以複數爲座標的解析幾何淺論（Ⅲ）

許振榮、呂素齡

第三章　附隨於一三角形的點、直線及圓

§3.1　三角形的垂心，九點圓及歐勒線

不妨假設所與三角形之外接圓爲單位圓。又假設三角形之三頂點之座標分別爲 t_1 ，t_2 及 t_3 。

此時三角形 $\Delta t_1t_2t_3$ 之外心之座標爲 O。

三角形 $\Delta t_1t_2t_3$ 之重心之座標爲

$$\frac{1}{3}(t_1+t_2+t_3)$$

此因

$$\begin{aligned}&\frac{1}{3}(t_1+t_2+t_3)\\&=\frac{1}{3}t_1+\frac{2}{3}\left[\frac{1}{2}(t_2+t_3)\right]\\&=\frac{1}{3}t_2+\frac{2}{3}\left[\frac{1}{2}(t_3+t_1)\right]\\&=\frac{1}{3}t_3+\frac{2}{3}\left[\frac{1}{2}(t_1+t_2)\right]\end{aligned}$$

成立之故。

三角形 $\Delta t_1t_2t_3$ 之垂心座標爲 $t_1+t_2+t_3$

爲求 $\Delta t_1t_2t_3$ 之垂心之座標，先求經過 t_2 、t_3 二點之直線之方程式。其爲

$$\begin{vmatrix} z & \overline{z} & 1 \\ t_2 & \dfrac{1}{t_2} & 1 \\ t_3 & \dfrac{1}{t_3} & 1 \end{vmatrix}=0$$

即

$$(3.1)\qquad z+t_2t_3\overline{z}=t_2+t_3$$

從點 t_1 至此直線 (3.1) 所作的垂線之方程式爲

$$(3.2)\qquad z-t_2t_3\overline{z}=t_1-\frac{t_2t_3}{t_1}$$

把此二方程式邊邊相加，可得

$$\begin{aligned}2z&=t_1+t_2+t_3-\frac{t_2t_3}{t_1}\\&=s_1-\frac{s_3}{t_1^2}\end{aligned}$$

此處

$$s_1 = t_1 + t_2 + t_3 ,$$
$$s_2 = t_1t_2 + t_2t_3 + t_3t_1 ,$$
$$s_3 = t_1t_2t_3 \text{。}$$

故

$$(3.3) \qquad z = \frac{1}{2}\left(s_1 - \frac{s_3}{t_1^2} \right) \text{。}$$

此爲從 t_1 向直線 t_2t_3 所作的垂線之垂足座標。

注意：此座標 (3.3) 亦可依 § 1.4 之公式求之。

與 (3.2) 同樣，從 t_2 至直線 t_3t_1 所作的垂線之方程式爲

$$(3.4) \qquad z - t_3t_1\overline{z} = t_2 - \frac{t_1t_3}{t_2} \text{。}$$

由 (3.2)、(3.4) 兩式可得

$$t_1z - s_3\overline{z} = t_1^2 - t_2t_3 ,$$
$$t_2z - s_3\overline{z} = t_2^2 - t_3t_1 \text{。}$$

把此二式邊邊相減可所

$$(t_1 - t_2)z = (t_1 - t_2)(t_1 + t_2) + t_3(t_1 - t_2) ,$$

因此

$$(3.5) \qquad z = t_1 + t_2 + t_3 = s_1$$

爲 $\Delta t_1t_2t_3$ 之垂心座標。

注意：求 $\Delta t_1t_2t_3$ 之重心時，我們利用了「複數體成一個二維空間」之事實。

在此二維空間中，當然可以 $\langle z_1 , z_2 \rangle = x_1x_2 + y_1y_2 = \frac{1}{2}(z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2)$ 來定義內積。

此處 $z_1 = x_1 + iy$, $z_2 = x_2 + iy_2$ 。當 $\langle z_1 , z_2 \rangle = 0$ 時，如果 O 爲原點，則 Oz_1 與 Oz_2 垂直。

因爲 $\langle s_1 - t_1 , t_2 - t_3 \rangle = \langle t_2 + t_3 , t_2 - t_3 \rangle = 0$ ，點 t_1 和點 $t_1 + t_2 + t_3$ 之連結線與邊 t_2t_3 垂直。如此可證 $t_1 + t_2 + t_3$ 在 $\Delta t_1t_2t_3$ 之頂點至對邊的三垂線上。故 $t_1 + t_2 + t_3$ 爲 $\Delta t_1t_2t_3$ 之垂心。

