A0004（高二；複習用）

幾何與代數間的轉化方法

郭正義

本文作者現為臺北市立中山女中數學教師

「數學」是聯貫性特別強烈的一個學科，高中學生常因為其解題方法的千變萬化而視為畏途，遇到一個問題常常劃定一個界限——這是代數問題、那是幾何問題……。其實有許多幾何問題可轉化成代數問題去求解，相反的，許多代數問題也可轉換成幾何問題去求解。本文試圖整理並說明一些圖形轉化法的例子，希望對高中學生們有所助益，更希望高中學生們能因此領略到圖形轉化法的重要性！

（**請注意**：這裏所談的是一些系統性的原則而不一定就是最簡單的方法，了解其中的原理後對於同類的問題自然能夠觸類旁通，迎刃而解了。）

§1. 基本概念

1. 線上之點 $P \longleftrightarrow$ 線坐標 $P(x)$

   平面上之點 $P \longleftrightarrow$ 平面坐標 $P(x,y)$
2. 平面上之圖形 $\Gamma \longleftrightarrow$ 方程式 $f(x,y)=0$（或 $y=f(x)$）
3. 兩圖形 Γ_1 與 Γ_2 之交點 $\longleftrightarrow$ 聯立方程式 $f(x,y)=0$ 與 $g(x,y)=0$ 之實數解 (x,y)

   ※ $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 \neq \phi \Longleftrightarrow f(x,y)=0$ 與 $g(x.y)=0$ 恒有實數解 (x,y)
4. $y=f(x)$ 圖形之 x 截距 $\longleftrightarrow$ 方程式 $f(x)=0$ 之實根.
5. 兩圖形與同一鉛直線之交點位置的高低 $\longleftrightarrow$ 數值之大小（不等式之解）

§2. 不等式的求解

一、一次不等式：在直線上可以標出其解的範圍：

例如：$3x+5>0$ 的解 x 就是滿足 $x>5/3$ 的 x 換句話說在圖上就代表在 $-5/3$ 右邊的半射線

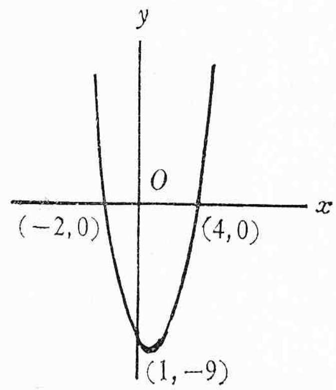
練習 (i) $-2x+4>0$ (ii) $-x+2\leq 0$ 代表的解 x 的範圍如何？

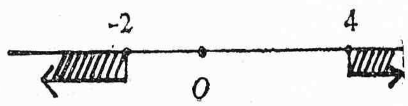
(iii) 對於一般 $ax+b<0$ 之解 x 請加以討論.

二、二次不等式：利用平面上之拋物線（二次函數之圖形）來考慮其解的範圍。

〔例 1〕$x^2-2x-8\geq 0$ $(x\in R)$

對應拋物線 $y=x^2-2x-8$ 其 x 截距為 -2 與 4 對於那些 x，它的函數值 $y\geq 0$，由圖中所示，正好是 -2 之左，$+4$ 之右，其上的函數值 ≥ 0 故解為 $x\geq 4$ 或 $x\leq -2$





〔例 2〕$-x^2+3x+10>0$ $(x\in R)$

(1)對應拋物線 $y=-x^2+3x+10$

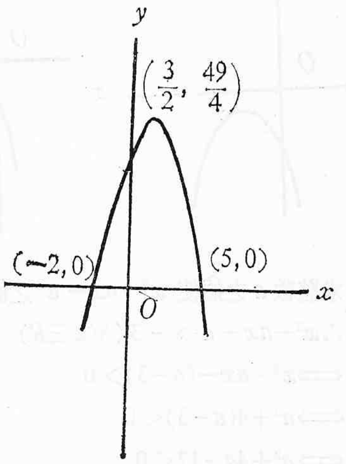
其 x 截距為 -2 與 5

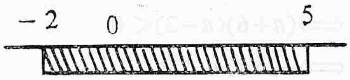
可以看到：拋物線露出在水平線上的部份正好是 $-2<x<5$ 的範圍，故

解為 $-2<x<5$

(2)當然此題也可直接採用代數方法，而不經過轉化：

$$-x^2+3x+10>0 \Longrightarrow x^2-3x-10<0$$
$$\Longrightarrow (x-5)(x+2)<0$$
$$\Longrightarrow -2<x<5$$

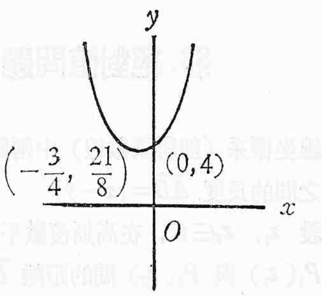




〔例 3〕 $2x^2+3x+4>0 \quad (x\in R)$

對應拋物線 $y=2x^2+3x+4$ 與 x 軸不相交:

∴ 　其解爲所有實數 x



> $a,b,c\in R$, $a\neq 0$ 時, $ax^2+bx+c>0$ 與 $ax^2+bx+c<0$ 二者之解與解析幾何中拋物線 $y=ax^2+bx+c$ 之圖形有關。

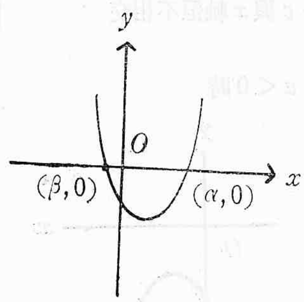
(原理解說): (設 $\delta=b^2-4ac$)

