祖沖之何以偉大

石厚高

常有人提起：「祖沖之有什麼了不起，他計算的圓周率只正確到小數後第七位。」這個問題很有意思，現代的電腦只要幾分鐘就算到幾十萬位了，祖沖之比起來實在是差得太遠了。不過當我們知道（或想像）他的作法時，就不由得我們不肅然起敬了。

根據國立編譯館所編理科數學教學指引（上）第 68 頁的說法如下：

> 關於圓周率的計算，南北朝時代宋人祖沖之（429－500）最爲傑出，他得出了
>
> $$3.1415926 < \pi < 3.1415927$$
>
> 這個結果，也就是得出了小數點後面七位正確的值。至於這個結果是怎麼算出來的，由於記載這個結果的隋書律曆志文字過於簡略，使後人無法瞭解他的求法。不過，根據研究的結果，一般人以爲祖沖之大概也只能使用劉徽的割圓術；事實上，照劉徽的方法，算到正
>
> 24576 （$=6\times 2^{12}$）邊形，就可得出這個結果。因爲
>
> $$a_{24567} = 12288 \times 0.0002556634\cdots = 3.14159261\cdots$$
>
> $$A_{24576} = 24576 \times 0.0001278317\cdots = 3.14159267\cdots$$
>
> 利用
>
> $$a_{24576} < \pi < A_{24576}$$
>
> 就可得出所要的不等式

再看理科數學下册第 33 頁

> 早在人類開始發展數學的初期，就有許多問題需要講究開平方的技巧，最顯著的例子是阿基米德、劉徽等人計算圓周率近似值時所使用的方法。若 s_k 與 S_k 分別表示半徑爲 1 的內接正 k 邊形與外切正 k 邊形的邊長，則可得
>
> $$s_{2n} = \sqrt{2-\sqrt{4-s_n^2}}$$
>
> $$S_{2n} = \frac{1}{S_n}\left(\sqrt{16+4S_n}-4\right)$$
>
> 利用這兩個公式把正多邊形的邊數增加，就可估計 π 的值，既然要實地估計 π 的值，每個平方根都需要求得適當的近似值，所以，開平方法就不能缺少了。

現在讓我們來看一下祖沖之的工作是多麼的艱鉅。

算到了正24576邊形，邊長才能正確到小數後第7位，由於開平方是自小數點開始向左向右兩邊都是取兩位爲一組，每組在開平方之後只能得到一位整數，所以在算到了正12288邊形時，邊長至少要正確到小數後第 14 位，在算到正 24576 邊形時才能使邊長正確到小數後第7位，仿此類推列表如下：

圓內接正多邊形邊數	小數點後正確位數
24576	7
12288	14
6144	28
3072	56
1536	112
768	224
384	448
192	896
96	1792
48	3584
24	7168
12	14336
6	28672

從這個表可以知道，祖沖之在計算正六邊形的邊長時，至少正確至小數後28672位，小數後28672 位！當然是很艱鉅的工程。

民國七十一年三月十三日中央日報副刊有一篇姚燮夔的文章〔綴術的聯想〕，有這樣的描述

> 綴術是我國南北朝時代，數學家祖沖之所著的五卷算經……綴術的內容相當深奧，但深奧到什麼程度，就不得而知了……隋書律曆志對綴術有一段簡之又簡的記載：「祖沖之更開密法，以圓徑一億爲一丈，圓周盈數三丈一尺四寸一分五厘九毫二絲七忽，朒數三丈一尺四寸一分五厘九毫二絲六忽，正數於盈朒之間。」這段記載，旨在說明，祖沖之以密法算出圓周率的眞値，介於3.1415927與3.1415926之間……密法所謂的密，乃指精密之密，不是秘密之密……我曾閉目沉思，堅信祖沖之根本沒有採具體繪圖的形式，因爲具體繪圖無非爲了便於實際測量，然而，若憑雙手兩目，以尺規之類的工具去實際測量二萬多邊中任何一邊的長度，失之毫厘，差以千里，始則費時，終必失事。

「終必失事」說得眞是好。十九世紀英國數學家尙克斯把圓周率計算到小數第707位，可是第528位算錯了，爲「終必失事」下了最好註脚。

祖沖之爲了求得圓周率小數後的第7位正確値，把正六邊形的邊長計算至小數後28672位是很了不起的，一般教科書或坊間參考書都沒有提到這一點，筆者把它寫下來請數播讀者指正。

—本文作者任教於建國中學—