$\Delta t_1t_2t_3$ 的九點圓

現在考慮

$$(3.6) \qquad z = \frac{1}{2}s_1 + \frac{1}{2}t , \quad |t| = 1$$

所表的圓。當 $t = -t_1$ 時由 (3.5) 可得

$$z = \frac{1}{2}(t_2 + t_3) \text{。}$$

故此圓 (3.5) 經過邊 t_2t_3 之中點。同理，此圓亦經過邊 t_1t_3 和邊 t_1t_2 之中點。當 $t = t_1$ 時圓 (3.5) 可得

$$z = \frac{1}{2}(s_1 + t_1)$$

因爲 s_1 表示 $\Delta t_1t_2t_3$ 之垂心 h ，故圓 (3.5) 亦經過線段（即垂心 h 和頂點 t_1 所決定的線段）t_1h 之中點。同理圓 (3.5) 亦經過 t_2h ，t_3h 二線段之中線。最後當 $t = -\frac{s_3}{t_1^2}$ ，則由 (3.5) 可得

$$z = \frac{1}{2}\left(s_1 - \frac{s_3}{t_1^2} \right) \text{。}$$

此爲從頂點 t_1 至邊 t_2t_3 所作的垂線之垂足。故圓 (3.5) 經過此垂足。同理，圓 (3.5) 亦經過從 t_2 至邊 t_1t_3 所作的垂線之垂足和從 t_3 至邊 t_1t_2 所作的垂線之垂足。因爲此圓經過這九點，此圓 (3.5) 稱爲九點圓或 Feuerbach 圓。顯然此圓之中心爲點 $\frac{s_1}{2}$ ，半徑爲 $\frac{1}{2}$（當 $\Delta t_1t_2t_3$ 之外接圓爲單位圓時）。

$\Delta t_1t_2t_3$ 的歐勒 (Euler) 線

因爲 $\Delta t_1t_2t_3$ 之外心、重心、九點圓之中心和垂心之座標分別爲 0 ，$\frac{1}{3}s_1$ ，$\frac{1}{2}s_1$ ，和 s_1 ，這些四點在一直線上。此直線稱爲 $\Delta t_1t_2t_3$ 之歐勒線。

§ 3.2　△t₁t₂t₃之內心

設 $t_1=e^{i\theta_1}$，$t_2=e^{i\theta_2}$，$t_3=e^{i\theta_3}$。又設弧 $\overset{\frown}{t_2t_3}$、弧 $\overset{\frown}{t_3t_1}$、弧 $\overset{\frown}{t_1t_2}$ 之中點分別為 P_1、P_2、P_3，則

$$\angle t_2OP_1=\frac{1}{2}(\theta_3-\theta_2),$$

而 OP_1 與 x 軸所成之角為

$$\frac{1}{2}(\theta_2+\theta_3)。$$

故 P_1 之座標為

$$e^{\frac{i}{2}(\theta_2+\theta_3)}$$

現在∠$t_2t_1t_3$ 之分平線 t_1P_1 之方程式(依(3.1)式為

$$(3.7)\qquad z+e^{i\theta_1}e^{\frac{i}{2}(\theta_2+\theta_3)}\bar{z}=e^{i\theta_1}+e^{\frac{i}{2}(\theta_2+\theta_3)}。$$