1. $\delta>0$ 時 $ax^2+bx+c=0$ 有相異兩實根 α,β
 (設 $\alpha>\beta$)

∴ $ax^2+bx+c=0 \Longleftrightarrow a(x-\alpha)(x-\beta)=0$

此時 α,β 即表 $\Gamma: y=ax^2+bx+c$ 之 x 截距

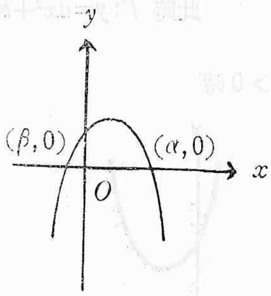
$a>0$ 時



$ax^2+bx+c>0$
$\Longleftrightarrow a(x-\alpha)(x-\beta)>0$
$\Longrightarrow x>\alpha$ 或 $x<\beta$

$ax^2+bx+c<0$
$\Longleftrightarrow a(x-\alpha)(x-\beta)<0$
$\Longrightarrow \beta<x<\alpha$

$a<0$ 時



$ax^2+bx+c>0$
$\Longleftrightarrow a(x-\alpha)(x-\beta)>0$
$\Longrightarrow (x-\alpha)(x-\beta)<0$
$\Longrightarrow \beta<x<\alpha$

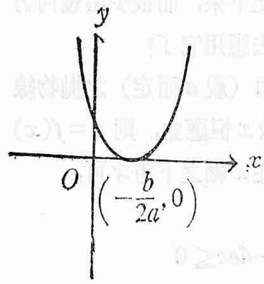
$ax^2+bx+c<0$
$\Longleftrightarrow a(x-\alpha)(x-\beta)<0$
$\Longrightarrow (x-\alpha)(x-\beta)>0$
$\Longrightarrow x>\alpha$ 或 $x<\beta$

2. $\delta=0$ 時 $ax^2+bx+c=0$ 有兩相等實根 $(-b/2a)$

即 $ax^2+bx+c=a\,(x+b/2a)^2$

此時 $\Gamma; y=ax^2+bx+c$ 與 x 軸切於點 $(-b/2a,0)$

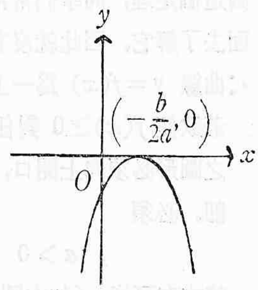
$a>0$ 時



$ax^2+bx+c>0$
$\Longleftrightarrow a\ (x+b/2a))^2>0$
$\Longrightarrow x\in R-\{-b/2a\}$

$ax^2+bx+c<0$
$\Longleftrightarrow a\ (x+b/2a)^2<0$
$\Longrightarrow$ 無解

$a<0$ 時



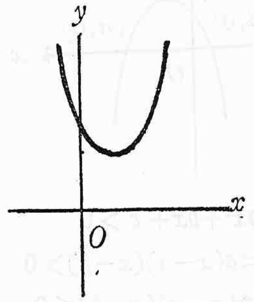
$ax^2+bx+c>0$
$\Longleftrightarrow a\,(x+b/2a)^2>0$
$\Longrightarrow (x+b/2a)^2<0$
$\Longrightarrow$ 無解

$ax^2+bx+c<0$
$\Longleftrightarrow a\,(x+b/2a)^2<0$
$\Longrightarrow (x+b/2a)^2>0$
$\Longrightarrow x\in R-\{-b/2a\}$

3. $\delta<0$ 時 $ax^2+bx+c=0$ 無實根

此時 $\Gamma: y=ax^2+bx+c$ 與 x 軸恒不相交

$a>0$ 時



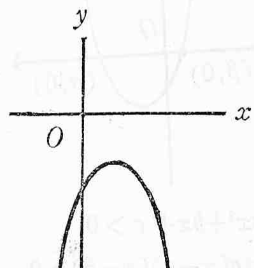
$ax^2+bx+c>0$

$\Longrightarrow x\in R$

$ax^2+bx+c<0$

$\Longrightarrow$ 無解

$a<0$ 時



$ax^2+bx+c>0$

$\Longrightarrow$ 無解

$ax^2+bx+c<0$

$\Longrightarrow x\in R$

一個重要結論之幾何意義：

$a,b,c\in R\ a\neq 0$，$f(x)=ax^2+bx+c$ 則 $\forall x\in R$，$f(x)\geqq 0\Longleftrightarrow a>0$，$b^2-4ac\leqq 0$ $f(x)\leqq 0\Longleftrightarrow a<0$，$b^2-4ac\leqq 0$

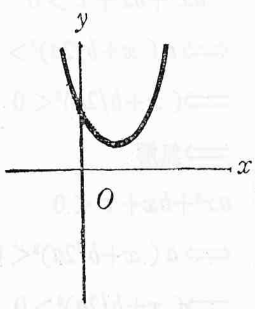
對這個定理，同學們常常是硬記下來，而很少由幾何方面去了解它，因此就沒有辦法去應用它了！

$\because$ 曲線 $y=f(x)$ 爲一上下開口（視 a 而定）之拋物線若欲使 $f(x)\geqq 0$ 對任何實數 x 恒應立，則 $y=f(x)$ 之圖形必須向上開口，且不在 x 軸之下方才可，

