5.從極圖映射看交點問題的一道演題

陸 思 明

本文作者退休前爲省立板橋中學數學教師

大單元: 極座標 小單元: 極圖 題型: 交點問題

來源: 實驗本第五冊習題1-4第1題

題目 (I)

求聯立極方程式：$\begin{cases} r=1-\cos\theta\cdots\cdots\text{(心臟線)} \\ r=\cos\theta\cdots\cdots\cdots\text{(圓)} \end{cases}$

的所有交點，並檢驗這兩方程式在 (θ, r) - 平面上的兩軌跡 Λ, Γ 是否滿足: $\gamma(\Lambda\cap\Gamma)=\gamma(\Lambda)\cap\gamma(\Gamma)$? 其中$\gamma$爲極圖映射。

詳解:

(一) 想法:

首先考慮:

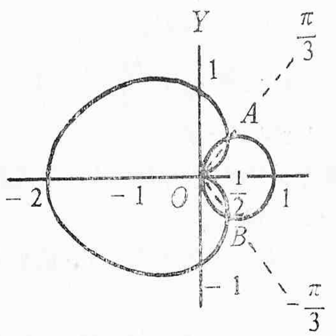
1. 圓的極方程式 $r=\cos\theta$ 是良性的，故

$$\begin{cases} r=1-\cos\theta \\ r=\cos\theta \end{cases}$$

的所有公解 r,θ 作成的極座標 $[r,\theta]$ 即爲極平面上所有非原點的交點。(以式子表示就是除原點外 $\gamma(\Lambda\cap\Gamma)=\gamma(\Lambda)\cap\gamma(\Gamma)$ 其中γ表極圖映射)。

2. 檢驗原點 $[0,0]$ 是否在極圖上?

3. 直接用描圖法將二者在極平面上的圖形描示如下: (圖形顯示出有 A,B,O 三個交點)。



(二) 處理步驟:

$\boxed{1}$ 由 $\begin{cases} r=1-\cos\theta\cdots\cdots① \\ r=\cos\theta\cdots\cdots\cdots\cdots② \end{cases}$ 其中①的軌跡以Λ表之，②的軌跡以Γ表之。

將②代入①得: $r=1-r$ 即 $r=1/2$ ………………③

將③代入②解得: $\theta=2n\pi\pm\pi/3$, 其中 $n\in Z$

可見在(θ,γ) - 平面上 Λ 與 Γ 的交點 (即 $\Lambda\cap\Gamma$) 是 $(2n\pi\pm\pi/3,\ 1/2)$

即 $\Lambda\cap\Gamma=\{(\theta,1/2)\mid\theta=2n\pi\pm\pi/3, n\in Z\}$………④

$\boxed{2}$ 由④求知: $\gamma(\Lambda\cap\Gamma)=\{[1/2,2n\pi\pm\pi/3]\mid n\in Z\}$ ……⑤

但對任意$n\in Z$, $[1/2,2n\pi+\pi/3]$ 與 $[1/2,\pi/3]$ 表同一點·又$[1/2,2n\pi-\pi/3]$ 與 $[1/2,\pi/3]$ 表同一點·故⑤式可簡化爲:

$\gamma(\Lambda\cap\Gamma)=\{[1/2,\pi/3],[1/2,-\pi/3]\}$ ………⑥

$\boxed{3}$ 因②式是良性的，故除原點外，我們有

$\gamma(\Lambda)\cap\gamma(\Gamma)=\gamma(\Lambda\cap\Gamma)$ ………………⑦

$\boxed{4}$ 因 $[0,0]$ 滿足①或 $[0,\pi/2]$ 滿足②而 $[0,0]$ 與 $[0,\pi/2]$ 均表原點 (極O)

故 極$O\in\gamma(\Lambda)\cap\gamma(\Gamma)$

$\boxed{5}$ 合併而得 $\gamma(\Lambda)\cap\gamma(\Gamma)=\gamma(\Lambda\cap\Gamma)\cup\{\text{極}O\}$………⑧

故 $\gamma(\Lambda)\cap\gamma(\Gamma)\neq\gamma(\Lambda\cap\Gamma)$。

並圖示如下:

在 (θ,γ) -平面中，顯示出 $\Lambda\cap\Gamma=\{(2n\pi\pm\pi/3,1/2)\mid n\in Z\}$,

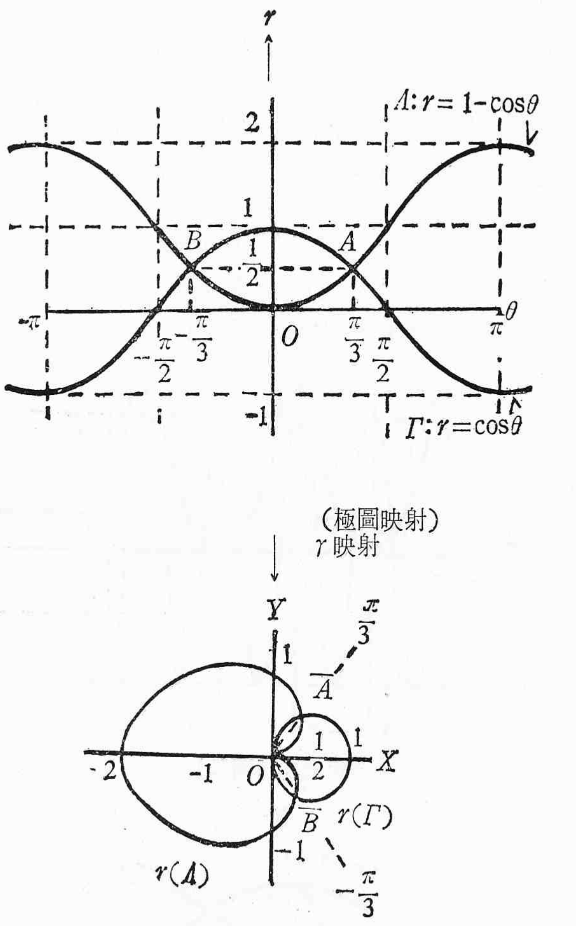
圖中只描出了兩點 $A=(\pi/3,1/2)$; $B=(-\pi/3,1/2)$

在極平面中$\Lambda\cap\Gamma$經r映射的映像爲;

$\gamma(\Lambda\cap\Gamma)=\{[1/2,\pi/3],\ [1/2,-\pi/3]\}=\{\bar{A},\bar{B}\}$ 兩點

但顯然 $\gamma(\Lambda)\cap\gamma(\Gamma)=\{\bar{A},\bar{B},0\}$.

故 $\gamma(\Lambda\cap\Gamma)\neq\gamma(\Lambda)\cap\gamma(\Gamma)$



題目 (II);

求聯立極方程式 $\begin{cases} r=\dfrac{1}{1-\cos\theta} \cdots\cdots \text{(拋物線)} \\ r=2\cos 2\theta \cdots\cdots\cdots \text{(四瓣玫瑰線)} \end{cases}$

在極平面上的所有交點，並檢驗這兩者在 (θ, r)- 平面上的軌跡 Λ, Γ 是否滿足 $\gamma(\Lambda\cap\Gamma)=\gamma(\Lambda)\cap\gamma(\Gamma)$? 其中 γ 表極圖映射。

詳解:

(一) 想法: 首先考慮:

由 $\begin{cases} r=\dfrac{1}{1-\cos\theta} \cdots\cdots ① \\ r=2\cos 2\theta \cdots\cdots ② \end{cases}$ 消去 θ 後得出一個 r 的三次方程式:

$$r^3-2r^2+8r-4=0 \cdots\cdots ③$$

③式的實根卽爲①,②所表圖形 Λ, Γ 在 (θ, r) 平面上的 r 座標。但③式究有幾個實根? 涉及到卡丹公式的判別式 $D=(q/\sqrt{2})^2+(p/\sqrt{3})^3$ 的正負問題。這一部份的知識在高三下第六册 115 頁 (實驗本) 始概略提到, (亦未討論判別式)。

故本題對高三上同學而言似有知識背景不足之困擾。

(二) 處理步驟:

$\boxed{1}$ 由 $\begin{cases} \Lambda: r=\dfrac{1}{1-\cos\theta} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ① \\ \Gamma: r=2\cos 2\theta \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$