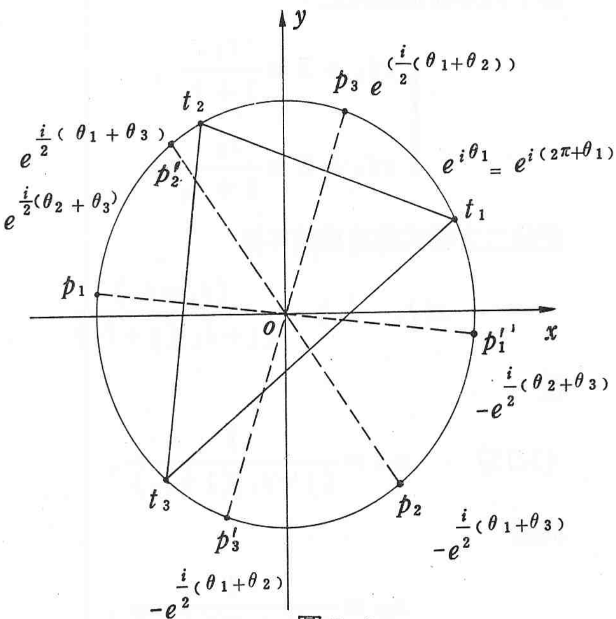

圖 3.1

因為弧 $\overset{\frown}{t_3t_1}$ 之長度為 $2\pi+\theta_1-\theta_3$，故弧 $\overset{\frown}{t_3t_1}$ 之中點 P_2 之座標為

$$e^{\frac{i}{2}(2\pi+\theta_1-\theta_3+2\theta_2)}$$

$$=e^{i(\pi+\frac{\theta_1+\theta_2}{2})}$$

$$=-e^{\frac{i}{2}(\theta_1+\theta_3)}$$

因此∠$t_1t_2t_3$ 之平分線 t_2P_2 之方程式為

$$(3.8)\qquad z-e^{i\theta_2}e^{\frac{i}{2}(\theta_1+\theta_3)}\bar{z}=e^{i\theta_2}-e^{\frac{i}{2}(\theta_1+\theta_3)}$$

此二角平分線之交點可得之如下：把(3.6)式和(3.7)式邊邊相減得

$$e^{\frac{i}{2}(\theta_1+\theta_2+\theta_3)}\bar{z}=e^{\frac{i}{2}\theta_1}-e^{\frac{i}{2}\theta_2}+e^{\frac{i}{2}\theta_3}$$

故

$$e^{-\frac{i}{2}(\theta_1+\theta_2+\theta_3)}z=e^{-\frac{i}{2}\theta_1}-e^{-\frac{i}{2}\theta_2}+e^{-\frac{i}{2}\theta_3}$$

因此 $\Delta t_1t_2t_3$ 之內心 I 之座標為

$$(3.9)\qquad I:\ z=e^{\frac{i}{2}(\theta_2+\theta_3)}-e^{\frac{i}{2}(\theta_1+\theta_2)}+e^{\frac{i}{2}(\theta_1+\theta_2)}$$

注意：角∠$t_2t_1t_3$ 之平分線 t_1P_1 與直線 P_3P_2 垂直。此因

$$2\langle e^{i\theta_1}-e^{\frac{i}{2}(\theta_2+\theta_3)},e^{\frac{i}{2}(\theta_1+\theta_2)}+e^{\frac{i}{2}(\theta_1+\theta_3)}\rangle$$

$$=[e^{i\theta_1}-e^{\frac{i}{2}(\theta_2+\theta_3)}][e^{-\frac{i}{2}(\theta_1+\theta_2)}+e^{-\frac{i}{2}(\theta_1+\theta_3)}]$$

$$+[e^{-i\theta_1}-e^{-\frac{i}{2}(\theta_2+\theta_3)}][e^{\frac{i}{2}(\theta_1+\theta_2)}+e^{\frac{i}{2}(\theta_1+\theta_3)}]$$

$$=0$$

之故。同理，∠$t_3t_2t_1$ 之平分線 t_2P_2 與直線 P_1P_3 垂直，∠$t_2t_3t_1$ 之平分線 t_3P_3 與直線 P_1P_2 垂直。故 $\Delta t_1t_2t_3$ 之內心 I 為 $\Delta P_1P_2P_3$ 之垂心。因為 P_1、P_2、P_3 之座標分別為 $e^{\frac{i}{2}(\theta_2+\theta_3)}$，$-e^{\frac{i}{2}(\theta_1+\theta_3)}$，和 $e^{\frac{i}{2}(\theta_1+\theta_2)}$，依(3.5) $\Delta P_1P_2P_3$ 之垂心，即 $\Delta t_1t_2t_3$ 之內心之座標為(3.9)式。此為 $\Delta t_1t_2t_3$ 之內心之另一求法。

