3. 對於第一期「一般座標系中的距離公式」一文的引申

何景國

本文是由第一期190～191頁一文所引起的反響，作者現爲滬江高中數學教師。

在實驗教材第三册裏頭，研讀到法線式的時候，曾經強調，座標系在本節局限於採用正交座標系 $S_O=(O;\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2)$，因此對於平面座標系上一已知點 $A=(x_0,y_0)$ 到一直線 $L: x\cos\omega+y\sin\omega-p=0$（即直線 L 的法線式）的距離 $d(A,L)$ 有一個計算公式如: $d(A,L)=|x_0\cos\omega+y_0\sin\omega-p|$

講課以後，同學時常發問下列兩個問題:

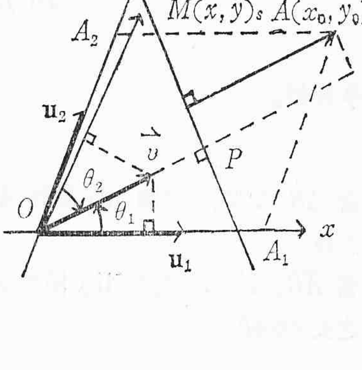
㈠ 座標系的選用爲何僅限於正交座標系，至於點與直線間距離公式仍在一般座標系中否成立？它的形式又是怎樣?

㈡ 在一般座標系向量內積 $\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2$ 是不能成立的，可否經過調整後，這個公式仍保持上述的形式?

現在借重「數季」一角來回答這兩個問題，提供一般座標系中點與直線間距離的公式。並附一古典幾何問題來例說一般座標系向量內積的應用方法，同時更盼各位同學藉此引出一些新問題來。

問題㈠的回答:

若在平面上選取一般座標系 $S\equiv(O;\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2)$ 其中: 兩基底 $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2$ 爲線性無關的單位向量，則已知點 $A=(x_0,y_0)_S$ 到直線 L 距離的計算如下分析:



取 $\vec{v}$ 爲 L 之單位法向量，設 $\vec{v}$ 在 $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2$ 方向之投影量分別爲 $\alpha=\cos\theta_1$ 和 $\beta=\cos\theta_2$（參看圖示)。

令 $M=(x,y)_S$ 爲 L 上任一點，則:

$$d(A,L)=|\overrightarrow{OA}\text{在}\vec{v}\text{方向之投影量}-\overrightarrow{OM}\text{在}\vec{v}\text{方向之投影量}|$$
$$=|\overrightarrow{OA}\cdot\vec{v}-\overrightarrow{OM}\cdot\vec{v}|$$

其中，由於向量成份分析得: $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}$

所以 $\overrightarrow{OA}\cdot\vec{v}=(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2})\cdot\vec{v}=\overrightarrow{OA_1}\cdot\vec{v}+\overrightarrow{OA_2}\cdot\vec{v}$
$=x_0\cos\theta_1+y_0\cos\theta_2$

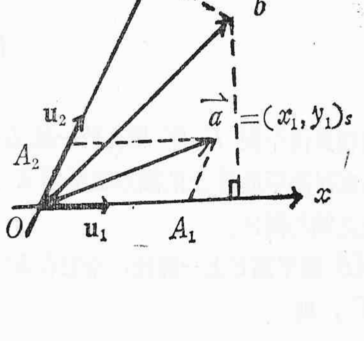
同時，因爲 $M=(x,y)_S\in L\Longleftrightarrow\overrightarrow{OM}\cdot\vec{v}=$常數$h=\overline{OP}$
$=x\cos\theta_1+y\cos\theta_2$

故 $d(A,L)=|x_0\cos\theta_1+y_0\cos\theta_2-h|$

這便是點 A 到直線 L 在一般座標系中的距離公式，且式中角 θ_1 與 θ_2 均是由選定之座標系 S 與直線 L 所決定的，與點 A 的位置無關。我們可以稱 $\{\theta_1,\theta_2\}_S$ 爲直線 L 在基底 $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2$ 方向上的一組法向角，且同時可以稱 $\{\cos\theta_1,\cos\theta_2\}$ 爲向量 $\vec{v}$ 對於座標系 S 的一組方向餘弦。