而①式卽 $\cos\theta=(r-1)/r \cdots\cdots\cdots\cdots ③$

$\therefore\ 2\cos 2\theta=2(2\cos^2\theta-1)\overset{③}{=\!=}2[2((r-1)/r)^2-1]$
$=4(r-1)^2/r^2-2 \cdots\cdots\cdots\cdots ④$

④式代入②式整理後得

$$r^3-2r^2+8r-4=0 \quad \cdots\cdots ⑤$$

$\boxed{2}$ 令 $f(r)=r^3-2r^3+8r-4$

則 導函數 $f'(r)=3r^2-4r+8$

其判別式 $=(-4)^2-4(3)(8)<0$

故 $\forall r\in R,\ f'(r)>0$

由是知 $f(r)$ 爲絕對增函數，進而知 $y=f(r)$ 的圖形與 $y=0$ 的圖形至多有一交點。

所以 $f(r)=r^3-2r^2+8r-4=0$ 恰有一實根。

$\boxed{3}$ 由③式知: $|(r-1)/r|\leq 1$

化簡整理後得 $-2r+1\leq 0$ 解 r 得: $r\geq 1/2 \cdots\cdots ⑥$

$\boxed{4}$ 由中間值定理: $f(1/2)\cdot f(1)=(-3/8)\,3<0$ 得知: ⑤式確有唯一的實根 $r_0\in(1/2,1)$，其中 r_0 之值可由卡丹公式求得: (其實 $r_0\approx 0.55576$)。

$\boxed{5}$ 代入③式得: $\cos\theta=(r_0-1)/r_0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑦$

令 θ_0 表滿足⑦式之 θ 的主值卽 $\cos^{-1}((r_0-1)/r_0)$

則: $\theta=2n\pi\pm\theta_0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 甲

$\boxed{6}$ 解①,②: $(\theta, r)=(2n\pi\pm\theta_0, r_0)$

卽 $(\Lambda\cap\Gamma)=\{(2n\pi\pm\theta_0, r_0)\mid n\in\mathbf{Z}\}$

故 $\gamma(\Lambda\cap\Gamma)=\{[r_0, 2n\pi\pm\theta_0]\mid n\in\mathbf{Z}\}$

上述集合是 Λ 與 Γ 在 (θ, r)- 平面上的交點經極圖映射 γ 帶到極平面上後的像點，卽:

$$\gamma(\Lambda\cap\Gamma)=\{[r_0, \theta_0], [r_0, -\theta_0]\} \cdots\cdots\cdots\cdots ⑧$$

$\boxed{7}$ 顯然①式所表的圖形 Λ 不過原點，故:

$$\gamma(\Lambda)\cap\gamma(\Gamma)=\gamma(\Lambda_{2n}\cap\Gamma)\cap\gamma(\Lambda^*_{2n+1}\cap\Gamma) \cdots\cdots ⑨$$

其中 Λ_{2n}: $r=\dfrac{1}{1-\cos(2n\pi+\theta)} \Longrightarrow r=\dfrac{1}{1-\cos\theta}$

卽 $\gamma(\Lambda_{2n}\cap\Gamma)=\gamma(\Lambda\cap\Gamma) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑩$

又 Λ^*_{2n+1} $-r=\dfrac{1}{1-\cos(2n\pi+\pi+\theta)}$

$$\Longrightarrow -r=\frac{1}{1+\cos\theta} \Rightarrow \cos\theta=-\left(\frac{r+1}{r}\right) \cdots ⑪$$

再由②得 $r=2\cos2\vartheta=4\cos^2\theta-2\xlongequal{⑪}4\left(-\dfrac{r+1}{r}\right)^2$

$$-2=\frac{2r^2+8r+4}{r^2}$$

即: 整理後得: $r^3-2r^2-8r-4=0$ ……⑫

$\boxed{8}$ 由⑪式及 $|\cos\theta|\leq 1$ 的性質得: $|r+1|\leq|r|$
經平方整理得: $r\leq -1/2$ ……⑬
利用勘根定理求 r 滿足⑫, ⑬的實根知 r 有二實根分別介於 $-1/2$ 與 -1 及 -1 與 -2 之間。
設此二根爲 r_1 及 r_2 其中 $r_1\in(-1,-1/2)$, $r_2\in(-2,-1)$