§3.3 $\triangle t_1t_2t_3$之傍心

現在來求在角$\angle t_2t_1t_3$內之傍心I_{t_1}之座標。如上述$\angle t_2t_1t_3$之平分線t_1P_1之方程式爲

$$(3.7)\qquad z+e^{i\theta_1}e^{\frac{i}{2}(\theta_2+\theta_3)}\bar{z} = e^{i\theta_1}+e^{\frac{i}{2}(\theta_2+\theta_3)}$$

$\angle t_1t_2t_3$之外角之平分線爲$t_2P'_2$。此平分線之方程式爲

$$(3.10)\qquad z+e^{i\theta_2}e^{\frac{i}{2}(\theta_1+\theta_3)}\bar{z} = e^{i\theta_2}+e^{\frac{i}{2}(\theta_1+\theta_3)}$$

I_{t_1} 爲此二角之平分線之交點。其座標可求之如下：把(3.7)，(3.10)兩式邊邊相減可得

$$e^{\frac{i}{2}(\theta_1+\theta_2+\theta_3)}\bar{z} = e^{\frac{i}{2}\theta_1}+e^{\frac{i}{2}\theta_2}-e^{\frac{i}{2}\theta_3}$$

故

$$e^{-\frac{i}{2}(\theta_1+\theta_2+\theta_3)}z = e^{-\frac{i}{2}\theta_1}+e^{-\frac{i}{2}\theta_2}-e^{-\frac{i}{2}\theta_3}$$

因此傍心I_{t_1}之座標爲

$$(3.11)\qquad I_{t_1}: z=e^{\frac{i}{2}(\theta_2+\theta_3)}+e^{\frac{i}{2}(\theta_1+\theta_3)} - e^{\frac{i}{2}(\theta_1+\theta_2)}$$

同理$\angle t_3t_2t_1$內之傍心I_{t_2}爲角$\angle t_3t_2t_1$ 之平分線t_2P_2和$\angle t_2t_3t_1$之外角平分線$t_3P'_3$之交點，故其座標可解下列二方程式而得：

$$\begin{cases} z-e^{i\theta_2}e^{\frac{i}{2}(\theta_1+\theta_2)}\bar{z}=e^{i\theta_2}-e^{\frac{i}{2}(\theta_1+\theta_3)}, \\ z-e^{i\theta_3}e^{\frac{i}{2}(\theta_1+\theta_2)}\bar{z}=e^{i\theta_3}-e^{\frac{i}{2}(\theta_1+\theta_2)}。 \end{cases}$$

其解爲

$$(3.12)\qquad I_{t_2}: z=-e^{\frac{i}{2}(\theta_1+\theta_2)}-e^{\frac{i}{2}(\theta_1+\theta_2)} - e^{\frac{i}{2}(\theta_1+\theta_2)}$$

又$\angle t_2t_3t_1$內之傍心I_{t_3}爲角$\angle t_2t_3t_1$ 之平分線t_3P_3和角$\angle t_1t_2t_3$之外角平分線$t_2P'_2$之交點，故其座標可解下列二方程式而得之：

$$\begin{cases} z+e^{i\theta_3}e^{\frac{i}{2}(\theta_2+\theta_3)}\bar{z}=e^{i\theta_3}+e^{\frac{i}{2}(\theta_1+\theta_2)}, \\ z+e^{i\theta_2}e^{\frac{i}{2}(\theta_1+\theta_2)}\bar{z}=e^{i\theta_2}+e^{\frac{i}{2}(\theta_1+\theta_3)}。 \end{cases}$$

其解爲

$$(3.13)\qquad I_{t_3}: z=-e^{\frac{i}{2}(\theta_2+\theta_3)}+e^{\frac{i}{2}(\theta_1+\theta_3)} + e^{\frac{i}{2}(\theta_1+\theta_2)}$$

§3.4 三直線所成的三角形之重心、外心、垂心及九點圓之中心

設

$$(3.14)\qquad zt_i+\bar{z}=\frac{t_i}{1+t_i}，\ i=1,2,3$$

爲所與之三直線l_i，$i=1,2,3$又設l_i，l_j（$i \neq j$）之交點以z_{ij} 表之。z_{12} 之座標可解下列方程組而得之：

$$\begin{cases} zt_1+\bar{z}=\dfrac{t_1}{1+t_1}, \\ zt_2+\bar{z}=\dfrac{t_2}{1+t_2}。 \end{cases}$$

