11402 巴斯卡三角形 （張鎮華提供）

巴斯卡三角形中各數若用除以 3 的餘數代替，何處為 0 ？何處為 1 ？何處為 2 ？（註：若用 2 除，結果參見數播十卷二期第 10 頁「組合數學與電腦的關係」。）

解答：（胡豐榮、張鎮華提供）

設 n 、 k 為自然數（ $n \geqslant k$ ），它們的三進位表示法分別為 $n = a_p a_{p-1} \cdots\cdots a_2 a_1 a_0$， $k = b_q b_{q-1} \cdots\cdots b_2 b_1 b_0$ ，同時令 $n' = a_{p-1} a_{p-2} \cdots\cdots a_2 a_1 a_0$ ， $m = a_q a_{q-1} \cdots\cdots a_2 a_1 a_0$ 。

定義：如果 $n < k$ ，則 $C^n_k = 0$

之後我們有以下定理：

定理 1：若 $p>q$，則 $C_k^n \equiv C_k^n$ (mod 3)

證明：

$\because C_k^n = C_k^{n'} + [C_{k-1}^{n-1} + C_{k-1}^{n-2} + \cdots\cdots C_{k-1}^{n-a_p\cdot 8^p}]$
(註 1) $\therefore C_k^n - C_k^{n'} = C_{k-1}^{n-1} + C_{k-1}^{n-2} + \cdots + C_{k-1}^{n-a_p\cdot 3^p}$

因 $C_k^n - C_k^{n'} =$

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)-n'(n'-1)\cdots(n'-k+1)}{k!}$$

且 $n = a_p \cdot 3^p + n'$

$\therefore C_k^n - C_k^{n'} =$

$$\frac{a_p\cdot 3^p[(a_p\cdot 3^p)^{k-1} + d(k,1)(a_p\cdot 3^p)^{k-2} + \cdots}{k!}$$

$$\frac{d(k,k-1)]}{}$$

此處 $d(k,i)$ 表示從 n',$(n'-1)$,$\cdots(n'-k+1)$ 中任選 i 個乘積的總和。

令 $k! = 3^r \cdot x$, $(3,x)=1$, $d(k,k) = 3^s \cdot y$ $(3,y)=1$ $d(k,i) = 3^{\alpha_i}\cdot z_i$, $(3,z_i)=1$，則有 $\alpha_i \geqslant S - [(p-1)+(p-2)+\cdots\cdots+(p+i-k)]$ (註 2) 且 $S \geqslant r$ (註 3) $\therefore$ $C_k^n - C_k^{n'} =$

$$\frac{a_p\cdot 3^p[a_p^{k-1}3^{p(k-1)} + a_p^{k-2}z_1 3^{p(k-2)} + \cdots + 3^{\alpha_{k-1}}z_{k-1}}{k!}$$

觀察分子中每一項 3 的次方數，於是有：

$$\alpha_i + p(k-i) > S - \frac{(2p+i-k-1)(k-i)}{2}$$

$$+p(k-i) = S + \frac{(k-i)(k-i+1)}{2} > r$$

因爲在這裏次方數都在自然數中討論，

$\therefore$ $C_k^n - C_k^{n'} = 3Q$, $Q \in N$

$\therefore$ $C_k^n \equiv C_k^{n'}$ (mod 3)

系理：若 $p>q$，則 $C_k^n \equiv C_k^m$ (mod 3)

證明：使用歸納法和定理 1。

定理 2：若 $n = a_p a_{p-1} \cdots\cdots a_2 a_1 a_0$，

$k = a_p \cdot b_{p-1} \cdots\cdots b_2 b_1 b_0$，

$n' = a_{p-1} a_{p-2} \cdots\cdots a_2 a_1 a_0$，

$k' = b_{p-1} b_{p-2} \cdots\cdots b_2 b_1$ 則

$C_k^n \equiv C_k^{n'}$ (mod 3)

證明：$\because C_k^n = C_{a_p\cdot 3^p + n'}^{a_p\cdot 3^p + n'} = C_{n'-k'}^{a_p\cdot 3^p + n'}$ 根據定理 1