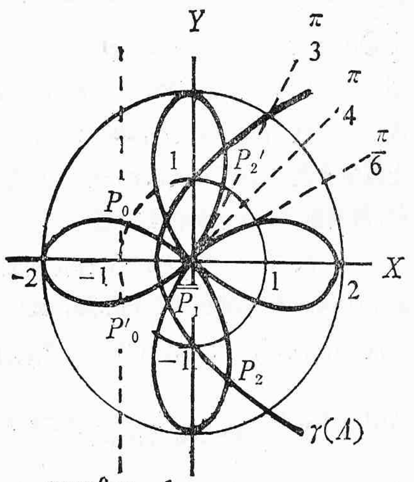
$\boxed{9}$ 代入⑪得 $\cos\vartheta=-(r_1+1)/r_1$ 或 $-(r_2+1)/r_2$
故: $\theta=2n\pi\pm\theta_1$ 或 $2n\pi\pm\theta_2$

其中: $\begin{cases}\theta_1=\cos^{-1}\left(-\dfrac{r_1+1}{r_1}\right)\text{的主值}\\ \theta_2=\cos^{-1}\left(-\dfrac{r_2+1}{r_2}\right)\text{的主值}\end{cases}$

$\boxed{10}$ 故: $\Lambda^*_{2n+1}\cap\Gamma=\{(2n\pi\pm\theta_1,r_1),(2n\tau\pm\theta_2,r_2)\}$
即: $\gamma(\Lambda^*_{2n+1}\cap\Gamma)=\{[r_1,\theta_1],[r_1,-\theta_1],[r_2,\theta_2],[r_2,-\theta_2]\}$ (含 4 個交點) ……⑭

$\boxed{11}$ 把⑩與⑭代入⑨得:
$\gamma(\Lambda)\cap\gamma(\Gamma)=\{[r_0,\theta_0],[r_0-\theta_0],[r_1,\theta_1],[r_1,-\theta_1],[r_2,\theta_2],[r_2,-\theta_2]\}$ (含 6 個交點)…⑮
而由⑧式知 $\gamma(\Lambda\cap\Gamma)$ 僅含 2 交點。
故 $\gamma(\Lambda\cap\Gamma)\neq\gamma(\Lambda)\cap\gamma(\Gamma)$.

$\boxed{12}$ 實際描出圖形如下:



(圖一)

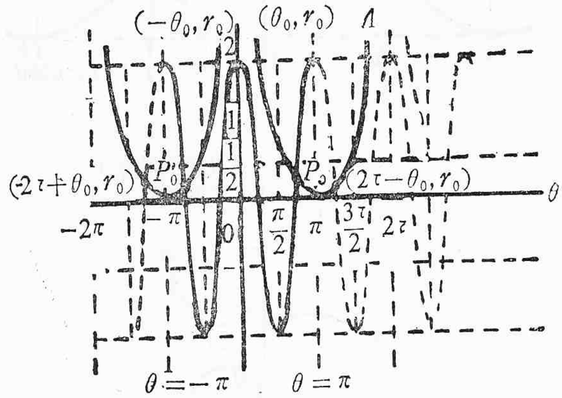
$\begin{cases}\Lambda: r=\dfrac{1}{1-\cos\theta}\text{……(拋物線)}\\ \Gamma: r=2\cos2\vartheta\text{……(四瓣玫瑰線)}\end{cases}$

其中 $\bar{P}_0=[r_0,\theta_0]$, $\bar{P}'_0=[r_0,-\theta_0]$
$\bar{P}_1=[r_1,\theta_1]$, $\bar{P}'_1=[r_1,-\theta_1]$
$\bar{P}_2=[r_2,\theta_2]$, $\bar{P}_2'=[r_2,-\theta_2]$

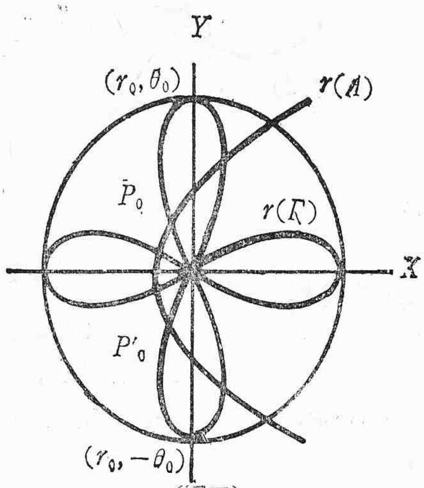
$\boxed{13}$ 現在我們再在 (θ,r) -平面上描出:

$\begin{cases}\Lambda: r=\dfrac{1}{1-\cos\theta}\\ \Gamma: r=2\cos2\vartheta\end{cases}$

的圖形和它的極圖作一個對照



γ映射↓ (圖二)



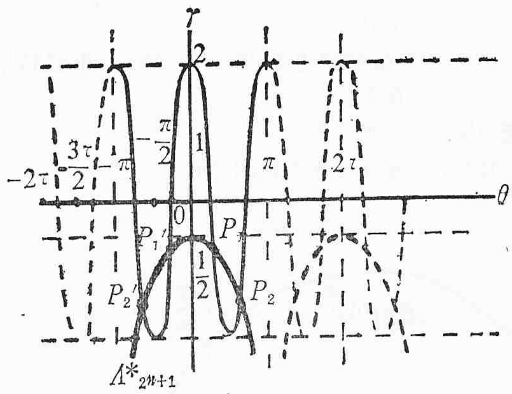
(圖三)

在 (θ,r) -平面中 Λ 與 Γ 的圖形。

$\begin{cases}\Lambda: r=\dfrac{1}{1-\cos\theta}=\dfrac{1}{2\sin^2\dfrac{\theta}{2}}=\dfrac{1}{2}\csc^2\dfrac{\theta}{2}\\ \Gamma: r=2\cos2\theta\end{cases}$

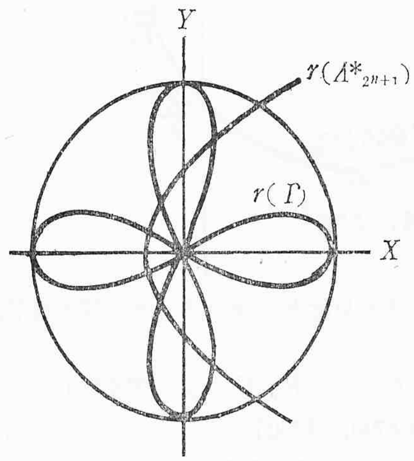
顯示: $\Lambda\cap\Gamma=\{(2n\pi\pm\theta_0,r_0)\,|\,n\in Z\}$
θ 在區間 $[-\pi,\pi]$ 內 Λ 與 Γ 的交點爲 $P_0(\theta_0,r_0)$ 及 $P'_0(-\theta_0,r_0)$
極平面中 $\Lambda\cap\Gamma$ 經γ映射後的像點是:
$\gamma(\Lambda\cap\Gamma)=\{[r_0,\theta_0],[r_0,-\theta_0]\}=\{\bar{P}_0,\bar{P}'_0\}$
其中: $\bar{P}_0=\gamma(2n\pi+\theta_0,r_0)$
$\bar{P}'_0=\gamma(2n\pi-\theta_0,r_0)$.

故: $\gamma(\Lambda_{2n}\cap\Gamma)=\gamma(\Lambda\cap\Gamma)=\{\bar{P}_0,\bar{P}'_0\}$



$\downarrow\gamma$映射

(圖四)



(圖五)

(θ,r) -平面上 Λ^*_{2n+1} 與Γ的圖形

$$\begin{cases}\Lambda^*_{2n+1}: -r=\dfrac{1}{1-\cos(2n\pi+\pi+\theta)}=\dfrac{1}{2}\sec^2\dfrac{\theta}{2}\\ \Gamma\ :\ r=2\cos2\theta\end{cases}$$

圖中 $\Lambda^*_{2n+1}\cap\Gamma=\{(2n\pi\pm\theta_1,r_1)\}\cup\{(2n\pi\pm\theta_2,r_2)\}$ 四點 $P_1(\theta_1,r_1),P'_1(-\theta_1,r_1),P_2(\theta_2,r_2),P'_2(-\theta_2,r_2)$ 表在區間 $[-\pi,\pi]$ 內 Λ^*_{2n+1} 與 Γ 的交點極平面上 $\gamma(\Lambda^*_{2n+1}\cap\Gamma)$ 所表的點是 $\bar{P}_1,\bar{P}'_1,\bar{P}_2,\bar{P}'_2$

