上期徵答問題

優勝名單

11401　優勝名單

特優：李昆育

優良：胡豐榮

　　　李維昌等三人

問題詳解

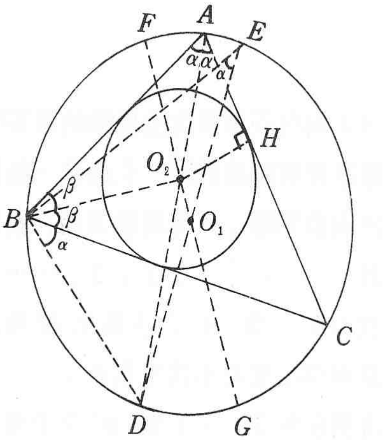
11401　兩內離圓夾住三角形的條件

（鄭再添提供）

任意三角形都存在有一內切圓，也同時會有一外接圓；這時，我們不妨稱此二內離的圓“夾住”該三角形。試問：任意兩內離圓能夾住三角形的充要條件爲何？

解答：（鄭再添提供）

如圖一所示：$\triangle ABC$ 的外接圓圓O_1，內切圓圓O_2，則必有$\overline{O_1O_2}=d$，$d^2=R^2-2rR$（R爲圓O_1半徑，r爲圓O_2半徑）。



圖一

證明：1.連$\overrightarrow{AO_2}$與圓O_1交點於D，再連$\overrightarrow{DO_1}$與圓O_1交於E點，則$\overline{AD}$平分$\angle BAC$，$\overline{DE}=2R$；

2.連$\overline{BO_2}$、$\overline{BD}$、$\overline{BE}$，則$\overline{BO_2}$平分$\angle ABC$，且$\angle BED=\angle BAD$，$\angle CBD=\angle DAC$(對同弧之圓周角);

3.由1、2知　$\angle BED=\angle BAD=\angle DAC=\angle CBD=\alpha$，且$\angle ABO_2=\angle O_2BC=\beta$，故有$\angle BO_2D=\alpha+\beta$　（外角定理）

$$=\angle O_2BD$$

即　$\overline{DB}=\overline{DO_2}$

4.連$\overrightarrow{O_1O_2}$，與圓O_1交於F、G兩點，則由圓的內冪性質知

$$\overline{AO_2}\times\overline{DO_2}=\overline{FO_2}\times\overline{GO_2}$$

$=(R-d)(R+d)=R^2-d^2$；

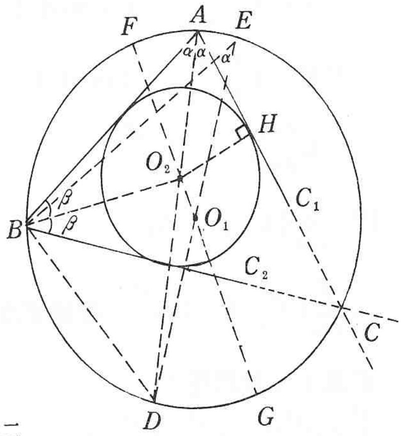
5. 由 3、4 知 $\overline{AO_2}\times\overline{DB}=R^2-d^2$；又因 $\angle AHO_2=90^\circ=\angle EBD$，而 $\overline{AO_2}=\overline{O_2H}/\sin\alpha=r/\sin\alpha$，$\overline{DB}=\overline{DE}\times\sin\alpha=2R\sin\alpha$；

故得 $2rR=R^2-d^2$，

即 $d^2=R^2-2rR$ 得證。

反之，若兩內離圓的連心距為 d，$d=\sqrt{R^2-2rR}$，則兩圓間恰可夾住三角形！

證明：



圖二

參見圖二，已知 $\overline{O_1O_2}=\sqrt{R^2-2rR}$，圓 O_2 的切線 $\overleftrightarrow{AB}$ 交圓 O_1 於 A、B 兩點，且 $\overleftrightarrow{AC_1}$、$\overleftrightarrow{BC_2}$ 亦為圓 O_2 的兩切線，則

1. 連 $\overrightarrow{AO_2}$ 交圓 O_1 於 D，得 $\angle BAD=\angle DAC_1=\alpha$；又連 $\overline{BO_2}$，得 $\angle ABO_2=\angle O_2BC_2=\beta$；
2. 作圓 O_1 直徑 $\overline{DE}$，再連 $\overline{BE}$，則 $\angle BED=\angle BAD=\alpha$；
3. 因 $\triangle AO_2H$ 及 $\triangle EBD$ 皆為直角三角形，故有 $\sin\alpha=\dfrac{\overline{HO_2}}{\overline{AO_2}}=\dfrac{\overline{BD}}{\overline{ED}}$，

   即 $\overline{AO_2}\times\overline{BD}=2Rr$；
4. 又由圓的內冪性質及已知 $\overline{O_1O_2}=\sqrt{R^2-2rR}$ 可得

   $\overline{AO_2}\times\overline{DO_2}=(R-\sqrt{R^2-2rR})(R+\sqrt{R^2-2rR})=2rR$

5. 故知　$\overline{DO_2} = \overline{BD}$ ，

即　$\angle O_2BD = \angle BO_2D = \alpha + \beta$

（外角性質）

6. $\therefore$　$\angle DBC_2 = \alpha = \angle DAC_1$ 。

因此可知，$\overrightarrow{AC_1}$、$\overrightarrow{BC_2}$ 必與圓 O_1 交於同一點 C 。即，兩圓夾住 $\triangle ABC$ 得證。

總而言之，關鍵在於連心距 d ，以關係式 $d = \sqrt{R^2 - 2rR}$ 來界定兩圓欲夾住三角形的正確位置所在。若 R 值固定，則內圓半徑 r 的範圍爲 $0 < r \leqslant \frac{1}{2}R$ 。（$\because R^2 - 2rR \geqslant 0$）

特別地，當 $r = \frac{1}{2}R$ 時，$d = 0$ ，即兩圓心重合，此時 $\triangle ABC$ 是爲正三角形。

值得一提的是，由證明過程中當可發現："若兩圓能夾住一個三角形，則同時能夾住無限多個三角形"這些三角形將兩圓間整個區域塡滿！

（註：大圓圓心 O_1 在圓 O_2 上或圓外之情形證法類似，故不另贅述。）