數播信箱

張鎭華來函

數播編輯：

數播 44 期第 41 頁 11302 問題的解答經同事林強指出，證明有問題，玆改正如下。

(甲) n 是偶數時，設 $n = 2m$，則

$$\sum_{i=1}^{n} x_i x_{i+1} - \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$= \sum_{i\,\text{奇數}} \{(x_i-1)(x_{i+1}-1)-1\}$$

$$+ \sum_{i\,\text{偶數}} x_i x_{i+1} \geqslant -m + m\Big(\prod_{i\,\text{偶數}} x_i\, x_{i+1}\Big)^{1/m}$$

$$= -m + m\sqrt[m]{Q}$$

等號成立的充要條件是

(1)對所有奇數 i 均有 $x_i = 1$ 或 $x_{i+1} = 1$，

及(2) $x_2 x_3 = x_4 x_5 = \cdots\cdots = x_n x_1$。

同理，將奇偶對調也可以得到第號成立的充要條件是

(3)對所有偶數 i 均有 $x_i = 1$ 或 $x_{i+1} = 1$

及(4) $x_1 x_2 = x_3 x_4 = \cdots\cdots = x_{n-1}\, x_n$

由(1)到(4)可以得到，等號成立的充要條件是

$x_1 = x_3 = \cdots\cdots = x_{n-1} = 1$ 且

$x_2 = x_4 = \cdots\cdots = x_n = \sqrt[m]{Q}$

或 $x_1 = x_3 = \cdots\cdots = x_{n-1} = \sqrt[m]{Q}$ 且

$x_2 = x_4 = \cdots\cdots = x_n = 1$

所以極小值是 $-m + m\sqrt[m]{Q}$。

張鎭華

數播編輯：

王子俠來信提及數播上我的解答有誤，這和林強發現的一樣，我上次也寄上正確答案。王子俠他們的（結果Ⅰ）是另一方式的證明，附上他們的信，請處理。信中改了兩個地方，特別是（結果Ⅲ），只能說“不一定”，原因是 $2Q^{1/2}-2$ 和 $5Q^{2/5}-5Q^{1/5}$ 比大小，令 $Q = a^{10}$，則等於比較 $2a^5-2$ 和 $5a^4-5a^2$，其中 $a > 1$，當 a 比較小時（如 $Q = 2^5$），確是前者小，但 a 夠大時，前者將比較大，因爲 $\lim\limits_{a\to\infty} \dfrac{2a^5-2}{5a^4-5a^2} = \infty$

我會另信去和王子俠聯絡。祝

編安

鎭華 2 / 29

鎭華兄：

很久沒有聯絡了，近況如何？甚念！昨天收到 *NO.* 44期的數學傳播，我和在此訪問的單鱠博士（中國科技大學的數學教授，是我請來的，和我合作研究）看了你刊登的 11302 極小值問題的解答；很顯然地，(甲)部份的解答一定有印刷上的錯誤，因爲“極小值是 $-m$”的結論當然是不可能的（$\because \sum\limits_{i=1}^{n} x_i x_{i+1} \geqslant \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$ $\therefore$ $minimum \geqslant 0$，絕無疑問），事實上，不難證明極小值爲 $\dfrac{n}{2}(Q^{2/n}-1)$，而就在你所說的兩個 cases 達到。另外(乙)部分的猜想在 $n=3$ 時是對的，證明不難，但在 $n=5$ 時就

不對了，反例也不難，我現在就把這三個結果詳細寫在下面，希望你交給呂素齡，可以在下一期刊登。

假定 $x_i \geqslant 1, i=1, 2, \cdots\cdots, n$,

$$\prod_{i=1}^{n} x_i = Q > 1, \quad S = \sum_{i=1}^{n} x_i x_{i+1} - \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$(x_{n+1} = x_1)$$

〔結果 I 〕

當 $n = 2m$ 爲偶數時，$S \geqslant \frac{n}{2}(Q^{2/n} - 1)$ 等號成立當且僅當

$$x_1 = x_3 = \cdots\cdots = x_{2m-1} = 1,$$
$$x_2 = x_4 = \cdots\cdots = x_{2m} = Q^{1/m} \quad \text{或}$$
$$x_1 = x_3 = \cdots\cdots = x_{2m-1} = Q^{1/m},$$
$$x_2 = x_4 = \cdots\cdots = x_{2m} = 1$$

證明：$\because \quad (x_i - 1)(x_{i+1} - 1) \geqslant 0 \Rightarrow$

$$2x_i x_{i+1} - x_i - x_{i+1} \geqslant x_i x_{i+1} - 1$$

$$\therefore \quad 2S = \sum_{i=1}^{n}(2x_i x_{i+1} - x_i - x_{i+1})$$

$$\geqslant \sum_{i=1}^{n}(x_i x_{i+1} - 1)$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i x_{i+1}\right) - n$$

