二

聯考甲丙組數學試題的

解答與分析

編輯部

1. （多選，4分）二次方程式 $x^2+i=0$ （$i=\sqrt{-1}$）的根為

(A) $\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$　(B) $\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$

(C) $-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$　(D) $-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$

(E) $-i$

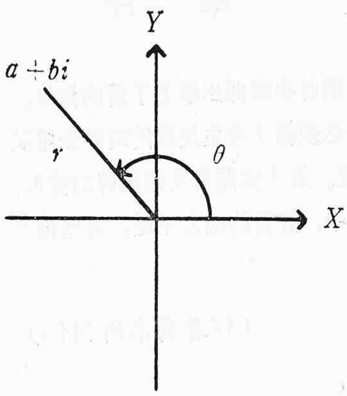
答: (B,C)

討論:

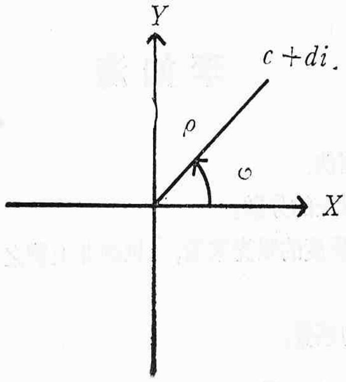
高斯平面上的乘法告訴我們：兩個複數

$$a+bi \text{ 與 } c+di$$

的乘積可以下述表達：取 γ 為 $a+bi$ 的徑長；θ 為其幅角：



同理取 ρ 為 $c+di$ 的徑長 φ 為其幅角：



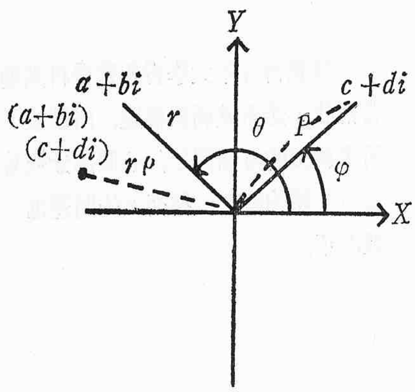
則

$$a+bi=\gamma(\cos\theta+i\sin\theta)$$
$$c+di=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$

那麼由三角公式，知

$$\begin{aligned}&(a+bi)(c+di)\\&=\gamma\rho\{(\cos\theta\cos\varphi-\sin\theta\sin\varphi)\\&\quad+i(\cos\theta\sin\varphi+\sin\theta\cos\varphi)\}\\&=\gamma\rho\{\cos(\theta+\varphi)+i\sin(\theta+\varphi)\}\end{aligned}$$

得 $(a+bi)(c+di)$ 的位置處於「將 X 軸的方位正旋轉動 $\theta+\varphi$ 角的方位上，而距離原點 $\gamma\rho$ 的地方」。換句話說，$(a+bi)(c+di)$ 的徑長為 $\gamma\rho$，幅角為 $\theta+\varphi$



回頭來看 $x^2+i=0$ 的式子

$$x^2+i=0$$

即

$$x^2=-i$$

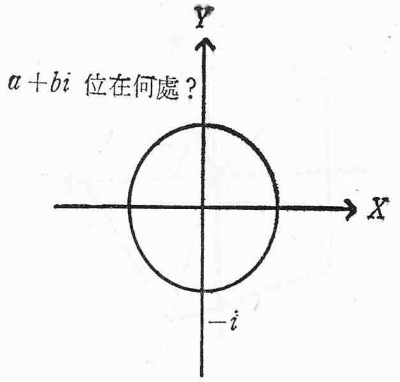
在高斯平面上要找某點 $x=a+bi$，使

$$(a+bi)^2=-i$$

設所求 $a+bi$ 的徑長為 γ，幅角為 θ 則因

$-i$ 的徑長為1，幅角為 $3\pi/2$

故 $\begin{cases}\gamma^2=1 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)\\ 2\theta=3\pi/2 \quad \text{（此式尚待商榷）}\end{cases}$



但γ是徑長，>0，故$\gamma=1$而θ則爲$3\pi/4$，知

$$1\cdot\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$$

爲 $x^2+i=0$ 的一個解，**但還有其他的解嗎？**

問題出在 (1) 式，高斯複數平面上所謂「一個複數 $A+Bi$ 的幅角是（比如說） 60°」的意思並不是只有 60° 能代表這個複數座落的方位，60° 再轉一圈回來仍然能代表同一方位，事實上不管轉幾圈，不管順時針或逆時針轉上幾圈都是轉回來到同一方位，因此

$$60°+360°\times n$$

都可以代表 $A+Bi$ 的幅角，換句話說

$$A+Bi=R(\cos60°+i\sin60°),\ R=\sqrt{A^2+B^2}$$

可以寫成

$$A+Bi=R\{\cos(60°+360°\times n)+i\sin(60°+360°\times n)\}$$

或用弧度制表成

$$A+Bi=R\left\{\cos(\pi/3+2n\pi)+i\sin(\pi/3+2n\pi)\right\}$$

現在又回頭來看 $x^2+i=0$ 的另一個解:

$$x^2=-i$$

而$-i$的幅角可以表成 $3\pi/2$，也可以表成$(3\pi/2)+2\pi$

(1) 式改寫成

$$\begin{cases}\gamma^2=1\\ 2\theta=(3\pi/2)+2\pi\end{cases}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ (2)$$

因此，還有另一個解

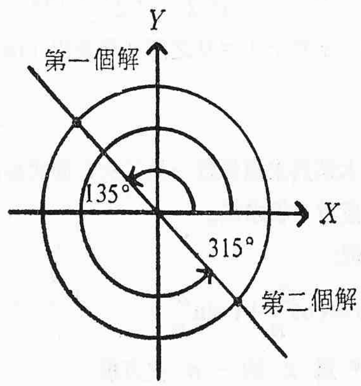
$$\begin{cases}\gamma=1\\ \theta=(3\pi/4)+\pi\end{cases}$$

即 $\cos((3\pi/4)+\pi)+i\sin((3\pi/4)+\pi)$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$$

我們共得

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i \text{ 與 } \frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\text{，兩個解。}$$



第一個解幅角 135° 轉兩倍得 270° 到 $-i$

第二個解幅角 315° 轉兩倍得 630°,

但 630°=270°+360° 仍在 $-i$ 的方位上。

是不是沒有其他的解了。如果我們有代數基本定理的知識，那麼我們知道任意 n 次方程式最多只有 n 個（複數）解，——當然其中有些可以碰巧是實數.