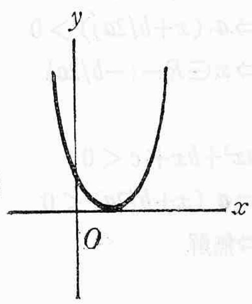
即，必須

$$a>0 \text{ 且 } b^2-4ac\leqq 0$$

時才有可能。（如右圖）



或

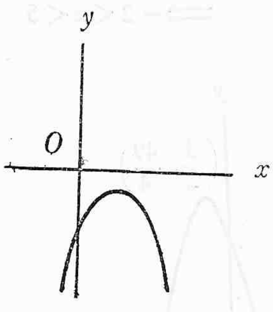


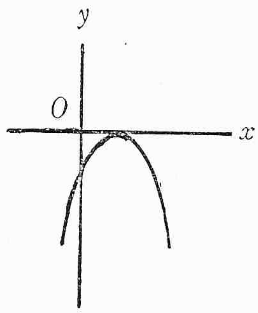
同理：欲使 $f(x)\leqq 0$ 對任何實數恒 x 成立，則 $y=f(x)$ 之圖形必須向下開口，且不在 x 軸之上方才可

即，必須

$$a<0 \text{ 且 } b^2-4ac\leqq 0$$

時才有可能。（如右圖）





〔例 4〕求整數 a 之值使 x^2-ax-a 之值恒大於 -3

解：$\therefore x^2-ax-a>-3\ (\forall x\in R)$

$\Longleftrightarrow x^2-ax-(a-3)>0$

$\Longleftrightarrow a^2+4(a-3)<0$

$\Longleftrightarrow a^2+4a-12<0$

$\Longleftrightarrow (a+6)(a-2)<0$

$\Longleftrightarrow -6<a<2$

$a\in z\Longrightarrow a=-5,-4,-3,-2,-1,0,1$

（共 7 個）

練習：求下列各式之解（$x\in R$）（說明其幾何意義）

1. $x^2-x-6<0$　　2. $3x^2+x-2>0$
3. $3x^2+6x+3\leq 0$　　4. $x^4-7x^2+12\leq 0$

§3. 絕對值問題

觀念：(1)線坐標系（即所謂數線）中兩點 $A(x)$ 與 $B(y)$ 之間的長度 $\overline{AB}=|x-y|$

(2)設 z_1，$z_2\in C$，在高斯複數平面上所代表的兩點 $P_1(z_1)$ 與 $P_2(z_2)$ 間的距離 $\overline{P_1P_2}=|z_1-z_2|$

(3)平面坐標系中「$y=|ax+b|$」$(a,b\in R,\ a\neq 0)$ 之圖形爲兩射線聯集所成之「角」，其角頂之坐標爲 $(-b/a,\ 0)$

※當絕對值符號個數增加時所對應圖形之轉彎點亦隨之增加

〔例 1〕設 $x\in R$，求 $|x+1|+|x-2|=5$ 之解

（解 i）代數討論法：

(i) $x\geqq 2$ 時，$x+1+x-2=5\Longrightarrow x=3$

(ii) $-1\leqq x<2$ 時，$x+1-x+2=5\Longrightarrow 3=5$（不合）

(iii) $x<-1$ 時，$-x-1-x+2=5\Longrightarrow x=-2$

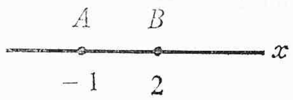
故所求之解爲 $x=-2\vee x=3$

(解 ii) 線坐標法:

於同一線坐標系中設定點 $A(-1)$，$B(2)$，動點 $P(x)$ 則題所示卽爲 $\overline{AP}+\overline{BP}=5$

卽先在線上求出 P 之位置使與 A,B 二定點之距離和爲 5，然後再由三點間之相關位置決定 P 之坐標 x

卽 $|x+1|+|x-2|=5\ (x\in R)\Longleftrightarrow\overline{PA}+\overline{PB}=5$



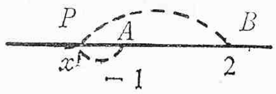
討論如下:

(i) 當 P 介於 A,B 之間 (記爲 $A-P-B$) 時

$\overline{PA}+\overline{PB}=\overline{AB}=3\neq 5$

$\Longrightarrow -1<x<2$ 時無解

(ii) 當 $P-A-B$ 時



$\overline{PA}+\overline{PB}=\overline{PA}+(\overline{PA}+3)=3+2\overline{PA}=5$

$\Longrightarrow\overline{PA}=1\qquad\therefore P-A-B\Longrightarrow x<-1$

$\therefore\overline{AP}=1\Longrightarrow P$ 坐標爲 -2

卽 $x<-1$ 時其解爲 $x=-2$

(iii) 當 $A-B-P$ 時

$\overline{PA}+\overline{PB}=(\overline{BP}+3)+\overline{PB}=3+2\,\overline{PB}=5$

$\Longrightarrow\overline{PB}=1\qquad\therefore A-B-P\Longrightarrow x>2$

$\therefore\overline{PB}=1\Longrightarrow P$ 之坐標爲 3

卽 $x>2$ 時其解爲 $x=3$

由 (i)(ii)(iii) 知所求之解爲 $x=-2$ 或 $x=3$

此類問題之**一般結論**爲: (仍以代數幾何之對應形式來表示)

設 $a,b,x\in R$ 且 $a<b$ 則 $|x-a|+|x-b|=k(k>0)$ 之解

代數	幾何
(1) $b-a>k\Longrightarrow$ 無解	(1) $\overline{AB}>k\Longrightarrow$ 無解
(2) $b-a=k\Longrightarrow x\in[a,b]$	(2) $\overline{AB}=k\Longrightarrow$ 線段 AB 上之點均適合
(3) $b-a<k\Longrightarrow$ $x=a-\dfrac{k-(b-a)}{2}$ 或 $x=b+\dfrac{k+(b-a)}{2}$	(3) $\overline{AB}<k\Longrightarrow$ 僅有二點之坐標適合，卽 $\left(a-\dfrac{k-(b-a)}{2}\right)$ 與 $\left(b+\dfrac{k+(b-a)}{2}\right)$ 二點 此二點均不在 A,B 之間