把此二方程式邊邊相減可得

$$z(t_1-t_2)=\frac{(t_1-t_2)}{(1+t_1)(1+t_2)}$$

故

$$(3.15)\qquad z_{12}=\frac{1}{(1+t_1)(1+t_2)},$$

同理

$$z_{13}=\frac{1}{(1+t_1)(1+t_3)},$$

$$z_{23}=\frac{1}{(1+t_2)(1+t_3)}。$$

所與三直線所成的三角形爲以z_{12}，z_{13}，z_{23}爲

頂點之三角形。此三角形$\Delta z_{23}z_{13}z_{12}$之重心座標爲

$$\frac{1}{3}z_{23}+\frac{2}{3}\left(\frac{z_{12}+z_{13}}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{3(1+t_2)(1+t_3)}$$

$$+\frac{1}{3}\left[\frac{1}{(1+t_1)(1+t_2)}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{(1+t_1)(1+t_3)}\right]$$

$$=\frac{1}{3}\frac{1}{\pi_3}(3+s_1),$$

即

$$(3.16)\qquad z=\frac{3+s_1}{3\pi_3},$$

此處

$$(3.17)\qquad \pi_3=(1+t_1)(1+t_2)(1+t_3)。$$

$\Delta z_{23}z_{13}z_{12}$之外心爲線段$z_{12}z_{13}$之垂直平分線和線段$z_{13}z_{23}$之垂直平分線之交點。經過$z_{12}$、$z_{13}$二點之直線爲所與的第一直線故其方程式爲

$$zt_1+\bar{z}=\frac{t_1}{1+t_1}$$

線段$z_{12}z_{13}$之中點爲$\frac{1}{2}(z_{12}+z_{13})$。故線段$z_{12}z_{13}$之垂直平分線之方程式爲

$$zt_1-\bar{z}=\frac{1}{2}(z_{12}+z_{13})t_1$$

$$-\frac{1}{2}(\bar{z}_{12}+\bar{z}_{13})$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(1+t_1)(1+t_2)}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{(1+t_1)(1+t_3)}\right]$$

$$-\frac{1}{2}\left[\frac{t_1t_2}{(1+t_1)(1+t_2)}\right.$$

$$\left.+\frac{t_1t_3}{(1+t_1)(1+t_3)}\right]$$

$$=\frac{1}{2\pi_3}[(2+s_1-t_1)t_1$$

$$-t_1(s_1-t_1)-2s_3]$$

$$=\frac{t_1-s_3}{\pi_3}$$

即線段$z_{12}z_{13}$之垂直平分線爲

$$(3.18)\qquad zt_1-\bar{z}=\frac{t_1-s_3}{\pi_3}$$

同理線段$z_{13}z_{23}$之垂直平分線爲

$$(3.19)\qquad zt_2-\bar{z}=\frac{t_2-s_3}{\pi_3}$$

因此，這二個直線之交點爲

$$(3.20)\qquad z=\frac{1}{\pi_3}\ 。$$

此爲$\Delta z_{23}z_{13}z_{12}$之外心座標。

$\Delta z_{23}z_{13}z_{12}$之垂心座標。如上所述直線$z_{12}z_{13}$之方程式爲

$$zt_1+\bar{z}=\frac{t_1}{1+t_1}\ 。$$

從z_{23}向直線$z_{12}z_{13}$所作的垂線方程式爲

$$zt_1-\bar{z}=z_{23}t_1-\bar{z}_{23}$$

$$=\frac{t_1}{(1+t_2)(1+t_3)}$$

$$-\frac{t_2t_3}{(1+t_2)(1+t_3)}$$

$$=\frac{t_1-t_2t_3}{(1+t_2)(1+t_3)}$$

即

$$(3.21)\qquad zt_1-\bar{z}=\frac{t-t_2t_3}{(1+t_2)(1+t_3)}\ 。$$

同理，從z_{13}向直線$z_{12}z_{23}$所作的垂線方程式爲

$$(3.22)\qquad zt_2-\bar{z}=\frac{t_2-t_1t_3}{(1+t_1)(1+t_3)}\ 。$$

此二垂線之交點爲$\Delta z_{12}z_{23}z_{31}$之垂心。其座標可從(3.21)和(3.22)解$z$而得之。把(3.21)、(3.22)邊邊相減可得

$$(t_1-t_2)z=\frac{(t_1-t_2)(1+s_1)}{(1+t_1)(1+t_2)(1+t_3)}$$

故垂心之座標爲

$$(3.23)\qquad z=\frac{1+s_1}{\pi_3}$$

因爲九點圓之中心爲連接外心和垂心的線段之中點，故其座標爲

$$(3.24)\qquad z=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\pi_3}+\frac{1+s_1}{\pi_3}\right)=\frac{2+s_1}{2\pi_3}$$