因此$-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$ 與 $\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$ 便是所有可能的兩解了。

但如果我們不利用這回事，仍可直接將 (2) 式寫成一般式

$$\begin{cases}\gamma^2=1\\ 2\theta=(3\pi/2)+2n\pi\end{cases}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ (3)$$

試看看除了 (1) 式取$n=0$ (2) 式取$n=1$所得的兩個解以外，還有其他的解？例如取$n=2$，又得

$\theta=\frac{3\pi}{4}+2\pi$ 仍爲$-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$……一般時候，得

$$\theta=(3\pi/4)+n\pi$$

故n爲偶數，得$-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$,

n爲奇數，得 $\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$

故該選 (B) 與 (C)

解題所需: 複數乘法在高斯平面上的意義。

評論: 同學若以「代入法」檢驗，顯然較為費時。

習題 1: (i) 求 $x^5=i$ 之解。

(ii) 求 $x^3=-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i$ 之解。

(iii) 求$x^5+1=0$之解 (須求出 $\cos 18°=?$)

另解:

表面上看本題為求複係數一元二次方程式根的題目，事實上，其為一複數方根求法。

若熟記定理:

令 $\omega=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$

且 z^* 為 z 的一 n 次方根

則 $z^*, z^*\omega, z^*\omega^2, \cdots\cdots, z^*\omega^{n-1}$ 為 z 的所有 n 次方根。

則本題相當於求 $-i$ 的二次方根

令 $\omega=\cos\frac{2\pi}{2}+i\sin\frac{2\pi}{2}$

因 $-i=\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}$

故 $z^*=\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}$為一解

而 $z^*\omega=\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}$為另一解。

即 $-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$ 與 $\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$ 為所求。

2. (單選, 4 分) $z=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}$則 $z^{65}+z^{66}+z^{67}+\cdots+z^{365}=?$

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 4 (E) ∞

答: (B)

討論:

z^{65} 所表的只是將 z 的幅角正轉 65 倍，但每轉 5 倍，便又兜回原處 (徑長為 1，1 的任意次方都是 1，故始終在單位圓上)。

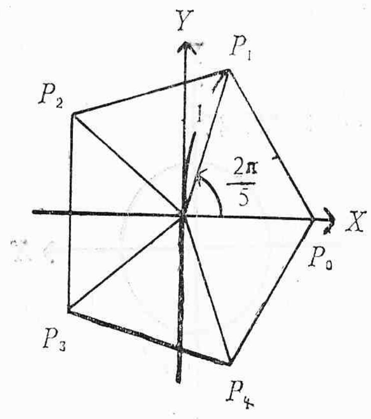
因此

$z^{65}=1$ $z^{66}=z$, $z^{67}=z^2$, $z^{68}=z^3$, $z^{69}=z^4$

$z^{70}=1$ $z^{71}=z\cdots\cdots$

但 $1+z+z^2+z^3+z^4=?$

有兩個做法:



(i) $1+z+z^2+z^3+z^4$ 相當於

$$\overrightarrow{OP_0}+\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_2}+\overrightarrow{OP_3}+\overrightarrow{OP_4}$$

而 $P_0\ P_1\ P_2\ P_3\ P_4$ 構成一正邊形，知(實驗本第三冊第三章)

$$\overrightarrow{OP_0}+\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_2}+\overrightarrow{OP_3}+\overrightarrow{OP_4}=0 \cdots\cdots (4)$$

或用簡單力學常識亦可判斷 (4) 式成立

$\overrightarrow{OP_0}, \overrightarrow{OP_1}\cdots\cdots\overrightarrow{OP_4}$ 表示五個同等的拉力施於 0 點，五力的方向彼此對稱，沒有一個力有特權，因此合力不可能不等於0，否則這合力的指向便破壞了對稱原則。

(ii) 直接用複數計算

$$1+z+z^2+z^3+z^4$$

是等比級數，等於$(1-z^5)/(1-z)$

但 $z^5=1$，而 $z\neq 1$，故

$$1+z+z^2+z^3+z^4=0$$

現在回頭來考慮: 得

$$z^{65}+z^{66}+\cdots\cdots+z^{70}+z^{71}+\cdots\cdots+z^{365}$$
$$=0+0\cdots\cdots+0+1=1,$$ 故選(B)

習題 2 設 $P_0, P_1\cdots\cdots P_{n-1}$ 為一正多邊形上的 n 個頂點，而O為該正多邊形之對稱心，求

(i) $\overrightarrow{OP_0}+\overrightarrow{P_0P_1}+\overrightarrow{P_1P_2}+\cdots\cdots$

$\overrightarrow{P_{n-2}P_{n-1}}+\overrightarrow{P_{n-1}P_0}=?$

(ii) $\overrightarrow{OP_0}+\overrightarrow{OP_1}+\cdots\cdots+\overrightarrow{OP_{n-1}}=?$

習題 3 設 $z=\cos(13\pi/21)+i\sin(13\pi/21)$，求 $z^5+z^6+\cdots\cdots+z^{494}=?$

另解 1. 直接算出 $z^{65}+\cdots\cdots+z^{365}$

$$=z^{65}(1+\cdots\cdots+z^{300})$$

$$=z^{65}\cdot\frac{z^{301}-1}{z-1},\quad (z^{5n}=1\text{，}n\text{爲整數})$$

$$=1\cdot\frac{z^{300}z-1}{z-1}$$

$$=\frac{z-1}{z-1}=1$$

另解 2. 本題爲複數方根性質與週期函數的合併出題:

首先由題目所予條件$z=\cos(2\pi/5)+i\sin(2\pi/5)$一看卽知 z 爲 1 的一個五次方根，則 $z^5=1$，$z^6=z$

$z^{5n+P}=z^P(P<5,n,P,\in N)$

且由定理“一個複數的所有次方根和爲零”的性質得

知 $\quad 1+z+z^2+z^3+z^4=0$，

故原題 $\quad z^{65}+z^{66}+\cdots\cdots+z^{365}$

$$=\underbrace{1+z+\cdots z^4}_{0}+\underbrace{1+\cdots\cdots+z^4}_{0}+z^5$$

$$=z^5=1$$

另本題的相類似題甚多，其中以 i 的週期性出題最爲同學熟悉，如下例

$$i^{66}+i^{67}+\cdots\cdots+i^{387}=?$$

同上題，其實 $i=\cos(2\pi/4)+i\sin(2\pi/4)$爲 1 的四次方根。

$\because\quad 1+i+i^2+i^3=0$，且 $i^4=1$

故原題 $=i^2+i^3+\cdots\cdots+i^3$

$=0+0+\cdots\cdots+i^2+i^3$

$=-1-i$

說明: $\because\quad 1+i+i^2+i^3=0$，

同理 $\quad i^2+i^3+1+i=0$

今把 i^2+i^3+1+i 爲一組將原題分成若干組，則最後必只剩下 $i^{386}+i^{387}$ 卽 i^2+i^3。而前面每組和均爲 0，故原題之和爲 $i^2+i^3=-1-i$，

3. （單選，4 分）方程式$1976x-57y=1$的整數解(x,y)的個數爲

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 4 (E) ∞

答: (A)

討論:

$1976x-57y$這個數(其中 x,y 爲整數）必含 1976 與57的最大公因子，但這最大公因子爲19（可用輾轉相除法，或直接觀察57的因子爲 3 與19而得知）故

$$\begin{array}{c}1976x-57y=1\\ \| \\ 19\cdot(\qquad)\end{array}$$

無整數解 (x,y)， 故選 (A)

另解:

本類題例年來出題花樣甚多，但追究其理只爲定理:

若 L,M 互質，則必存在一組 (l,m) 使得

$$lL+mM=1$$

的推廣應用而已。

依本題 $\qquad 1976x-57y=1$

先看 $(1976,57)=19$，而非互質

再把原題整理成 $\quad 104x-3y=1/19 \qquad (1)$

又原題要求整數解，卽 $x,y\in Z$

則依「加減乘運算在整數系內有封閉性」的性質知

$$104x-3y\in Z,$$

與(1)式矛盾，故知在整數系內將不存在x,y可使得$104x-3y=1/19$，故原題爲 0 組解。

4. （兩組多選，4 分；(A),(B),(C)爲一組，(D)(E)爲一組）

設橢圓 $x^2+25y^2=25$ 的周長爲L，面積爲F，則

(A) $L>4\sqrt{26}$ (B) $L>20$ (C) $L=6\pi$ (D) $F<20$

(E) $F>10$

答: (A,B); (D,E)