各位同學若已學過圓錐曲線，則由橢圓之焦半徑性質知若同一平面上二定點 F,F' 與一動點 P 滿足 $\overline{PF}+\overline{PF'}=2a\ (a>0)$ 則動點 P 之軌跡爲

(i) $\overline{FF'}>2a$ 時 ϕ

(ii) $\overline{FF'}=2a$ 時表一線段

(iii) $\overline{FF'}<2a$ 時表一橢圓

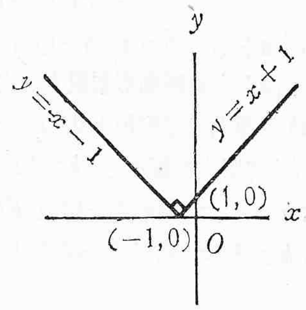
上述之一般結論與此性質有其類似之處，若將 $x\in R$ 擴大至 $x\in C$，則由複數絕對值之定義更可知道前後二者完全相同 (見下面例 2)

(解iii) 利用平面坐標幾何作圖求解:

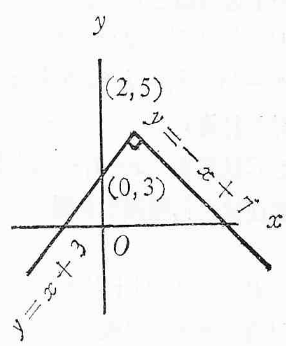
$|x+1|+|x-2|=5$

令 $y=|x+1|\Longrightarrow y=5-|x-2|$

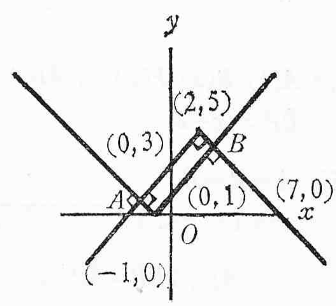
1. $y=|x+1|$ 之圖形



2. $y=5-|x-2|$ 之圖形



3. 將1. 2. 兩圖形畫在同一坐標系內



1,2 兩圖形之交點爲 $A(-2,1)$ $B(3,4)$
所求之解爲 A,B 二點之 x 坐標 -2 與 3

〔例 2〕設 $k>0$ 試於 R,C 中分別討論
$|x+2|+|x-1|=k$ 有解時 k 之範圍

(解) (1)若 $x\in R$ 則仿例 1 之解 (ii) 知
$A(-2),B(1),P(x)$ 時原式表 $\overline{AP}+\overline{BP}=k$
$\therefore$ 當 P 介於 A,B 之間時 $k=3$
當 P 在其他位置時 $\overline{AP}+\overline{BP}\geq\overline{AB}=3$
$\therefore k\geq 3$
故 $x\in R$ 時欲使原式有解則必 $k\geq 3$

$$\begin{pmatrix}\text{當 } k=3\Longrightarrow -2\leq x\leq 1\\ \text{當 } k>3\Longrightarrow x=1+\dfrac{k-3}{2}\text{ 或 } x=-2-\dfrac{k-3}{2}\end{pmatrix}$$

(2)若 $x\in C$ 令 $x=a+bi,a,b\in R$
則 $|x+2|+|x-1|=\sqrt{(a+2)^2+b^2}+\sqrt{(a-1)^2+b^2}$
$\sqrt{(a+2)^2+b^2}+\sqrt{(a-1)^2+b^2}=k$ 於 ab 平面上之對應圖形須視 k 值之大小而定
於 ab 平面上二定點 $F(1,0)$ $F'(-2,0)$ $\overline{FF'}=3$
$\therefore$ 若欲使原式有解則必 $k\geq\overline{FF'}=3$

$$\begin{pmatrix}\text{當 } k=3\Longrightarrow \text{圖形爲一線段 } FF'\\ \text{當 } k>3\Longrightarrow \text{圖形爲一橢圓以 } F,F' \text{ 爲焦點}\end{pmatrix}$$

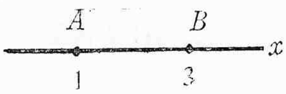
練習

1. 試仿照上述例題之方法求
$|x-1|-|x+2|=2$ 之實數解並寫出
$|x-a|-|x-b|=k$ $(a,b,k,x\in R,a<b)$ 之一般解（詳加討論）
2. 若 $x\in C$ 試說明 $|x-a|-|x-b|=k$ 之有解或否與圓錐曲線之何種圖形有關

〔例 3〕設 $x\in R$ 求 $|x-1|+2|x-3|=7$ 之解

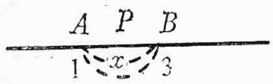
(解) 代數討論法讀者自己做

(1)線坐標法



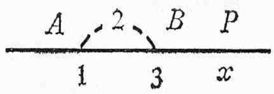
設 $A(1)$ $B(3)$ $P(x)$ 則 $\overline{AB}=2$, $\overline{AP}=|x-1|$
$\overline{BP}=|x-3|$

(i) $A-P-B$
$\Longrightarrow 1<x<3$



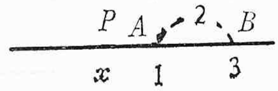
$7=\overline{AP}+2\overline{BP}=\overline{AP}+2(3-\overline{AP})=6-\overline{AP}$
$\therefore\overline{AP}=|x-1|=-1$ (不合)