§3.5 例題

例1：（Coolidge 定理）在一圓周上給了四點時，每次取其中三點就可得四個三角形。此四個三角形之九點圓之中心在一圓周上，且這四個九點圓交於一點。這四個九點圓之中心所在的圓稱爲四個九點圓之中心圓。

如果在原來的圓周上給了五點，則對於其中的各組四點可得其中心圓之中心。如此五個中心圓之中心在一圓周上，而這五個中心圓交於一點。我們可如此無限地繼續下去。

證明：不妨假設所考慮的圓爲單位圓。假設在單位圓上給了點 t_i（$i=1,2,3,4,\cdots\cdots$）。$\Delta t_1t_2t_3$ 之九點圓方程式爲

$$(3.25)\qquad z=\frac{1}{2}(t_1+t_2+t_3)-\frac{1}{2}t\ 。$$

同理，三角形 $\Delta t_1t_2t_4$、$\Delta t_1t_3t_4$、$\Delta t_2t_3t_4$ 之九點方程式分別爲

$$(3.26)\qquad z=\frac{1}{2}(t_1+t_2+t_4)-\frac{1}{2}t\ ,$$

$$(3.27)\qquad z=\frac{1}{2}(t_1+t_3+t_4)-\frac{1}{2}t\ ,$$

$$(3.28)\qquad z=\frac{1}{2}(t_2+t_3+t_4)-\frac{1}{2}t\ 。$$

現在考慮圓：

$$(3.29)\qquad z=\frac{1}{2}(t_1+t_2+t_3+t_4)-\frac{1}{2}t\ 。$$

如果依次置 $t=t_4$、$t=t_3$、$t=t_2$、$t=t_1$ 於 (3.29) 中，則依次可得 $z=\frac{1}{2}(t_1+t_2+t_3)$，……，$z=\frac{1}{2}(t_2+t_3+t_4)$等。這些點分別爲九點圓 (3.25)、(3.26)、(3.27)、(3.28)之中心。因此，四個九點圓之中心均在圓 (3.29) 上。

其次如果在 (3.25)、(3.26)、(3.27)、及 (3.28) 中依次代入 $t=-t_4$，$t=-t_3$，$t=-t_2$，$t=-t_1$，則均可得點 $z=\frac{1}{2}(t_1+t_2+t_3+t_4)$。故四個九點圓(3.25)，……，(3.28) 交於圓 (3.29) 之中心。其餘部分可同樣地證明之。

例2：（Steiner 定理）給了一個 4-直線時，各組三直線所成的四個三角形之外心在一圓周上。此圓稱爲所與 4-直線之中心圓。我們可無限地繼續下去，而可得一系列的定理。請看在前言中所提的「複數在平面幾何上之應用——從Miquel 定理到 Clifford 鏈」一文。

在例 2（Steiner 定理）中之敍述中所出現的「n-直線」（n-line）之定義如下：即

> 對於平面的 n 條直線，如果其中任何三直線均不爲共點，且其中任二直線均不爲平行，則如此的 n 條直線所成的集合稱爲一 n-直線（n-line）。

Steiner 定理之證明

設所與 4-直線中的四直線之方程式爲

$$(3.30)\qquad zt_i+\bar{z}=z_it_i\qquad i=1,2,3,4$$

即 $\dfrac{z}{z_i}+\dfrac{\bar{z}}{z_it_i}=1$，$t_i=\dfrac{\bar{z}_i}{z_i}$，$|t_i|=1$