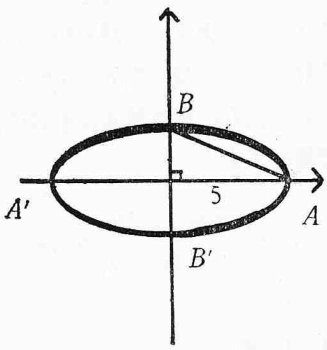
討論:

這是一個估計的問題。橢圓的長度L不容易算，這裏只要求作一估計罷了。時下很多學生，一進考場，看到沒做過的題目就立卽放棄。部分老師也敎導學生: 「看到沒做過的題目，先跳過再說。」這樣時常造成學生東跳西湊，定不下心的現象，也常因此漏掉一些可以輕易拿分的題目。最重要的是，在這種說法之下，學生培養不起來當堂思考的習慣對自己獨立應付問題失去信心，走入考場好像只爲了要來「顯影」。連帶也影響到學生讀書與準備考試的基本態度。

橢圓 $x^2+25y^2=25$ 可寫成標準型

$$\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{1^2}=1$$

故長軸半長爲 5，短軸半長爲 1，它的周長如何估計？



題目中 (A) 問 $L>4\sqrt{26}$? 其中 $\sqrt{26}$ 使我們想起自畢氏（商高）定理所導得的

$$\overline{AB}=\sqrt{5^2+1^2}=\sqrt{26}$$

當然，橢圓在 $\widehat{AB}$ 間的部分 $\widehat{AB}>\overline{AB}=\sqrt{26}$，故

$$L>4\sqrt{26}$$

而其他諸問，(B),(C) 易見其真僞，因

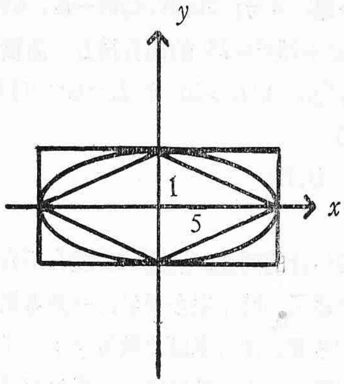
(B)　$4\sqrt{26}>4\sqrt{25}=4\times5=20$，故 $L>20$

(C)　$6\times\pi<18.9<20$，　　故 $L\neq6\pi$

至於橢圓的面積等於 πab，其中 a,b 分別爲長、短軸半長，此由 (i) 平行投影（參見數學教室第六期，阮慧貞文，或數學傳播 II，郭茂雄文）或由 (ii) 線性映射的體積漲縮率（參見數學傳播 III，景美演講筆錄）都容易得知。故

$$F=\pi\cdot5\cdot1=5\pi$$

大於 10，小於 20（當然，該橢圓夾在一長方形與一菱形之間，其面積分別爲 20 與 10，故亦可得 $10<F<20$）



因此本題選 (A),(B),(D),(E)

解題所需： 商高定理，橢圓標準型及其所代表的幾何意義，簡易的面積投影。

評論： 雖然出題深受電腦閱卷的限制，但出題原意，若非要叫學生直接就五個答案加以判斷其正誤，則宜將題目本身寫成問答題的樣子，**把要學生做些什麼明顯寫在題目之中，然後再列出五個答案請他判斷正誤**，不好讓學生看了五個答案之後，方才知道要問的是什麼？例如本題，原只是要學生「**個別對於 L 與 F 的大小給予一些估計**」。但正規一點的學生常一看答案，以爲要求出橢圓之長 L，自己從來沒學過橢圓長的求法，便無意繼續做下去。

5.　（多選，4 分）設 $\begin{cases}u=x-2y\\ v=3x-5y,\end{cases}$ 今可將 x,y 解出如下：

$\begin{cases}x=au+bv\\ y=cu+dv,\end{cases}$ 則

(A) $a+b>0$　(B) $a+b<0$　(C) $ad-bc<0$
(D) $ad-bc=0$　(E) $ad-bc>0$

答：(B,E)

討論：

由消去法（先將原給聯立式中第一式乘以 3 再與第二式相減即消去 x，得 $y=-3u+v$，代回第一式解得 $x=-5u+2v$ 或由克萊瑪法（用行列式表示），得

$$\begin{cases}x=-5u+2v\\ y=-3u+v\end{cases}$$

故選 (B),(E)

解題所需： 聯立一次方程式的求解，消去法。

評論： 這題不容易投機，最基本的土法便是最省事的方法。

另解： 以矩陣運算解之

$$\text{已知}\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-2\\ 3&-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

又　$\det\begin{pmatrix}1&-2\\ 3&-5\end{pmatrix}\neq0$　$\therefore\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-2\\ 3&-5\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}-5&2\\ -3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}$$

$$\therefore\begin{pmatrix}a&b\\ c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5&2\\ -3&1\end{pmatrix}$$

故選 (B),(E)

6.　（多選，5 分）設 $f(x)=\log_{10}\sqrt{x^2+1}$，（已知 $\log_{10}2=0.3010,\log_{10}3=0.4771$），則

(A) $f(2)>0.35$　(B) $f(3)>0.5$　(C) $f(6)>0.7781$
(D) $f(7)>0.85$　(E) $f(100)>2$

答：(C,E)

討論： 只要小心計算就能得分。

(A)　$f(2)=\frac{1}{2}\log_{10}5=\frac{1}{2}\log_{10}\frac{10}{2}=\frac{1}{2}(1-\log_{10}2)$

$=\frac{1}{2}(0.6990)=0.3495$

(B)　$f(3)=\frac{1}{2}\log_{10}(9+1)=\frac{1}{2}(1)=0.5$

(C)　$f(6)=\frac{1}{2}\log_{10}(36+1)>\frac{1}{2}\log_{10}6^2=\log_{10}6$

$=\log_{10}2+\log_{10}3=0.7781$

(D)　$f(7)=\frac{1}{2}\log_{10}(49+1)=\frac{1}{2}\log_{10}50=\frac{1}{2}\log_{10}\frac{100}{2}$

$=\frac{1}{2}(2-\log_{10}2)=0.8495$

(E)　$f(100)=\frac{1}{2}\log_{10}(100^2+1)>\frac{1}{2}\log_{10}10^4=\frac{4}{2}=2$

所以本題答案選 (C),(E)

解題所需： 對數的基本性質：（假設 $x>0$，$y>0$ 時）

（i）$\log_{10}x\cdot y=\log_{10}x+\log_{10}y$ 及由此引申可得的

$$\log_{10}\frac{x}{y}=\log_{10}x-\log_{10}y$$

$$\log_{10}x^r=r\log_{10}x$$

(ii) $\log_a x>\log_a y \Longleftrightarrow x>y$ (當 $a>1$)

7. (單選 5 分) 在條件 $x^2+y^2\leq 1$ 之下，求 $x+y$ 的最大值 M 與最小值 m，則

(A) $M=1$，$m=-1$　(B) $M=\sqrt{2}, m=-\sqrt{2}$

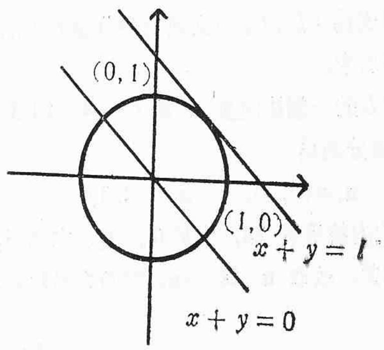
(C) $M=1$，$m=0$　(D) $M=\sqrt{2}$，$m=0$

(E) $M=\sqrt{3}$，$m=0$

答: (B)