由算幾不等式，即得 $2S \geqslant nQ^{2/n} - n = n(Q^{2/n} - 1)$，故 $S \geqslant \frac{n}{2}(Q^{2/n} - 1)$ 若此下界達到，則在上面的不等式中，等號必須成立，故對 $i = 1, 2, \cdots\cdots, n$ x_i 及 x_{i+1} 之中至少有一數必須爲 1 且 $x_i x_{i+1} = x_{i+1} x_{i+2}$（足碼均取模 n）。若 $x_1 = x_2 = 1$，則顯然對所有之 i，$x_i = 1$，從而 $\prod_{i=1}^{n} x_i = 1 \neq Q$，此爲矛盾，故 (i) $x_i = 1$，$x_2 \neq 1$ 或 (ii) $x_i \neq 1$，$x_2 = 1$。若 (i) 成立，則由 $x_1 x_2 = x_2 = x_3$，得 $x_3 = 1$；同理即得 $x_1 = x_3 = \cdots\cdots = x_{2m+1} = 1$。而由 $x_2 x_3 = x_3 x_4$ 得 $x_2 = x_4$，司理即得 $x_2 = x_4 = \cdots\cdots = x_{2m}$ 但 $\prod_{i=1}^{n} x_i = Q$，故 $x_2 = x_4 = \cdots\cdots = x_{2m} = Q^{1/m}$。同理，若 (ii) 成立，則得 $x_2 = x_4 = \cdots\cdots = x_{2m} = 1$ 而 $x_1 = x_3 = \cdots\cdots x_{2m-1} = Q^{1/m}$。反之在這兩種情形之下，顯然 $S = 2mQ^{1/m} - (m + mQ^{1/m}) = m(Q^{1/m} - 1) = \frac{n}{2}(Q^{2/n} - 1)$。(若你認爲等號的情形顯然，可以不必寫得如此詳細。)

〔結果 II 〕

當 $n = 3$ 時，$S \geqslant 3Q^{2/3} - 3Q^{1/3}$。等號成立當且僅當 $x_1 = x_2 = x_3 = Q^{1/3}$。

證明：求證之不等式等價於

$$x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 - (x_1 + x_2 + x_3)$$
$$\geqslant 3(x_1 x_2 x_3)^{2/3} - 3(x_1 x_2 x_3)^{1/3} \cdots (*)$$

令 $x_1 = a^3$，$x_2 = b^3$，$x_3 = c^3$，則 (*) 等價於

$$a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3 - (a^3 + b^3 + c^3)$$
$$\geqslant 3c^2b^2c^2 - 3abc \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (**)$$
$$(a \geqslant 1, b \geqslant 1, c \geqslant 1)$$

由熟知的公式，$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

$$= (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$

或 $2(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc) =$

$$(a+b+c)[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

同理得 $2(a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3 - 3a^2b^2c^2)$

$$= (ab+bc+ca)[(ab-bc)^2 + (bc-ca)^2 + (ca-ab)^2]$$
$$\geqslant (a+b+c)[b(a-c)^2 + c(b-a)^2 + a(c-b)^2]$$
$$\geqslant (a+b+c)[(c-a)^2 + (a-b)^2 + (b-c)^2] \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

由 (1) 及 (2) 即得 $a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3 - 3a^2b^2c^2 \geqslant a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$。

故 (**) 得證。顯然，等號成立當且僅當 $a = b = c$，即 $x_1 = x_2 = x_3$。

〔結果 III 〕

當 $n = 5$ 時，S 之極小值不一定在 $x_1 = x_2 = \cdots\cdots = x_5 = Q^{1/5}$ 時達到。

反例：取 $x_1 = x_3 = x_5 = 1$，$x_2 = x_4 = Q^{1/2}$。

則 $S = 4Q^{1/2} + 1 - (3 + 2Q^{1/2})$

$= 2(Q^{1/2} - 1)$ 而當 $x_1 = x_2 = \cdots\cdots = x_5 = Q^{1/5}$ 時，$S = 5Q^{2/5} - 5Q^{1/5}$

若 $Q = 2^5$，則 $2(Q^{1/2} - 1) = 2(2^{5/2} - 1)$

而 $5Q^{2/5}-5Q^{1/5}=10$　很顯然　$2(2^{5/2}-1)<10\ (\because 2^{5/2}-1<5\Leftrightarrow 2^{5/2}<6\Rightarrow 2^5<6^2)$

其他一切，下次再談，耑此即

　　研安

弟子俠　匆草