先求二直線：

$$zt_1+\bar{z}=z_1t_1\ ,$$
$$zt_2+\bar{z}=z_2t_2$$

之交點 z_{12} 之座標。由此二方程式邊邊相減可得

$$(3.31)\qquad z_{12}=\frac{z_1t_1-z_2t_2}{t_1-t_2}=\frac{z_1t_1}{t_1-t_2}+\frac{z_2t_2}{t_2-t_1}\ 。$$

同理第二第三直線之交點 z_{23} ，第三，第一直線之交點 z_{31} 之座標爲

$$(3.31')\qquad \begin{cases} z_{23}=\dfrac{z_2t_2}{t_2-t_3}+\dfrac{z_3t_3}{t_3-t_2} \\ z_{13}=\dfrac{z_1t_1}{(t_1-t_3)}+\dfrac{z_3t_3}{t_3-t_1} \end{cases}$$

現在考慮：

$$(3.32)\qquad z=\frac{z_1t_1(t_1-t)}{(t_1-t_2)(t_1-t_3)}+\frac{z_2t_2(t_2-t)}{(t_2-t_1)(t_2-t_3)}+\frac{z_3t_3(t_3-t)}{(t_3-t_1)(t_3-t_2)}\ 。$$

此式表示：以

$$(3.33)\qquad a_1=\frac{z_1t_1^2}{(t_1-t_2)(t_1-t_3)}+\frac{z_2t_2^2}{(t_2-t_1)(t_2-t_3)}+\frac{z_3t_3^2}{(t_3-t_1)(t_3-t_2)}$$

爲中心，半徑爲 $|a_2|$ 之圓。此處

$$(3.34)\qquad a_2=\frac{z_1t_1}{(t_1-t_2)(t_1-t_3)}+\frac{z_2t_2}{(t_2-t_1)(t_2-t_3)}+\frac{z_3t_3}{(t_3-t_1)(t_3-t_2)}$$

如果代入 $t=t_1$ 於 (3.32) 中可得(3.31′)之第一式，故點 z_{23} 在圓(3.32)上。同理可證 z_{12} 、z_{13} 亦在圓 (3.32) 上。因此(3.32)爲第一、第二、第三等三直線所成的三角形 $\Delta z_{12}z_{23}z_{31}$ 之外接圓。又 (3.33) 式的 a_1 爲此外接圓之中心。

其次考慮：

$$(3.35)\qquad z=\frac{z_1t_1^2(t_1-t)}{(t_1-t_2)(t_1-t_3)(t_1-t_4)}+\frac{z_2t_2^2(t_2-t)}{(t_2-t_1)(t_2-t_3)(t_2-t_4)}+\frac{z_3t_3^2(t_3-t)}{(t_3-t_1)(t_3-t_2)(t_3-t_4)}+\frac{z_4t_4^2(t_4-t)}{(t_4-t_1)(t_4-t_2)(t_4-t_3)}$$

此式 (3.35) 表一圓。其中心之座標爲

$$\frac{z_1t_1^3}{(t_1-t_2)(t_1-t_3)(t_1-t_4)}+\frac{z_2t_2^3}{(t_2-t_1)(t_2-t_3)(t_2-t_4)}+\frac{z_3t_3^3}{(t_3-t_1)(t_3-t_2)(t_3-t_4)}+\frac{z_4t_4^3}{(t_4-t_1)(t_4-t_2)(t_4-t_3)}$$

而其半徑爲下列複數之絕對值：

$$\frac{z_1t_1^2}{(t_1-t_2)(t_1-t_3)(t_1-t_4)}+\frac{z_2t_2^2}{(t_2-t_1)(t_2-t_3)(t_2-t_4)}+\frac{z_3t_3^2}{(t_3-t_1)(t_3-t_2)(t_3-t_4)}+\frac{z_4t_4^2}{(t_4-t_1)(t_4-t_2)(t_4-t_3)}$$

如果在(3.35)式中代入 $t=t_4$ ，則得 $z=a_1$ 。故 $\Delta z_{12}z_{23}z_{31}$ 之外心在圓 (3.35) 上。同理，可證 $\Delta z_{12}z_{24}z_{41}$ ，$\Delta z_{13}z_{34}z_{41}$ ，$\Delta z_{23}z_{34}z_{42}$ 各三角形之外心亦均在圓 (3.35) 上。故 Steiner 定理得證。

—本文作者許振榮為中研院數學所研究員
呂素齡為中研院數學所助理研究員—