(ii) $A-B-P$
$\Longrightarrow x>3$



$7=\overline{AP}+2\overline{BP}=(\overline{AB}+\overline{BP})+2\overline{BP}$
$=2+3\overline{BP}$
$\therefore\overline{BP}=5/3\Longrightarrow P(3+(5/3))=P(14/3)$

(iii) $P-A-B$
$\Longrightarrow x<1$

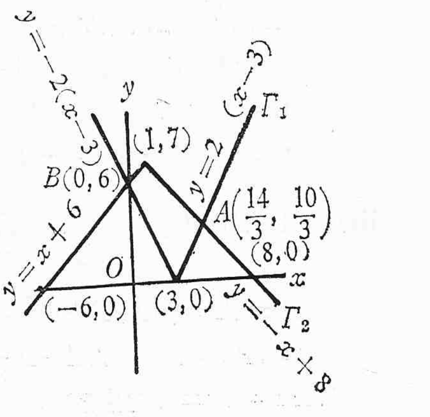


$7=\overline{AP}+2\overline{BP}=\overline{AP}+2(\overline{AP}+\overline{AB})$
$=4+3\overline{AP}$
$\therefore\overline{AP}=1\Longrightarrow P(1-1)=P(0)$

由 (i)(ii)(iii) 知所求之解爲 $x=0$ 或 $14/3$

(2)平面坐標法

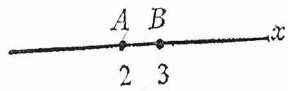
作圖形 $\Gamma_1: y=2|x-3|$
Γ_2 $y=7-|x-1|$



所求之解卽爲 Γ_1 與 Γ_2 交點 A,B 之 x 坐標而
$A(14/3,10/3)$, $B(0,6)$
$\therefore$ 所求爲 $x=0$ 或 $14/3$

〔例 4〕設 $x\in R$，求 $|x-2|+|x-3|\geq 7$ 之解

(解 i) 線坐標法



設 $A(2)$ $B(3)$ $P(x)\Longrightarrow\overline{AP}=|x-2|$
$\overline{BP}=|x-3|$

(1) $A-P-B\Longrightarrow\overline{AP}+\overline{BP}=\overline{AB}=1<7$ (不合)

(2) $A-B-P\Longrightarrow\overline{AP}+\overline{BP}=(\overline{AB}+\overline{BP})+\overline{BP}=1+2\overline{BP}\geq 7$

∴$\overline{BP}\geqq 3\Longrightarrow x-3\geqq 3$ ∴$x\geqq 6$

(3) $P-A-B\Longrightarrow\overline{AP}+\overline{BP}=\overline{AP}+(\overline{AP}+\overline{AB})$

$=1+2\overline{AP}\geqq 7$

∴$\overline{AP}\geqq 3\Longrightarrow 2-x\geqq 3$ ∴$x\leqq -1$

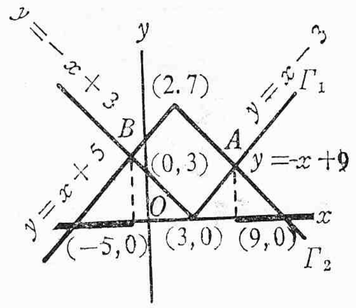
由(1)(2)(3)知所求之解爲 $x\geqq 6$ 或 $x\leqq -1$

(解 ii) 平面坐標法

$|x-2|+|x-3|\geqq 7\Longrightarrow|x-3|\geqq 7-|x-2|$

作兩圖形 $\Gamma_1: y=|x-3|$

$\Gamma_2: y=7-|x-2|$



Γ_1 與 Γ_2 交點爲 $A(6,3)$ 與 $B(-1,4)$

所求之解爲 Γ_1 不比 Γ_2 低之所有點的 x 坐標,

即 $x\geqq 6$ 或 $x\leqq -1$

〔例 5〕設 $x\in R$,求 $|x-1|-|2x-1|\leqq -2$ 之解

(解 i) 線坐標法: 原式 $\Longrightarrow|x-1|-2\left|x-\frac{1}{2}\right|\leqq -2$

讀者仿上例自做!

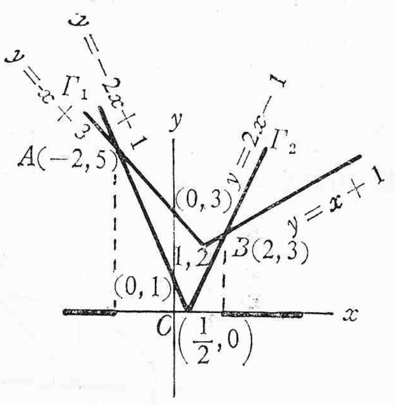
(解 ii) 平面坐標法:

$|x-1|-|2x-1|\leqq -2$

$\Longrightarrow|x-1|+2\leqq|2x-1|$

作兩圖形 $\Gamma_1: y=|x-1|+2$

$\Gamma_2: y=|2x-1|$



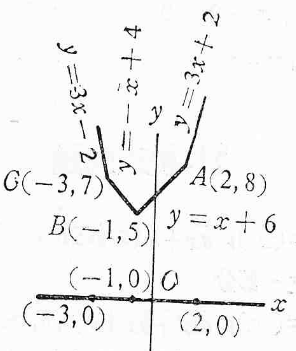
Γ_1 與 Γ_2 之交點爲 $A(-2,5)B(2,3)$

所求之解爲 Γ_1 不比 Γ_2 高之所有點之 x 坐標

即 $x\geqq 2$ 或 $x\leqq -2$

〔例 6〕設 $x\in R$ 求 $y=|x+1|+|x-2|+|x+3|$ 之極值

(解) 作出 $y=|x+1|+|x-2|+|x+3|$ 之圖形

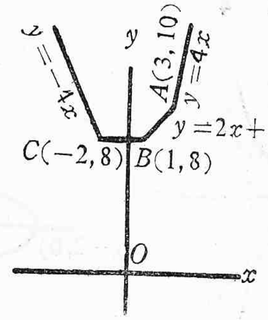


由圖形之變化知

當 $x=-1$ 時 $y=5$ 爲所求之極小值。

〔例 7〕設 $x\in R$,求 $y=|x-1|+2|x+2|+|x-3|$ 之極值

(解) 作出 $y=|x-1|+2|x+2|+|x-3|$ 之圖形



由圖形之變化知

當 $-2\leqq x\leqq 1$ 時 $y=8$ 爲所求之極小值。

例6,例7兩題之一般情形可歸納爲:

$$y=a_1|x-\alpha_1|+a_2|x-\alpha_2|+\cdots\cdots+a_n|x-\alpha_n|$$

$$a_i\in N;\ \alpha_i\in R\ (i=1\cdot 2\cdot 3,\cdots\cdots n)$$

$$\Longrightarrow y\text{之最小值產生於 } x=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i\alpha_i\text{ 處}$$

練習: 圖解下列各題(1~7用線坐標與平面坐標分別考慮之!)

1. $|x+3|=2$ $x\in R$
2. $|x+5|>2$ $x\in R$
3. $|x-2|<3$ $x\in R$
4. $|x-2|+|x+3|=4$ (i) $x\in R$, (ii) $x\in C$
5. $|x+3|+|x-2|<7$ (i) $x\in R$, (ii) $x\in C$
6. $||x+3|-|x+2||=5$ (i) $x\in R$, (ii) $x\in C$

7. $|x|+|x-1|\geqq 2$ $\qquad x\in R$
8. $x\in R$ 求 $y=|x+1|+3|x-1|+2|x+5|$ 之極值
9. $|x^2-1|+x-2=0$ $\qquad x\in R$
10. $|2x^2-1|-x+3>0$ $\qquad x\in R$

§4. 根式問題

觀念: 1. $y=(\pm)\sqrt{ax+b}\ (a,b\in R, a\neq 0)$ 之圖形為拋物線之一部分

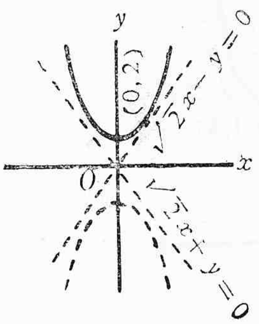
2. $y=(\pm)\sqrt{ax^2+bx+c}\,(a,b,c\in R, a\neq 0)$ 之圖形
$\begin{cases} a>0 \text{ 時可能為雙曲線之一部分} \\ a<0 \text{ 時可能為橢圓或圓之一部分} \end{cases}$

〔例 1〕: 作圖

1, $y=\sqrt{2x^2+4}$

$y^2=2x^2+4$

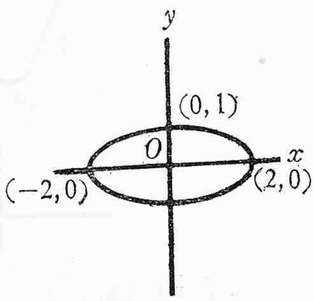
$\Longrightarrow \dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{4}=-1$