得 $C_{n'-k'}^{a_p\cdot 3^p+n'} \equiv [C_{n'-k'}^{n'} = C_{k'}^{n'}]$ (mod 3)

$\therefore C_k^n \equiv C_{k'}^{n'}$ (mod 3)

定理 3：$C_{n'+3^p}^{n'+2\cdot 3^p} \equiv C_{3^p}^{2\cdot 3^p} \equiv 2$ (mod 3)

證明：$\because$ $C_m^r \cdot C_k^m = C_k^r \cdot C_{m-k}^{r-k}$，

$\therefore$ $C_{2\cdot 3^p}^{2\cdot 3^p+n'} \cdot C_{3^p}^{2\cdot 3^p} = C_{3^p}^{2\cdot 3^p+n'} \cdot C_{3^p}^{3^p+n'}$

$\because$ $C_{2\cdot 3^p}^{2\cdot 3^p+n'} \equiv C_0^{n'}$ (mod 3)

i.e. $C_{2\cdot 3^p}^{2\cdot 3^p+n} \equiv 1$ (mod 3)

同理 $C_{3^p}^{3^p+n'} \equiv 1$ (mod 3)

$\therefore$ $C_{n'+3^p}^{n'+2\cdot 3^p} \equiv C_{3^p}^{2\cdot 3^p}$

因 $\sum_{k=0}^{n}(C_k^n)^2 = C_n^{2n}$

$\therefore \sum_{k=0}^{3^p}(C_k^{3^p})^2 = C_{3^p}^{2\cdot 3^p}$ 根據定理 1 和

定義 1，我們得：

$\sum_{k=0}^{3^p}(C_k^{3^p})^2 \equiv C_0^{3^p} + C_{3^p}^{3^p}$ (mod 3)

i.e. $C_{3^p}^{2\cdot 3^p} \equiv 2$ (mod 3)

定理 4：$C_{3^p+k'}^{2\cdot 3^p+n'} \equiv 2\cdot C_{k'}^{n'}$ (mod 3) 此處 n', k' 同定理 2 的假設。

證明：$\because C_m^r \cdot C_k^m = C_k^r \cdot C_{m-k}^{r-k}$

$\therefore C_{3^p+k'}^{2\cdot 3^p+n'} \cdot C_{3^p}^{3^p+k'} = C_{3^p}^{2\cdot 3^p+n'} \cdot C_{k'}^{3^p+n'}$

$\because C_{3^p}^{3^p+k'} \equiv C_0^{k'}$ (mod 3)

$C_{k'}^{3^p+n'} \equiv C_{k'}^{n'}$ (mod 3)

$\therefore C_{3^p+k'}^{2\cdot 3^p+n'} \equiv C_{3^p}^{2\cdot 3^p+n'} \cdot C_{k'}^{n'}$ (mod 3)

$\therefore C_{3^p+k'}^{2\cdot 3^p+n'} \equiv 2\cdot C_{k'}^{n'}$ (mod 3)

定理 4 告訴我們，若 $\pi = (1,2)$，$\pi(1) = 2$，$\pi(2) = 1$，則 $C_{3^p+k'}^{2\cdot 3^p+n'} \equiv \pi(C_{k'}^{n'})$

(mod 3)

由以上 4 個定理，我們得到這樣的結論：

將 $n=a_p a_{p-1}\cdots\cdots a_1 a_0$（三進位）

$k=b_p b_{p-1}\cdots\cdots b_1 b_0$（三進位）

$$\binom{n}{k}\equiv\binom{a_p}{b_p}\binom{a_{p-1}}{b_{p-1}}\cdots\cdots\binom{a_1}{b_1}\binom{a_0}{b_0} \pmod 3$$