討論: 這個題目，畫圖來看就比較容易:

$x+y=l$ 是跟 $x+y=0$ 平行的直線族，l 正好是 $x+y=l$ 的 y 截距 (也等於 x 截距)，因此求 l 的極大、小也就是求截距的極大、小，從圖形來看，不難判斷直線會跟 $x^2+y^2=1$ 相切。



另解: 由向量的內積 $(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2\leq|\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2$

$\xrightarrow{\text{成分拆解}}(a_1b_1+a_2b_2)^2\leq(a_1^2+a_2^2)\cdot(b_1^2+b_2^2)$

〔其實它就是 Cauchy-Schwarz 不等式〕

稍加觀察，知取 $\mathbf{a}=(x,y)$，$\mathbf{b}=(1,1)$ 即可"湊"合出上式:

$$(x+y)^2=(x\cdot1+y\cdot1)^2\leq(x^2+y^2)\cdot(1^2+1^2)$$

$$=2(x^2+y^2)\leq2\ (\because x^2+y^2\leq1)$$

$$\therefore\ -\sqrt{2}\leq x+y\leq\sqrt{2}$$

故本題應選(B)。

這兩個想法和更一般的解法，請看本刊第一期 P. 132〔演練類〕B0010，及第三期的該題解答。

解題所需:

(解法 I) 一次、二次方程式、不等式的幾何意義

(解法 II) 向量內積或 Cauchy-Schwarz 不等式。

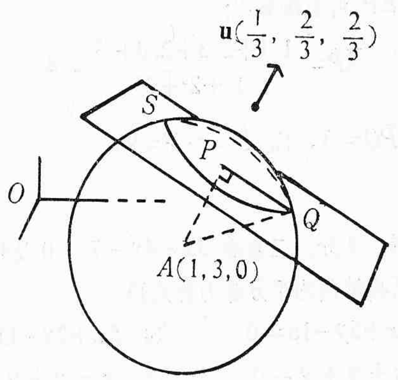
8. (多選，4 分) 設有一球，球心在 (1, 3, 0)，半徑為 5，以 S 表示此球與平面 $x+2y+2z+5=0$ 的截面，則

(A) S 為一點　(B) S 為一圓　(C) S 的面積為 9π

(D) S 的面積為 16π　(E) S 的面積為 25π

答: (B, C)

討論: 若能求得球心 (1, 3, 0) 到該平面的距離 $\overline{AP}$



則因 $\overline{AQ}=5$，由商高定理，便可求得 S 的半徑長 $\overline{PQ}$，(萬一所求 $\overline{AP}>5$，則平面碰不到球)，從而得知 S 的面積。

由平面方程式知 (1, 2, 2) 為其法向量，而

$$w=\left(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right)$$

為相應單位法向量，想求 $\overline{AP}$ 長，可考慮取 $t=\pm\overline{AP}$，則

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+tw$$

而由 P 的座標要滿足該平面方程式來解出 t。

詳細說明如下:

$$\overrightarrow{OP}=(1,3,0)+t\left(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right)$$

$$=\left(1+\frac{t}{3},\ 3+\frac{2}{3}t,\ \ \frac{2}{3}t\right)$$

代入 $x+2y+2z+5=0$ 中得

$$\left(1+\frac{t}{3}\right)+2\left(3+\frac{2t}{3}\right)+2\left(\frac{2}{3}t\right)+5=0$$

解得　$t=-4$

故 $\overline{AP}$ 長等於 4，因此 S 應為一圓，且 S 的半徑

$$\overline{PQ}=\sqrt{5^2-4^2}=3$$

知 S 的面積等於 $\pi\cdot3^2$ 即 9π，故選 (B), (C)。

解題所需: 商高定理，利用參數求垂足點，平面與球的截痕。

評論: 本題在檢驗立體概念與座標幾何的目的上，發揮了良好的功用，可惜這類題目屬組合性題目，(同時測驗數種概念與方法) 教科書上自然不會明顯地作為例題來說明，但在市面補習界的卻是典型常見的題目 (× 年度聯考曾考過與此一模一樣的題目!)。事實上組合性題目要在聯考出現，宜避免落入「定型解題」的範圍。

另解: 若記得點 (x_0, y_0, z_0) 到一平面

$$ax+by+cz+d=0$$

的距離為

$$\left|\frac{ax_0+by_0+cz_0+d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right|$$

則 $\overline{AP}$ 可直接算出:

$$\overline{AP}=\frac{1.1+2.3+2.0+5}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=4$$

故 $\overline{PQ}=3$，而 $S=\pi\cdot 3^2=9\pi$.

9. (單選，4分) 二直線 $3x+4y-7=0$ 及 $4x+3y+2=0$ 所夾鈍角的平分線方程式為

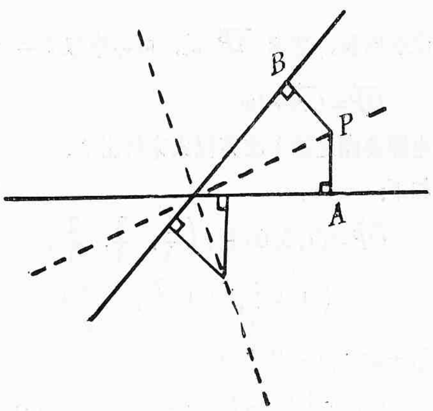
(A) $2x+5y-16=0$　　(B) $5x+2y+11=0$

(C) $x+y+9=0$　　(D) $x-y+9=0$

(E) $7x+7y-5=0$

答: (D)

討論, (一)傳統解法利用「分角線上的點到兩直線的距離相等」，可以找出兩條角平線:



$$\left|\frac{3x+4y-7}{\sqrt{3^2+4^2}}\right|=\overline{PA}=\overline{PB}=\left|\frac{4x+3y+2}{\sqrt{4^2+3^2}}\right| \qquad (\alpha)$$

得　　$x-y+9=0$　　(1)

或　　$7x+7y-5=0$　　(2)

至於要判斷那一個代表鈍角平分線，只畫出兩直線 $L_1: 3x+4y-7=0$ 與 $L_2: 4x+3y+2=0$ 的圖形。知鈍角平分線的法向量指向 $\pm\mathbf{v}$，而(1)式，(2)式法向量之一各為 $(1,-1)$，$(7,7)$，故取(1)式。(另一判別法，由圖(β)可看出所求鈍角平分線的斜率為正，故取(1)式；一般而言，因這兩平分線及互相垂直，故如非一為水平，一為鉛直的特異情形，則此二線的斜率乘積為-1，即一為正，一為負，因此可畫圖幫助判定。)