2. $y=\sqrt{1-\dfrac{1}{4}x^2}$

$y^2=1-\dfrac{1}{4}x^2$

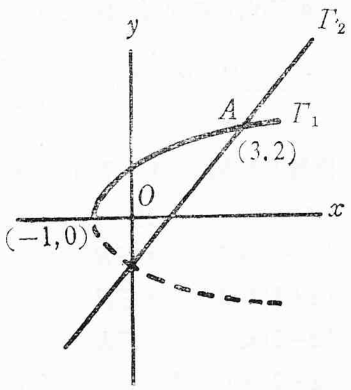
$\Longrightarrow \dfrac{x^2}{4}+y^2=1$



〔例 2〕設 $x\in R$ 求 $\sqrt{x+1}=x-1$ 之解

(解) 設 $\Gamma_1: y=\sqrt{x+1}$

$\Gamma_2: y=x-1$ 如右圖



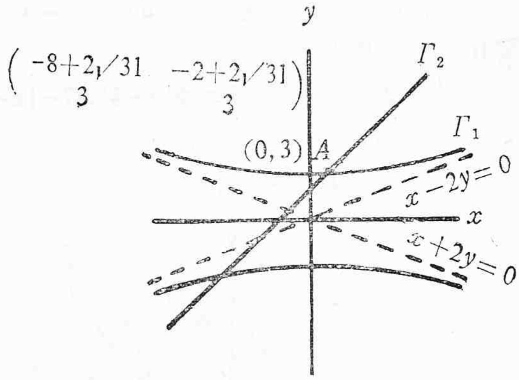
所求之解為 Γ_1 與 Γ_2 交點 A 之 x 坐標,

即 $\qquad x=3$

〔例 3〕設 $x\in R$, 求 $\sqrt{(x^2/4)+9}=x+2$ 之解

(解) 設 $\Gamma_1: y=\sqrt{(x^2/4)+9}$

$\Gamma_2: y=x+2$ 如右圖



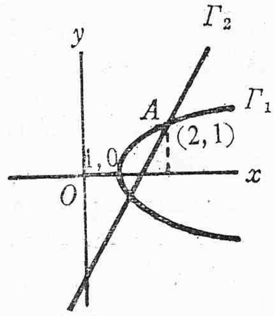
所求之解為 Γ_1 與 Γ_2 交點 A 之 x 坐標,

即 $\qquad x=(-8+2\sqrt{31})/3$

〔例 4〕設 $x\in R$, 求 $\sqrt{x-1}<2x-3$ 之解

(解) 作圖形 $\Gamma_1: y=\sqrt{x-1}$

$\Gamma_2: y=2x-3$ 如右圖

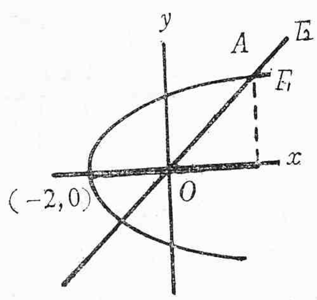


Γ_1 與 Γ_2 之交點為 $A(2,1)$

則所求之解為 Γ_1 比 Γ_2 低之一切點的 x 坐標, 之範圍即 $x>2$

〔例 5〕設 $a; x\in R$ $a\neq 0$, 試討論 $\sqrt{x+2}>ax$ 之解

(解) 作圖形 $\Gamma_1: y=\sqrt{x+2}$ $\qquad \Gamma_2: y=ax$



(1) 當 $a>0$ 時

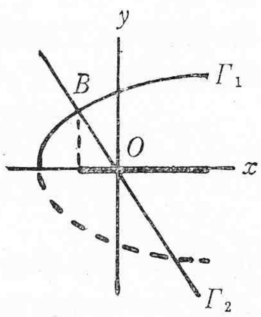
直線 Γ_2 向右上升 Γ_1 與 Γ_2 之交點爲

$$A\left(\frac{1+\sqrt{1+8a^2}}{2a^2},\ \frac{1+\sqrt{1+8a^2}}{2a}\right)$$

故所求之解爲 $-2\leq x<\dfrac{1+\sqrt{1+8a^2}}{2a^2}$

(2) 當 $a<0$ 時

直線 Γ_2 向右下降 Γ_1 與 Γ_2 之交點爲



$$B\left(\frac{1-\sqrt{1+8a^2}}{2a^2},\ \frac{1-\sqrt{1+8a^2}}{2a}\right)$$

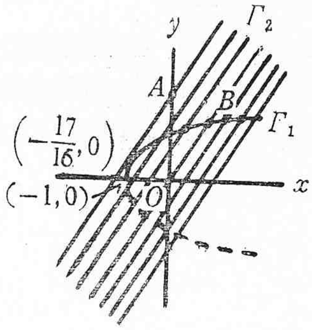
故所求之解爲 $x>\dfrac{1-\sqrt{1+8a^2}}{2a^2}$

由(1)(2)知，所求之解爲

$$\begin{cases} a>0 \text{ 時 } & -2\leq x<\dfrac{1+\sqrt{1+8a^2}}{2a^2} \\ a<0 \text{ 時 } & x>\dfrac{1-\sqrt{1+8a^2}}{2a^2} \end{cases}$$

〔例 6〕設 $b,x\in R$ 試討論 $\sqrt{x+1}>2x+b$ 之解

(解) 作圖形 Γ_1: $y=\sqrt{x+1}$　　Γ_2: $y=2x+b$



Γ_2 表斜率爲 2 之直線系對拋物線 $y^2=x+1$ 而言斜率爲 2 之切線爲 $y=2x+(17/8)\Longrightarrow A(0,17/8)$

$\therefore$ (1) 當 $b\geq 17/8$ 時，Γ_2 與 Γ_1 相切且 Γ_2 在 Γ_1 下方，故原式無解

(2) 當 $b<17/8$ 時 Γ_2 與 Γ_1 均相交（但非切線）

此時 Γ_1 與 Γ_2 之交點 B 之坐標爲

$$B\left(\frac{1-4b+\sqrt{17-8b}}{8},\ \frac{1+\sqrt{17-8b}}{4}\right)$$

故所求之解爲 $-1\leq x<\dfrac{1-4b+\sqrt{17-8b}}{8}$

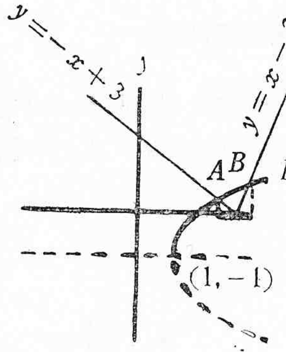
由 (1),(2) 知所求之解爲

$$\begin{cases} b\geq\dfrac{17}{8}\Longrightarrow \text{無解} \\ b<\dfrac{17}{8}\Longrightarrow -1\leq x<\dfrac{1-4b+\sqrt{17-8b}}{8} \end{cases}$$

〔例 7〕設 $x\in R$ 試求 $\sqrt{x-1}-|x-3|>1$ 之解

(解) $\sqrt{x-1}-|x-3|>1\Longrightarrow\sqrt{x-1}-1>|x-3|$

作圖形 Γ_1: $y=\sqrt{x-1}-1$，Γ_2: $y=|x-3|$



Γ_1 與 Γ_2 之交點爲

$$A\left(\frac{9-\sqrt{13}}{2},\frac{\sqrt{13}-3}{2}\right),\quad B\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2},\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$$

所求爲 Γ_1 比 Γ_2 高之點的 x 坐標

即　$\dfrac{9-\sqrt{13}}{2}<x<\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}$