問題㈡的回答:

在一般座標系 S 中內積 $\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1\alpha+y_1\beta$ 其中: x_1,y_1 爲 $\vec{a}$ 在一般座標系 $S=(O;\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2)$ 的座標亦即 $\vec{a}=(x_1,y_1)_S$. α,β 分別爲 $\vec{b}$ 在 $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2$ 方向之投影量。



回顧上述證明過程易得:

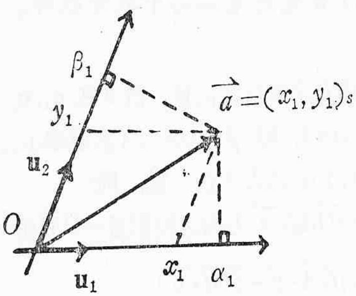
$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2})\cdot\vec{b}=\overrightarrow{OA_1}\cdot\vec{b}+\overrightarrow{OA_2}\cdot\vec{b}$$

即 $$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1\cdot\alpha+y_1\cdot\beta$$

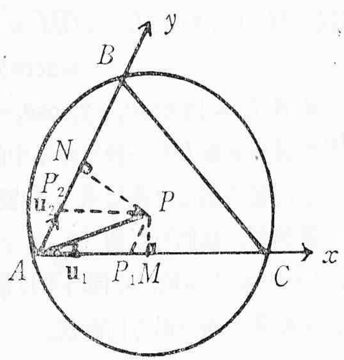
順便一提的: 上式保持了內積在正交座標系中的形式。

同時向量 $\vec{a}$ 的長度 $|\vec{a}|=\sqrt{x_1\alpha_1+y_1\beta_1}$ 其中: $\vec{a}=(x_1,y_1)_s$,

且 α_1,β_1 分別是 $\vec{a}$ 在 $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2$ 方向上的投影量。



例說: 設三角形 ABC, $AB=6$, $AC=8$, $BC=2\sqrt{13}$ 試求 $\triangle ABC$ 之外接圓半徑 R 之長。



向量方法解:

$\because$ $$2\overline{AB}\cdot\overline{AC}=\overline{AC}^2+\overline{AB}^2-\overline{BC}^2=48$$

設 M,N 分別爲 $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ 之中點,

令 $$\overrightarrow{AP}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}\ (m,n\in\mathbf{R})$$

$$\therefore\ \overrightarrow{NP}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AN}=(m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC})-(1/2)\overrightarrow{AB}$$
$$=(m-1/2)\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}$$
$$\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AM}=(m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC})-(1/2)\overrightarrow{AC}$$
$$=m\overrightarrow{AB}+(n-1/2)\overrightarrow{AC}$$
$$\overline{PN}\perp AB\Longrightarrow\overrightarrow{NP}\cdot\overrightarrow{AB}=0$$
$$\Longrightarrow 36(m-1/2)+24n=0\ \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$
$$\overline{PM}\perp AC\Longrightarrow\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{AC}=0$$
$$\Longrightarrow 24m+64(n-1/2)=0\ \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$
$$\xrightarrow{\text{解(1). (2)}}\quad m=\frac{2}{9},\quad n=\frac{5}{12}$$

在平面上選一座標系 $S\equiv(A;\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2)$ 其中: $\mathbf{u}_1=(1/8)\overrightarrow{AC}$; $\mathbf{u}_2=(1/6)\overrightarrow{AB}$ 承問題(二)之結果,

$$|\overrightarrow{AP}|^2=6\left(\frac{2}{9}\right)(3)+8\left(\frac{5}{12}\right)(4)=\frac{52}{3}$$

即 $$R=|\overrightarrow{AP}|=(2/3)\sqrt{39}\qquad \#$$

古典幾何方法解:

在 $\triangle ABC$ 中, $$\cos A=\frac{\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-\overline{BC}^2}{2\overline{AB}\cdot\overline{AC}}=\frac{1}{2}\ \text{(餘弦定律)}$$
$$\Longrightarrow\angle A=60^\circ$$

由正弦定律知: $BC/\sin A=2R\Longrightarrow R=(2/3)\sqrt{39}$

(65·6-23)