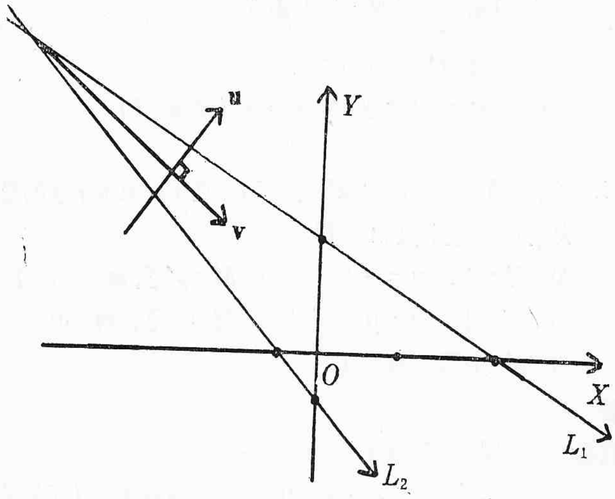


圖 β

(二)另一個作法是直接利用共點直線族

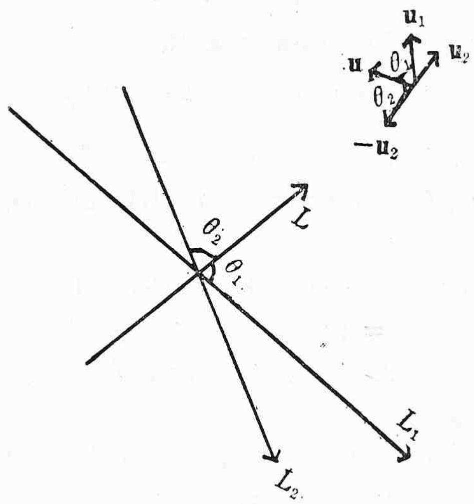
$$(3x+4y-7)+\lambda(4x+3y+2)=0$$

找出其中會成為「L_1, L_2 所交鈍角平分線 L」的條件，來決定 λ，即得所求。

但所求 L 的一個法向量 $\mathbf{u}$ 是 $(3+4\lambda, 4+3\lambda)$，而 L_1，L_2 的法向量分別為

$$\mathbf{u}_1=(3,4), \qquad \mathbf{u}_2=(4,3)$$

但 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ 的內積等於 24，大於0，表示它們所夾為銳角，不合我們需要，改取 $\mathbf{u}_1$ 與 $-\mathbf{u}_2$ 它們夾出鈍角。



那麼 $$\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}_1}{|\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{u}_1|}=\cos\theta_1=\cos\theta_2=\frac{\mathbf{u}\cdot(-\mathbf{u}_2)}{|\mathbf{u}|\cdot|-\mathbf{u}_2|}$$

便是 L 為 (鈍角) 平分角線的充分必要條件，如此

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}_1=\mathbf{u}\cdot(-\mathbf{u}_2) \quad (\because |\mathbf{u}_1|=|-\mathbf{u}_2|=5)$$

即 $(3+4\lambda, 4+3\lambda)\cdot(3,4)=(3+4\lambda, 4+3\lambda)\cdot(-4,-3)$

$$9+12\lambda+16+12\lambda=-12-16\lambda-12-9\lambda$$

求得　　　　$\lambda=-1$

故所求為　　$(3x+4y-7)+(-1)(4x+3y+2)=0$

即　　　　$-x+y-9=0$

或寫成　　$x-y+9=0$

故選(D)

解題所需：

(一)傳統作法：點到直線的距離，直線作圖，從直線方程讀出其斜率或法向量。

(二)直線族與向量作法：內積與角度的關聯，直線的法向量。

評論：

事實上，本題命題頗值爭議，學生只畫上述(β)的圖，便可以判斷5個答案中只有(D)才可能正確。

這種便捷作法，經常不在命題人當初所預期的範圍。因此須要竭力避免，不然更發揚了電腦測驗的缺點，踏實的孩子吃了虧。

另解：(利用同號區域、異號區域的觀念)

令　$f_1(x,y)=3x+4y-7$

$f_2(x,y)=4x+3y+2$，

算出 $f_1(0,0)\cdot f_2(0,0)=(-7)\cdot 2<0$，故原點 $O=(0,0)$ 位在 L_1,L_2 分割坐標平面所成的四個區域中的異號區域內，由圖(β)可看出鈍角平分線則應落在同號區域內，故在式(α)的兩端去絕對值時應取「+」號，即得(1)式

$$x-y+9=0$$

為所求，這一解法可參考實驗本第三冊（自然組）179頁。

習題：試求 $x=2$，$y=4$，$x+y=0$ 三直線所圍成三角形的內心坐標。

10.（單選，5分）設二直線 $2x-y=11$ 及 $y-x=13$ 的交點為 Q，令 P 表示圓 $x^2+y^2=10y$ 上離 Q 最近的點，則 P 的坐標 (x,y) 為

(A) (0,10)　(B) (4,9)　(C) (3,9)

(D) (4,8)　(E) (5,5)

答：(C)

討論：　平面上，一點到一圓的最短路徑是由該點至該圓的垂直線段，所以本題中，若令圓 $x^2+y^2=10y$ 的圓心為 A，則直線 QA 與該圓的交點即為 P。

(一)向量作法：

先將圓心，半徑確定：

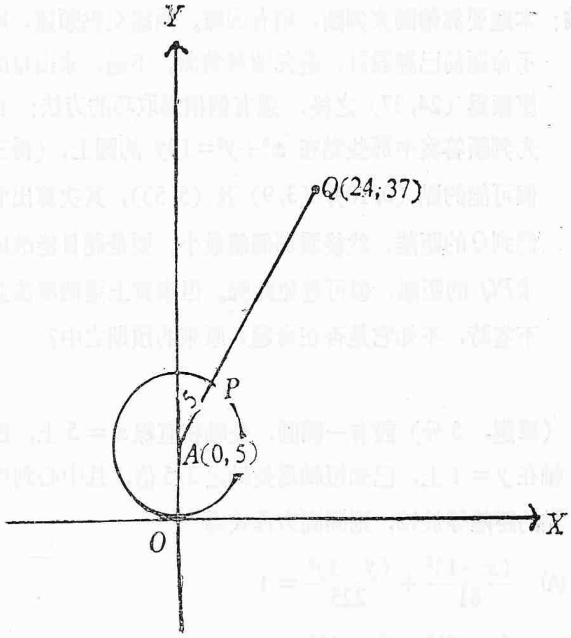
$$x^2+y^2=10y$$

$$x^2+(y-5)^2=5^2 \qquad \text{(配方)}$$

故該圓以 $A(0,5)$ 為圓心，以5為半徑，

而從 $\begin{cases}2x-y=11\\-x+y=13\end{cases}$

解出 Q 的座標，得 $Q=(24,37)$



故　$\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OA}=(24,37-5)=(24,32)$

$\overrightarrow{AP}=5\cdot\dfrac{\overrightarrow{AQ}}{\overline{AQ}}=5\cdot\dfrac{(24,32)}{40}=(3,4)$

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}=(0,5)=(3,4)=(3,9)$

故 P 的座標為 $(3,9)$，選(C)

(二)直線族做法

仍先確定圓心 A 為 $(0,5)$ 然後考慮直線族

$$(2x-y-11)+\lambda(y-x-13)=0$$

以「通過圓心 $A(0,5)$」來決定 λ。得

$$\lambda=-2$$

知 AQ 聯線的方程式為

$$(2x-y-11)+(-2)(y-x-13)=0$$

即　$4x-3y+15=0$ ……………………(1)

然後解(1)與圓 $x^2+y^2=10y$ 的聯立方程得

$$(3,9) \text{ 與 } (-3,1)$$

兩個解，這種做法要判別那點接近於 Q，稍有困難，但本題只出現 $(3,9)$ 的答案。故確定選(C)

(三)當然還有許多其他做法。(例如求出 A,Q 座標後，可算出 $\overline{AQ}=40$，而 $\overline{AP}=5$，且 $A-P-Q$，再利用分點公式即可求出 P 的座標)。

解題所需：

(一)向量做法：求兩直線交點，配方求圓的標準型，向量的加法與係數積，向量單位化，點到圓的最近距離是

點與圓心的聯線。

(二)直線族做法: 除不需向量運算外, 概念上另加共點直線族的運用。

(三)分點公式的熟用。

評論: 本題要靠繪圖來判斷, 稍有困難。兩線交點頗遠, 顯示命題前已經設計, 避免圖解猜測。不過, 求出Q的座標爲 $(24,37)$ 之後, 還有個稍爲取巧的方法: 首先判斷答案中那些點在 $x^2+y^2=10y$ 的圓上, (得三個可能的點 $(0,10)$, $(3,9)$ 及 $(5,5)$), 其次算出它們到Q的距離, 然後看那個值最小。要是題目能改成求PQ 的距離, 似可避免此弊。但事實上這個辦法並不省時, 不知它是否在命題人原來的預期之中?