也就是

(1)存在某個 i 使 $a_i<b_i$ 時 $\binom{n}{k}\equiv 0 \pmod 3$

(2)所在 $a_i\geqslant b_i$ 且設有 q 個 i 具有 $a_i=2$，$b_i=1$，則

$$\binom{n}{k}=\begin{cases}1 & \text{若 } q \text{ 為偶數。}\\ 2 & \text{若 } q \text{ 為奇數。}\end{cases}$$

更一般的問題可以參考D.E. Knuth所著的The Art of Computer Programming第一冊第 68頁習題 10(e)(f)，並參考該書第482頁的解答，或者N. J. Fine 在*American Mathematical Mothly* 54 (1947), 589～592的文章。簡記，可以證明：若 p 爲質數

且 $n=a_r p^r+\cdots\cdots+a_1 p+a_0$，

$k=b_r p^r+\cdots\cdots+b_1 p+b_0$，

其中各 $0\leq a_i<p$ 且 $0\leq b_i<p$，

則 $\binom{n}{k}\equiv\binom{a_r}{b_r}\cdots\cdots\binom{a_1}{b_1}\binom{b_0}{a_0} \pmod p$

註 1：連續應用帕斯卡公式：

$$C_k^{r+k+1}=C_k^{r+k}+C_{k-1}^{r+k}$$

註 2：因 n'，$n'-1$，……$n'-k+1$ 中 3 的次方數最大是 $p-1$，所以 $d(k,i)$ 中 3 的次方數最少的情況是在 $S-[(p-1)+(p-2)+\cdots\cdots+(p+i-k)]$ 因此 $\alpha_i\geqslant S-[(p-1)+(p-2)+\cdots\cdots+(p+i-k)]$

註 3：$\because S=[\frac{n'}{3}]+[\frac{n'}{3^2}]+\cdots\cdots+[\frac{n'}{3^p}]-\{[\frac{n'-k}{3}]+[\frac{n'-k}{3^2}]+\cdots+[\frac{n'-k}{3^t}]\}$ $t<p$

$\geq r+[\frac{n'}{3^{t+1}}]+[\frac{n'}{3^{t+2}}]+\cdots[\frac{n'}{3^p}]\geqslant r$

等號建立在 $t=p$ 的時候。

$(\because if\ [\frac{n'}{3^l}]=a$，則 $a\leqslant\frac{n'}{3^l}<a+1$

$\therefore a-\frac{k}{3^l}\leqslant\frac{n'-k}{3^l}<a+1-\frac{k}{3^l}$

$\because a-[\frac{k}{3^l}]-1<a-\frac{k}{3^l}\leqslant\frac{n'-k}{3^l}$

$<a+1-\frac{k}{3^l}\leqslant a+1-[\frac{k}{3^l}]$

$\therefore a-[\frac{k}{3^l}]-1<\frac{n'-k}{3^l}<a+1-[\frac{k}{3^l}]$

$\therefore a-[\frac{k}{3^l}]-1\leqslant[\frac{n'-k}{3^l}]<a+1-[\frac{k}{3^l}]$

$\therefore [\frac{k}{3^l}]-a-1<-[\frac{n'-k}{3^l}]\leqslant[\frac{k}{3^l}]-a+1$

$\because [\frac{n'-k}{3^l}]\in Z$

$\therefore [\frac{k}{3^l}]-a\leqslant-[\frac{n'-k}{3^l}]<[\frac{k}{3^l}]-a+2$

$\therefore [\frac{k}{3^l}]\leqslant[\frac{n'}{3^l}]-[\frac{n'-k}{3^l}]<[\frac{k}{3^l}]+2$

$\because [\frac{n'}{3^l}]-[\frac{n'-k}{3^l}]\in Z$

$\therefore [\frac{n'}{3^l}]-[\frac{n'-k}{3^l}]=[\frac{k}{3^l}]$ 或

$[\frac{k}{3^l}]+1=[\frac{n'}{3^l}]-[\frac{n'-k}{3^l}]$

$\therefore S\geqslant r+[\frac{n'}{3^{t+1}}]+[\frac{n'}{3^{t+2}}]+\cdots\cdots$

$[\frac{n'}{3^p}]\geqslant r$)