練習: 試以幾何方法解下列各式:

1.	$\sqrt{2-3x^2}=x+1$	$x\in R$
2.	$\sqrt{3+x^2}>x-2$	$x\in R$
3.	$\sqrt{2x^2-3}=2x+k$	$x,k\in R$
4.	$\sqrt{x-3}<ax+2$	$a,x\in R,\ a\neq 0$
5.	$\sqrt{3x-1}<-x+k$	$x,k\in R$
6.	$\sqrt{4x^2-9}+\lvert 2x-1\rvert<8$	$x\in R$
7.	$\sqrt{2x^2-4}<x+k$	$x,k\in R$

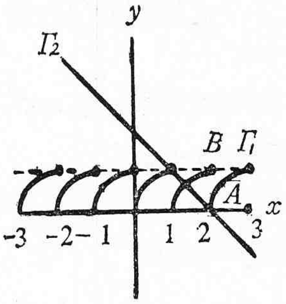
§5. 其　他

1. 高斯函數: $n\in Z,\ x\in R$

$$n\leq x<n+1\Longrightarrow[x]=n$$

〔例〕設 $-3\leq x\leq 3$ 試求 $\sqrt{x-[x]}+x=2$ 之解

（解）設 $\Gamma_1: y=\sqrt{x-[x]}$　　$\Gamma_2: y=-x+2$



Γ_1 與 Γ_2 相交於 A,B 兩點

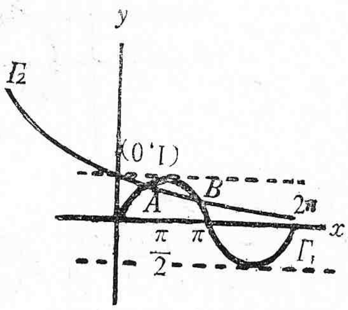
其中 $A(2,0)$ 而 B 點為 $y=\sqrt{x-1}$ 與 $y=-x+2$ 之交點，求之得 $B(5-\sqrt{5}/2, \sqrt{5}-1/2)$

故所求之解為 $x=2$ 或 $5-\sqrt{5}/2$

2. 指數、對數與三角函數:

〔例 1〕於 $0\leq x\leq 2\pi$ 時 $2^x\sin x=1$ 有多少實根?

（解）作圖 $\Gamma_1: y=\sin x$　　$\Gamma_2: y=(1/2)^x$

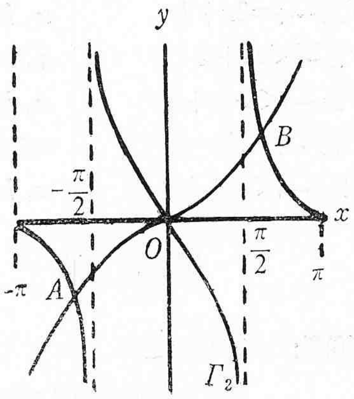


由圖知 Γ_1,Γ_2 相交於 A,B 二點

故原式有 2 個實根

〔例 2〕於 $-\pi\leq x\leq\pi$ 時 $x^3+\tan x=0$ 有幾個實根

（解）作圖 $\Gamma_1: y=x^3$　　Γ_2: $y=-\tan x$



$\therefore\Gamma_1$ 與 Γ_2 相交於 A,O,B 三點

故原式有 3 個實根

〔例 3〕設 $k\in R$，求 k 之範圍使 $\sqrt{3}\sin\theta-\cos\theta=k$ 有解

（解）設 $x=\cos\theta$　　$y=\sin\theta$

則原式可改寫成聯立方程式:

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \cdots\cdots\cdots\cdots(\Gamma_1) \\ \sqrt{3}y-x=k \cdots\cdots(\Gamma_2) \end{cases}$$

Γ_1 表一圓

Γ_2 表一斜率為 $1/\sqrt{3}$ 之直線系 $x-\sqrt{3}y+k=0$

$\therefore$ 原式若有解 $\Longleftrightarrow \Gamma_1\cap\Gamma_2\neq\phi$

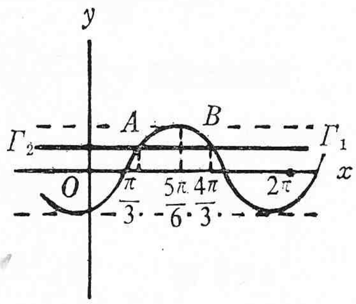
$$\Longleftrightarrow\left|\frac{0-\sqrt{3}\cdot 0+k}{2}\right|\leq 1$$

$$\Longleftrightarrow -2\leq k\leq 2$$

〔例 4〕設 $0\leq x\leq 2\pi$ 試求 $\sin x-\sqrt{3}\cos x<1$ 之解

（解）$\sin x-\sqrt{3}\cos x=2\sin(x-(\pi/3))$

$\therefore$ 作圖 $\Gamma_1: y=\sin(x-(\pi/3))$，　$\Gamma_2: y=1/2$



Γ_1 與 Γ_2 交於 A,B 兩點

$A(\pi/2, 1/2)$　　$B(7\pi/6, 1/2)$

故所求之解為 $0\leq x<\pi/2$ 或 $7\pi/6<x\leq 2\pi$

練習: 利用圖形解下列各題:

1. $x\in R$ 時 $25\sin x=x$ 之實根有幾個?
2. $-2\pi\leq x\leq 0$ 時 $2^x+\sin x=0$ 之實根有幾個?
3. $x,y\in R$ 時 $x^2+y^2>1$ 為 $xy>1$ 之什麼條件?