11. (單選, 5分) 設有一橢圓, 長軸在直線 $x=5$ 上, 短軸在 $y=1$ 上, 已知短軸爲長軸之 3/5 倍, 且中心到焦點的距離等於12, 則橢圓方程式爲

(A) $\dfrac{(x-1)^2}{81}+\dfrac{(y-5)^2}{225}=1$

(B) $\dfrac{(x-5)^2}{9}+\dfrac{(y-1)^2}{25}=1$

(C) $\dfrac{(x-5)^2}{45}+\dfrac{(y-1)^2}{125}=1$

(D) $\dfrac{(x-5)^2}{81}+\dfrac{(y-1)^2}{225}=1$

(E) $\dfrac{(x-5)^2}{225}+\dfrac{(y-1)^2}{81}=1$

答: (D)

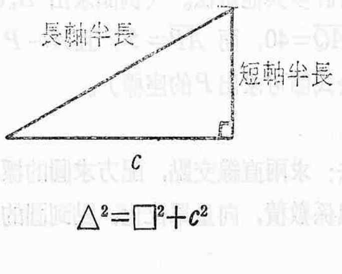
討論: 既然長短軸各在座標軸上, 且橢圓中心位在 $(5,1)$, 故橢圓方程式呈如:

$$\frac{(x-5)^2}{\square^2}+\frac{(y-1)^2}{\triangle^2}=1$$

其中□表短軸半長, △表長軸半長, 今只剩求得□與△, 但已知

$$\square=\frac{3}{5}\triangle$$

且中心到焦點的長度 $c=12$, 而橢圓中長短軸與 c 經常有如下關係:



故 $$\triangle^2=\square^2+c^2$$

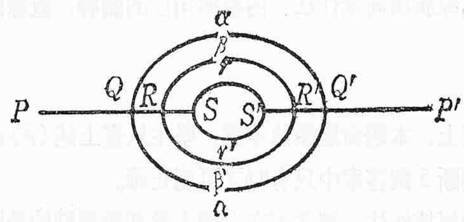
$$=\left(\frac{3}{5}\triangle\right)^2+12^2$$

得 $\triangle^2=225, \square^2=81$

故選(D)

解題所需: 橢圓標準型的平移, 焦點的意思, 商高定理。

12. (單選, 6分) 設路線圖中



$$PQ=P'Q', QR=Q'R', RS=R'S'$$

甲自P 往 P', 乙自 P' 往 P, 二人同時出發, 以相同速度前進, 在分叉點選擇各個前進方向的機率相同, 則甲, 乙二人在途中不相遇的機率爲

(A) $\dfrac{11}{2\cdot3^2}$ (B) $\dfrac{5.7.11}{2^2\cdot3^3}$ (C) $\dfrac{11^2}{2\cdot3^4}$

(D) $\dfrac{5^2.11}{2^2\cdot3^4}$ (E) $\dfrac{5^4}{2^2\cdot3^4}$

答: (C)

討論: 先算兩人會相遇的機率, 由於兩人都等速同時前進, 故所有可能相遇的地點爲以下六個位置 (如上圖):

$$\alpha,\alpha',\beta,\beta',\gamma,\gamma'$$

(i) 在α或 α' 相遇之機率爲: 甲、乙各來到 Q,Q' 時, 所面臨的都有3條路, 共有9種情況, 而其中在α或 α' 相會佔2種情況, 故有

$$2/9$$

的機率在α或α'處相會。

(ii) 在β或β' 相遇之機率爲: 甲, 乙必須各來到 R,R'路口, 才可有希望在β或 β' 相會, 但他們要各自來到 R, R' 的機率爲 1/9, 裏頭又分9種狀況繼續前進, 這9種狀況裏頭, 要在β或β'相會佔了2種狀況, 故在β或β'相會的機率爲

$$(1/9)\cdot(2/9)$$

(iii) 在r或r'相遇的機率爲: 甲、乙必須來到s,s'路口, (其機率爲 $(1/9)\cdot(1/9)$), 才可望在r或 r' 相會, 此時又面臨

$$2\times2$$

4種狀況，其中要在r或r'相會的機率佔其中2種，故甲、乙要在r或r'相會的機率爲

$$(1/9)\cdot(1/9)\cdot(2/4)$$

因此兩人相遇的總機率爲

$$\frac{2}{9}+\left(\frac{1}{9}\right)\cdot\left(\frac{2}{9}\right)+\left(\frac{1}{9}\right)\cdot\left(\frac{1}{9}\right)\cdot\left(\frac{2}{4}\right)=\frac{41}{162}$$

而不相遇的機率則爲

$$1-\frac{41}{162}=\frac{121}{162}=\frac{11^2}{2\cdot 3^4}$$

故選(C)

注意: 爲什麼先算相遇的機率，不直接算不相遇的機率呢? 當然我們很可能會直接算不相遇的機率，可是這時我們就會碰到很複雜的狀況:

乙如果經過α點，甲就要經過α'或R，（乙經α'的情況類似），可是最麻煩的是乙過Q'點時，甲三種可能都要討論，而且愈走進一層愈麻煩，因此我們及時回頭來考慮相遇的機率，這種考慮其實也是做機率題目時，經常用到的手段。

13. （6分）設有一函數 $f(x)=x+(1/x)$，問下列哪些敍述是正確的?

(A) f 的定義域是整個實數系

(B) 若$0<x<y$，則$2\leq f(x)<f(y)$

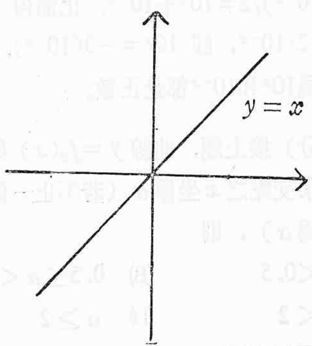
(C) 若$1<x<y$，則$2<f(x)<f(y)$

(D) 曲線$y=f(x)$,有一個漸近線通過原點,且斜率爲1

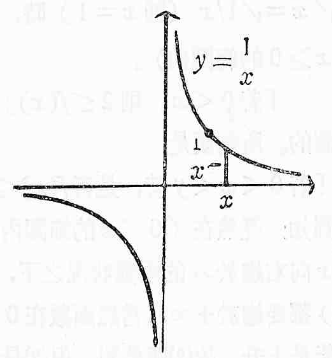
(E) 若有另一函數 $g(x)=x-(1/x)$，則 $f^2(x)-g^2(x)=1$

答: (C. D)

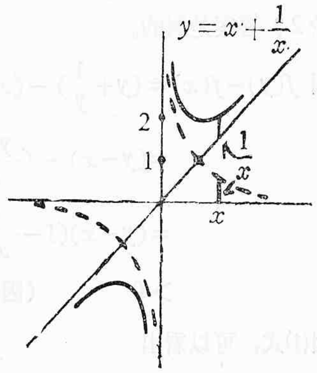
討論 先看$y=x$的圖形:



再看$y=1/x$ 的圖形:



兩者相加便是把 $1/x$ 的高度架到直線 $y=x$上，約略是



現在分別來判斷五個答案哪些是正確的:

(A)一般說來，我們對 1/0 很難考慮它有什麼意義，寫 0 +1/0 仍得不到什麼意義。故

$$f(x)=x+\frac{1}{x}$$

的定義域只在$x\neq 0$上才是自然的，換句話說，它的定義域不是整個實數系。不選(A)

(B)「若 $0<x<y$，則 $2\leq f(x)<f(y)$」成立嗎? 觀察上圖，似乎可以猜想它是對的。

(1)用舒瓦兹不等式

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x}+x\right)\geq\left(\sqrt{x}\cdot\sqrt{\frac{1}{x}}+\sqrt{\frac{1}{x}}\sqrt{x}\right)^2=4$$

故 $$x+\frac{1}{x}\leq-2\text{ 或 }x+\frac{1}{x}\geq 2$$

(2)用算術幾何平均不等式

$$x+\frac{1}{x}\geq 2\cdot\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}=2 \quad (\text{當 }x>0)$$

(3)直接用配方法

$$x+\frac{1}{x}=x-2+\frac{1}{x}+2=\left(\sqrt{x}-\sqrt{\frac{1}{x}}\right)^2+2$$

……………………………… （當$x>0$）(1)

它在$\sqrt{x}=\sqrt{1/x}$（卽$x=1$）時，取得最小值2（在$x\geq 0$的範圍內）。

故　　「若$0<x$，則$2\leq f(x)$」　(2)

是正確的。所剩便是

「若$0<x<y$時，是否$f(x)\leq f(y)$?」　(3)

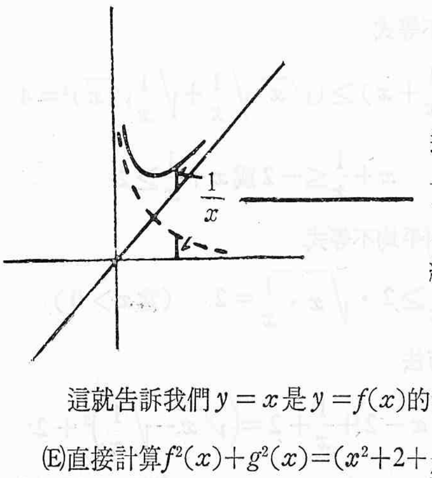
從上圖知：既然在（$0<x$的範圍內）x向左趨於0與x向右趨於∞的兩種狀況之下，$f(x)=x+(1/x)$都要趨於$+\infty$，當然函數在$0<x$的範圍內不可能是上升。故(2)雖然對，但(3)是錯的，亦卽(B)是錯的。

(C)「若$1<x<y$，則$2<f(x)<f(y)$」成立嗎？換句話說在$1<x$的範圍內，$f(x)$是不是上升函數？且都大於2？答案是對的。

前者是因
$$\begin{aligned}f(y)-f(x)&=(y+\frac{1}{y})-(x+\frac{1}{x})\\&=(y-x)-(\frac{y-x}{xy})\\&=(y-x)(1-\frac{1}{xy})\\&>0\qquad(\text{因}(1/xy)<1)\end{aligned}$$

後者則因(1)式，可以看出
$$f(x)=x+(1/x)=2$$
的充要條件是
$$\sqrt{x}-\sqrt{1/x}=0$$
卽
$$x=1$$
此外，$f(x)$皆大於2。

(D)由漸近線的定義，我們知道整個答案和$x\longrightarrow\infty$相關，這時$(1/x)\longrightarrow 0$，因此圖形$y=f(x)$和直線$y=x$有底下的關係式$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)-x=0$



這兩段相等，都是$\frac{1}{x}$，因此$y=x$是$y=f(x)$的漸近線。

這就告訴我們$y=x$是$y=f(x)$的漸近線了。

(E)直接計算$f^2(x)+g^2(x)=(x^2+2+\frac{1}{x^2})-(x^2-2+\frac{1}{x^2})$

$=4$

解題所需：配方法，函數圖形的描繪，「若$x\longrightarrow 0$，則$(1/x)\longrightarrow\infty$」，函數的上升與下降。

評論：此題尙好，唯所問五個答案須一一檢視，方知所問者何，宜改原問如下：

「設有一函數$f(x)=x+(1/x)$，討論其函數圖形，及其變化情形，問下列那些敍述是正確的？」

這樣讓學生一看問題便知所要他判斷正誤的大致內容是什麼。

14. （6分）考慮如下的四個函數：

$f_1(x)=(10^x+10^{-x})/2$

$f_2(x)=10^x+10^{-x}$,

$f_3(x)=(10^{2x}+10^{-2x})/2$,

$f_4(x)=(10^x-10^{-x})/2$,

問下列那些敍述是正確的？

(A) 這四個函數都是$t=10^x$的多項式函數。

(B) 曲線$y=f_1(x)$與$y=f_2(x)$有交點。

(C) 曲線$y=f_1(x)$與$y=f_3(x)$有交點。

(D) 曲線$y=f_4(x)$與$y=f_1(x)$有交點。

(E) 曲線$y=f_4(x)$與$y=f_2(x)$有交點。

答：(C)

討論：(A)由於$10^{-x}=t^{-1}$，所以我們知道$f_1(x)=(t+t^{-1})/2$不是t的多項式。

(B)$f_1(x)$和$f_2(x)$有交點的話，$(10^x+10^{-x})/2=10^x+10^{-x}$所以$10^x+10^{-x}=0$，但$10^x$和$10^{-x}$都是正數，因此有了矛盾。

(C)爲了滿足$(10^x+10^{-x})/2=(10^{2x}+10^{-2x})/2$，我們只要找出$x=2x$，$-x=-2x$的$x$就好了，答案是$x=0$。

(D)$(10^x+10^{-x})/2=(10^x-10^{-x})/2$，化簡得$10^{-x}=0$，不可能。

(E)$(10^x-10^{-x})/2=10^x+10^{-x}$，化簡得$10^x-10^{-x}=2\cdot 10^x+2\cdot 10^{-x}$，卽$10^x=-3(10^{-x})$，這也是不可能，因爲$10^x$和$10^{-x}$都是正數。

15. （多選，5分）接上題，曲線$y=f_2(x)$與$y=f_3(x)$有交點，試求交點之x坐標α（若不止一個交點，取x坐標最大者爲α），則

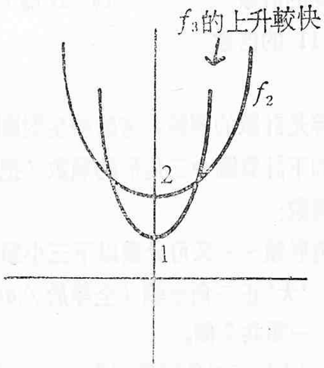
(A) $0<\alpha<0.5$　　(B) $0.5\leq\alpha<1$

(C) $1\leq\alpha<2$　　(D) $\alpha\geq 2$

(E) 其實有兩個交點。

答：(A. E)

