而 $5Q^{2/5}-5Q^{1/5}=10$　很顯然 $2(2^{5/2}-1)<10$ $(\because 2^{5/2}-1<5 \Leftrightarrow 2^{5/2}<6 \Rightarrow 2^5<6^2)$

其他一切，下次再談，耑此即

研安

弟子俠　匆草

林懷恩來函

編輯先生大鑒：

貴刊第十一卷第四期「逆向思考的省思」提出「如何能不使用長除法而將循環小數表示出來」的問題及作法，個人以爲這是一個級數的題目，而且從這個觀點來看的話，很容易就可以了解其中運作的過程。

首先假設　$a>1$

我們知道　$1+\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{a^2}+\cdots\cdots=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{a}}$

$$=\frac{a}{a-1}$$

也就是說　$\dfrac{1}{a-1}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{a^3}+\cdots\cdots$

$$=\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{a^r}$$

令　$a=10^n$

則　$\dfrac{1}{10^n-1}=\sum_{r=1}^{\infty}\dfrac{1}{(a^n)^r}$

對於任意整數 A（當然，$A>10^n$ 才有意思）

我們可以得到　$\dfrac{A}{10^n-1}=\sum_{r=1}^{\infty}\dfrac{A}{10^{nr}}$　。

利用等式右邊的級數和，我們可以逼近左邊的分數。而且 $a=10^n$ 是一個特例，在此情況下，其小數表示法必定帶有 n 位循環節。

於是現在問題變成

$$\frac{A}{10^n-1}=\sum_{r=1}^{s}\frac{A}{10^{nr}}+\sum_{r=s+1}^{\infty}\frac{A}{10^{nr}}$$

只要 S 取得夠大，以致第 $(s+1)$ 項以後的級數和影響不到前面的 n 位小數，我們就可以捨去第 $(m+1)$ 位以後的小數，而放心地在前面 n 位畫上循環節號。

也就是說　$\sum_{r=s+1}^{\infty}\dfrac{A}{10^{nr}}<\dfrac{1}{10^n}$

（當然還可以更保守些）

$$\frac{A}{10^{n(s+1)}}\frac{1}{1-\dfrac{1}{10^n}}<\frac{1}{10^n}$$

$$\frac{A}{10^{n(s+1)}}\frac{10^n}{10^n-1}<\frac{1}{10^n}$$

假設　$10^{m-1}\leq A<10^m$，而且 (10^n-1) 與 10^n 同階

所以　$\dfrac{10^m}{10^{n(s+1)}}<\dfrac{1}{10^n}$

經過整理　$10^{n(s+1)}>10^{m+n}$

同取對數　$n(s+1)>m+n$

我們得到　$s>\dfrac{m}{n}$

所以我們只要取　$\dfrac{m}{n}<s\leqslant\dfrac{m}{n}+1$　之間的整數，求出級數和之後，直接畫上 n 位循環節並捨掉其餘，即爲所需之答案了。

最後舉「逆向思考的省思」文中「引例一」以爲說明

$$\frac{23508}{99}=\frac{23508}{10^2-1}\doteqdot\sum_{r=1}^{s}\frac{23508}{10^{2r}}\Rightarrow n=2$$

而且　$10^4\leq 23508<10^5 \Rightarrow m=5$

所以　$2.5<s\leq 3.5$　取　$s=3$

得到　$\dfrac{23508}{99}\doteqdot\sum_{r=1}^{3}\dfrac{23508}{10^{2r}}$

$$=235.08+2.3508+.023508$$

$$=237.454308$$

$$\doteqdot 237.45$$

結果　$\dfrac{23508}{99}=237.45$

以上爲個人讀後的一些聯想，希望有些參考價值。敬祝

編安

讀者　林懷恩　上