1+t_3)}+\frac{\bar a}{2}\frac{t_3-t_1}{t_1t_3}+\frac{t_2}{2(1+t_2)}\frac{t_3^2+t_1t_3^2-t_1^2-t_1^2t_3}{t_1t_3(1+t_1)(1+t_3)}-\frac{\bar a}{2a}\frac{1}{1+t_2}\frac{t_3-t_1}{t_1t_2(1+t_1)(1+t_3)}。$$

而

$$\frac{1}{t_1t_3}\bar z=\frac{1}{2(1+t_1)(1+t_2)(1+t_3)}+\frac{a}{2\bar a}\cdot\frac{t_2}{(1+t_1)(1+t_2)(1+t_3)}+\frac{\bar a}{2}\frac{1}{t_1t_3}+\frac{t_2\{(t_1+t_3)+t_1t_3\}}{2t_1t_3(1+t_1)(1+t_2)(1+t_3)}-\frac{\bar a}{2a}\frac{1}{t_1t_3(1+t_1)(1+t_2)(1+t_3)}。$$

故

$$\bar z=\frac{t_1t_3}{2\pi_3}+\frac{a}{2\bar a}\frac{s_3}{\pi_3}+\frac{\bar a}{2}+\frac{t_1t_2+t_2t_3+s_3}{2\pi_3}-\frac{\bar a}{2a}\frac{1}{\pi_3}。$$

即

$$(4.31)\quad \bar z=\frac{1}{2}\left(\frac{s_2+s_3}{\pi_3}+\frac{a}{\bar a}\frac{s_3}{\pi_3}+\bar a-\frac{\bar a}{a}\frac{1}{\pi_3}\right)。$$

因此，

$$z=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{s_1}{s_3}+\frac{1}{s_3}\right)\frac{s_3}{\pi_3}+\frac{\bar a}{a}\frac{1}{s_3}\frac{s_3}{\pi_3}+a-\frac{a}{\bar a}\frac{s_3}{\pi_3}\right]$$

即

$$(4.32) \qquad z=\frac{1}{2}\left(\frac{1+s_1}{\pi_3}+\frac{\overline{a}}{a}\frac{1}{\pi_3}+a-\frac{a}{\overline{a}}\frac{s_3}{\pi_3}\right)。$$

把(4.31)，(4.32)二式邊邊相加，可得

$$z+\overline{z}=\frac{1}{2}\left(\frac{1+s_1+s_2+s_3}{\pi_3}+a+\overline{a}\right)$$

即

$$(4.33) \qquad z+\overline{z}=\frac{1}{2}(a+\overline{a}+1)$$

此因 $\pi_3=(1+t_3)(1+t_2)(1+t_3)=1+s_1+s_2+s_3$ 之故。即直線 g 關於 $\Delta z_{12}z_{23}z_{31}$ 之直極點在直線(4.33)上。同理 g 由於其他三角形的直極點亦在此直線上。

注意：在第五章拋物線之討論中，可證明任何四直線均可表成 $z+\frac{\overline{z}}{t_i}=\frac{1}{1+t_i}$，$|t_i|=1$，$i=1,2,3,4$ 之形狀。故例2是對於平面上任何四直線均可成立的。直線(4.33)爲經過點 $z=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z}+a\right)$，而與 y 軸平行之直線。