著 作 評 介

「整數論問題」一書評介

本刊編輯部

整數論問題: W. Sierpinski 原著，林聰源譯。全書共 124 頁，新竹楓城出版社印行，65年 6 月出版。

波蘭數論學家 Sierpinski 在1960 年代出版這本書後，不久就被譯成英文 (A Selection of Problems in the Thoory of Numbers)收錄於美國 Pergamon 出版社的「通俗數學講話」叢書中出版。現在清華數學系林聰源教授再把它譯成中文，可說已是第三代了，但這無損於其價值。

整數論起源產早，其歷史悠久，恐怕只有歐幾里德的幾何原本可與之相提並論；但整數論似乎更具有取之不盡的題材， 和影響深遠的想法。 所以數論在純粹數學的研究上，一直扮演着主要的角色。如果說：「每一個懷着嚴肅態度的數學工作者以及想一窺數學眞面目的門外漢，都應該看一看數論。」似乎也不爲過。在國內數學研究水準普遍升高之際（在今年的全國數學年會上王九逵教授曾以「起飛」來作比喻），讓我們從抽象的領域上抽身出來，看一看這一類古典的東西，不僅可以感到雙脚踏實的安全感，而且也可一新耳目。

當然了，整數論在國內決非陌生的東西；而有關的書籍，從最深的研究用原文書到最淺的中文書並非沒有，但有的多少用到解析的工具（譬如微積分），使得一般人士無法入手；有的則是零碎材料的收集而已，完全不能觸及問題的核心。出人意外的是，這本英文譯著，不僅可以爲一般有興趣的高中生所接受，而同時又能廣泛而深入地討論了整數論的主要內容與基本精神。

全書分上、中、下三篇。上篇「關於質數 已知的與未知的」包含 29 節，約佔全書一半的篇幅，羅列了整數論中主要的一些內容，例如「到底有多少質數」(第 3 節)，「如何找出小於一已知數之所有質數」(第 4 節)，「雙生質數」(第 5 節)，「Goldbach猜測」(第 6 節)，「Fermat 簡單定理」(第 14 節)，「Lagrauge 定理」(第 17 節)，「Wilson 定理」(第 18 節)，「一質數分解成兩個平方數之和」(第 19 節)，「二次剩餘」(第 21 節)，「Fermat 數」(第 22節)，及「Mersenne 數」(第 25 節) 等。 另外也有一些較深入的題目，像「第 n 個質數的一些性質」(第 11 節)，「不超過一已給數之質數的個數」(第 10 節)，「在數列 $4k+1$, $4k+3$ 及 $6k+5$ 中各有無窮多質數」(第 15 節) 及「Schinzel 的假設」(第 16 節)，其中第 10 節陳述的定理卽著名的「**質數定理**」。書中從各個角度，輔以實在的數據來闡釋問題的本質，用以代替需要解析知識的較高深的證明， 這點是很值得推崇的寫法。 又第 15 節其實是一個重要定理，「Dirichlet 算術級數定理」的一些簡單情形，Sierpinski 在此再次地表現出他寫作的成功。本來這個定理和「Schinzel 質數定理」平常都是在較高深的「解析數論」裏面證明的；但是如果因爲不可能完整的證明就避而不提，則本書的價值就不會像現在這麼高了。作者用淺顯的方法證明了一般定理在

這三種特別情形下成立，使讀者有一個很清晰的概念。而且更重要的是，讓人對原本抽象的命題也有了「它一定對」的情感。Schinzel 假設可說是一個新的材料，它似乎可用來同時解決許多整數論上懸而未決的疑難問題，作者這方面的研究知之甚詳，書上舉出了幾個實例，說明了此假設效力之廣大。

中篇收集了，古往今來整數論中著名的或重要的一百個問題，有些已解決，有些已可利用計算機解決，剩下的還不知道如何下手。每題之後都附上適當的註解，譬如說 Fermat 質數發現的過程，其數據以及計算機的運用等都可查到（Sierpinski 本人是當今以計算機處理整數論問題的開山鼻祖及少數幾個權威之一），問題與問題間的相關性也有說明。這些整理過後的資料對講課或研究也有幫助。計算機的介入已經對整數論有了一點冲激的作用，但它並非全能的，不過我們還是歡迎這個新的嘗試，這也是本書很特殊的一點。唯一覺得遺憾的是，有幾個選進來的問題沒有令人滿意的說明，似乎只是玩弄數字的技巧而已，看不出其地位及重要性，這是平常寫作整數論書籍時易犯的毛病之一。

下篇標題「幾何與算術的邊界」(可參見本期論述類林聰源文)，事實上就是講格子點的幾何 (geometry of lattice-points)。內容着重在幾何與代數間（此處指整數而言）的相互溝通。舉例來說，Steinhaus 型問題: “給定一自然數 n，如何畫一圓使其內部（或圓周上）恰有 n 個格子點” 這就要用幾何的考慮來處理一個本質上原爲數論的問題。另外像 “能不能在平面上畫正多邊形使其頂點全落在格子點上” (答案是除正方形以外皆不可能)；“一平行四邊形如果四個頂點都在格子點上，但是其內部及邊緣上不含其他格子點時，此平行四邊形之面積爲 1 ” 都是含義深遠的，要追求它們的完整答案時，就會引導人走入「代數數論」與「解析數論」的領域。即使一個熟悉這些較深理論的讀者，也可能是初次看到這些實例以幾何的形式表現出來。由 Steinhaus 型問題導出可用簡單的圖形計算圓周率之逼近值，也是很有說服力的。

譯者林君曾受學於當今數論大家井草先生。他的選材適當，譯筆流暢，態度嚴謹，書末添加上去的三項附錄「小數點表示」「Farey 數列」及「連分數」也有相當高的可讀性。(譬如古代所作 π 之許多有理逼近可用連分數簡單地同時求出)；但可惜的是，看不出與原作有什麼關連。