而 $\bar{P}_1=\gamma(P_1)=\gamma(2n\pi\pm\theta_1,r_1)$

$\bar{P}'_1=\gamma(P'_1)=\gamma(2n\pi-\theta_1,r_1)$

$\bar{P}_2=\gamma(P_2)=\gamma(2n\pi+\theta_2,r_2)$

$\bar{P}'_2=\gamma(P'_2)=\gamma(2n\pi-\theta_2,r_2)$

綜合:

圖(三): $\gamma(\Lambda_{2n}\cap\Gamma)=\{\bar{P}_0,\bar{P}'_0\}$

圖(五): $\gamma(\Lambda^*_{2n+1}\cap\Gamma)=\{\bar{P}_1,\bar{P}'_1,\bar{P}_2,\bar{P}'_2\}$

故: $\gamma(\Lambda)\cap\gamma(\Gamma)=\gamma(\Lambda_{2n}\cap\Gamma)\cup\gamma(\Lambda^*_{2n+1}\cap\Gamma)$
$=\{\bar{P}_0,\bar{P}'_0,\bar{P}_1,\bar{P}'_1,\bar{P}_2,\bar{P}'_2\}.$

題目 (III) 先查表找 $\cos\theta=\theta^2$ 的逼近解 (θ 的單位採弧度制) 後求:

$$\begin{cases}r=\theta^2\\ r=\cos\theta\end{cases}$$

在極平面上的所有交點

<u>處理步驟:</u>

$\boxed{1}$ 查表得:

θ	0.8	0.85
θ^2	0.6400	0.7225
$\cos\theta$	0.6967	0.6600

而方程式: $\cos\theta=\theta^2$ 即: $\theta^2-\cos^2\theta=0$

取 $F(\theta)=\theta^2-\cos\theta$

則由查表知 $F(0.8)=0.6400-0.6967<0$

$F(0.85)=0.7225-0.6600>0$

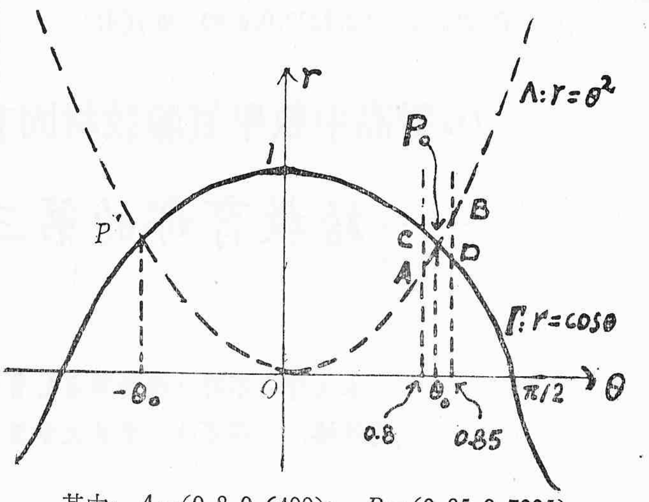
$\therefore\ F(0.8)\cdot F(0.85)<0$

故 $F(x)=0$ 在 0.8 與 0.85 之間有一實根 θ_0.

$\boxed{2}$ 爲了求 θ_0 在 0.8 與 0.85 的逼近解, 我們先作出:

$$\begin{cases}\Lambda: r=\theta^2\\ \Gamma: r=\cos\theta\end{cases}$$

在 (θ,r) -平面上的圖形如下:

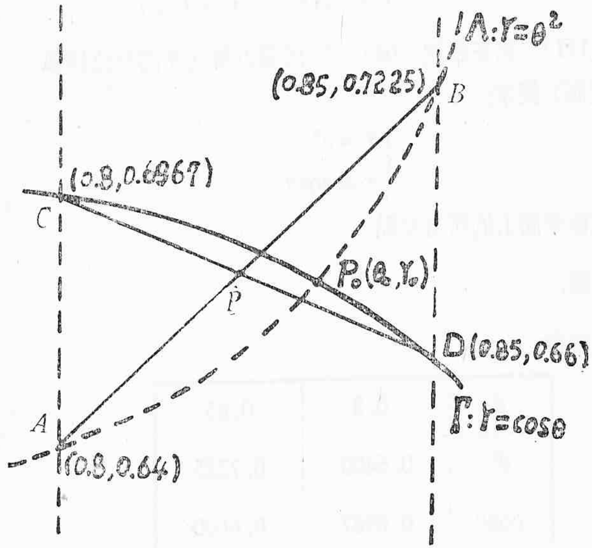


其中: $A=(0.8,0.6400)$; $B=(0.85,0.7225)$

$C=(0.8,0.6967)$; $D=(0.85,0.6600)$

我們的想法是 θ 在相當小的區間內, $r=\theta^2$與 $r=\cos\theta$ 的圖形都個別地非常接近於一條直線。就下頁的放大圖來看 $r=\theta^2$ 的圖形與 $r=\cos\theta$ 的圖形在 θ 於 0.8 與

0.85之間個別地非常接近線段 AB 與 CD 的交點 P. 把它看成 $r=\theta^2$ 與 $r=\cos\theta$ 交點P_0的逼近解。



3 下面是求 P 點座標的演算

直線 AB: $\dfrac{r-0.6400}{\theta-0.8}=\dfrac{0.7225-0.6400}{0.85-0.8}$ ....①

直線 CD: $\dfrac{r-0.6967}{\theta-0.8}=\dfrac{0.6600-0.6967}{0.85-0.8}$ ....②

解出 θ 之值: $\theta=0.8230$

4 故 $\cos\theta=\theta^2$ 的逼近解 $\theta=0.8230$ 及 -0.8230

下面再求 $\begin{cases} r=\theta^2 \cdots\cdots\cdots\cdots ① \\ r=\cos\theta \cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$

在極平面上的交點。

求法如下:

將 θ 的逼近解代入①得: $r=(0.8230)^2=0.6773$

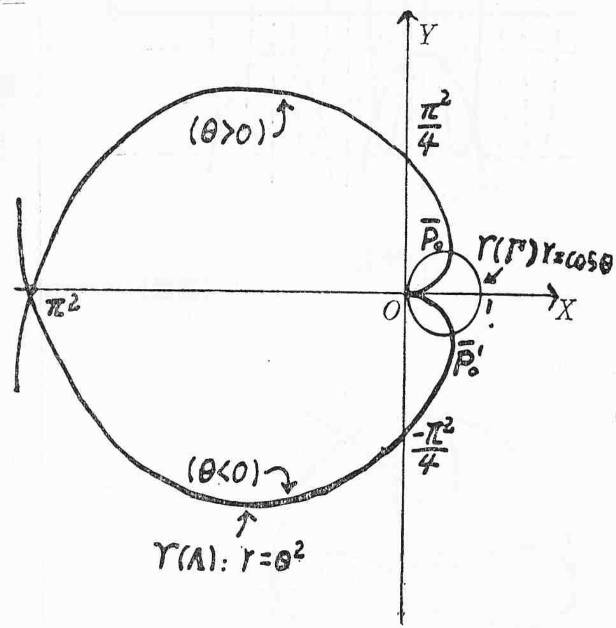
由②的圖形知:

$\Lambda\cap\Gamma=\{P_0, P'_0\}=\{(\pm0.8230, 0.6790)\}$故 $\gamma(\Lambda\cap\Gamma)=\{[0.6790, 0.8230], [0.6790, -0.8230]\}$ 又因 ② 式是良性的，故知除極 O 外， $\gamma(\Lambda\cap\Gamma)$ 應與$\gamma(\Lambda)\cap\gamma(\Gamma)$ 相同，但顯然 ①, ② 均過極點O故: $\gamma(\Lambda)\cap\gamma(\Gamma)=\gamma(\Lambda\cap\Gamma)\cap\{$極點$O\}$

$=\{[0.6790, 0.8230], [0.6790, -0.8230], [0, 0]\}$

(在極平面上共三個交點)。

5 以下附極圖，以顯示三個交點的情形。



圖中 $r=\theta^2$ 的圖形只描出 $-\pi\leq\theta\leq\pi$ 之間的情形，但已足夠顯示

$\gamma(\Lambda)\cap\gamma(\Gamma)=\{\bar{P}_0, \bar{P}'_0, O\}$ (共三個交點)。

其中: $\bar{P}_0=[0.6790, 0.8230]$

$\bar{P}'_0=[0.6790, -0.8230]$

$O=$極點。