討論: 先畫 $y=f_2(x)=10^x+10^{-x}$ 與 $y=f_3(x)=(10^{2x}+10^{-2x})/2$ 的圖形，因 $f_2(0)=2$，$f_3(0)=1$，圖形約略如下:



f_2 與 f_3 的圖形都是左右對稱的

設 $u=10^x$，則 $f_2(x)=f_3(x)$ 相當於

$u+(1/u)=(u^2+(1/u^2))/2$，　　利用配方法，

$2(u+(1/u))=u^2+(1/u^2)=u^2+2u/u+1/u^2-2u/u$

$=(u+1/u)^2-2$

把 $u+(1/u)$ 看成一個數 v，可得

$v=(v^2-2)/2$

$\therefore$　$v^2-2v-2=0$

$\therefore$　$v=(2\pm\sqrt{4+8})/2=1\pm\sqrt{3}$

由於 $10^x=u>0$，　$\therefore u+(1/u)=v>0$

我們只能取 $v=1+\sqrt{3}$，即 $u+(1/u)=1+\sqrt{3}$

$\therefore$　$u^2-(1+\sqrt{3})u+1=0$

$\therefore$　$u=\frac{1}{2}[1+\sqrt{3}\pm\sqrt{4+2\sqrt{3}-4}]$

$=\frac{1}{2}[1+\sqrt{3}\pm\sqrt{2\sqrt{3}}]$　（有兩個解）

又　$1<[1+\sqrt{3}+\sqrt{2\sqrt{3}}]/2$

$<[1+\sqrt{3}+\sqrt{4}]/2=(3+\sqrt{3})/2$

$<3<\sqrt{10}$

$\therefore$　$0=\log_{10}1<\alpha<\log_{10}\sqrt{10}=0.5$

故選(A),(E)

解題所需: 配方法，$y=a^x$ 的圖形，$y=a^x$ 與 $y=a^{-x}$ 的關係，$y=a^{2x}$ 與 $y=a^x$ 的成長關係。

另解: 我們用圖形來判斷

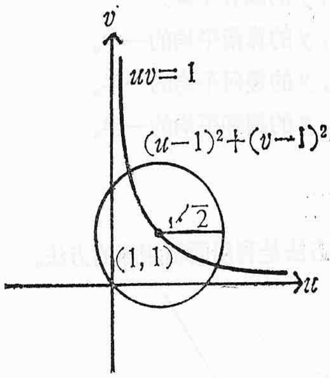
設 $u=10^x$，$v=10^{-x}$，則

$uv=1$ ……………………………………………(1)

而且 $f_2(x)=f_3(x)$ 相當於 $u+v=(u^2+v^2)/2$

化簡得　$(u-1)^2+(v-1)^2=2$ ………………(2)

畫(1)，(2)的圖形:



由於 $10^x>0$，$10^{-x}>0$，我們只注意第一象限的交點，每個交點都對應了一個解，由於 $uv=1$ 通過了 (1, 1)，我們得到了兩個交點。最右邊交點的 u 坐標 $<1+\sqrt{2}$，

$\therefore 1<10^\alpha<1+\sqrt{2}<3<\sqrt{10}=10^{\frac{1}{2}}$

即　$0<\alpha<0.5$

另解:

若　$10^x+10^{-x}=(10^{2x}+10^{-2x})/2$

令 $10^x+10^{-x}=y$，則 $10^{2x}+10^{-2x}=y^2-2$

原式爲　$y=(y^2-2)/2$

故　$y^2-2y-2=0$，　$\therefore y=1\pm\sqrt{3}$

其中 $\because 10^x+10^{-x}>0$　$\therefore 1-\sqrt{3}$ 不合。

故 $y=1+\sqrt{3}$，即 $10^x+10^{-x}=1+\sqrt{3}$

令 $p=10^x$，則 $p+(1/p)=1+\sqrt{3}$

$p^2-(1+\sqrt{3})p+1=0$

$\therefore$　$p=\dfrac{1+\sqrt{3}\pm\sqrt{2\sqrt{3}}}{2}$

取大者卽爲 $(1+\sqrt{3}+\sqrt{2\sqrt{3}})/2$

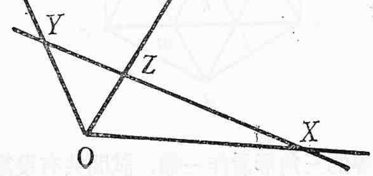
又 $1<(1+\sqrt{3}+\sqrt{2\sqrt{3}})/2<(1+\sqrt{3}+\sqrt{4})/2$

$=(3+\sqrt{3})/2<3<\sqrt{10}$

$\therefore$　$0=\log_{10}1<\alpha<\log_{10}\sqrt{10}=0.5$

故選 (A),(E)

16, （單選，5分）如圖，三點 X, Y, Z 共線，且 $\angle XOZ$ 與 $\angle ZOY$ 都是60°，如令 $OX=x$，$OY=y$，$OZ=z$，則



(A)　z 是 x,y 的幾何平均。

(B)　z 是 x,y 的調和平均。

(C)　z 是 x,y 的算術平均的一半。

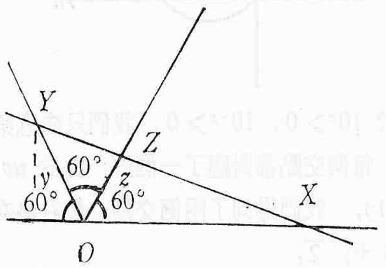
(D)　z 是 x,y 的幾何平均的一半。

(E)　z 是 x,y 的調和平均的一半。

答：(E)

討論：

(一)最典型的方法是利用面積相等的方法。



即△OXY的面積＝△OXZ的面積＋△OZY的面積，

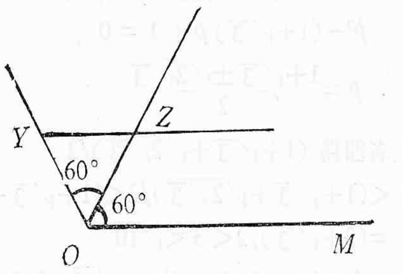
$\therefore$　$xy\sin 60° = xz\sin 60° + yz\sin 60°$

$\therefore$　$xy = xz + yz = (x+y)z$

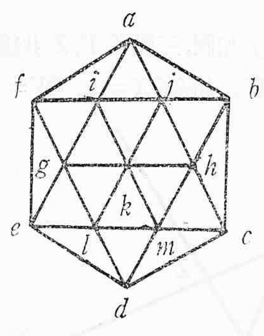
$\therefore$　$\dfrac{1}{z} = \dfrac{x+y}{xy} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$

即 z 是 x y 的調和平均的一半。故選(E)。

(二)由於 $\overleftrightarrow{XY}$ 的位置移動時答案不變，最極端的情形是 $\overleftrightarrow{XY}$ 和 $\overleftrightarrow{OM}$ 平行，這時 $x=\infty$，$y=z$，答案中只有(E)滿足這個條件，故選(E)。



17.　（多選，6分）下圖由正六角形及若干對角線作成



將其中全等的三角形看作一類，試問共有幾類？如算出每一類中三角形的個數，相加得到其中三角形的總數。設類數爲 A，三角形總數爲 N，則

(A)　$A=6$　　(B)　N 爲 4 的倍數

(C)　N 爲 5 的倍數　　(D)　N 爲 7 的倍數

(E)　N 爲 11 的倍數

答：(A. B. E)

討論：此題純粹是計數的測驗，考驗學生對圖形的靈敏及細心。可如下計算圖中三角形的類數（把全等的看爲一類）和個數：

(1)正三角形類——又可分爲以下三小類：

(i)　'大' 正三角形類（全等於△aec 者）——這一類共 2 個。

(ii)　'中' 正三角形類（全等△agh 者）——這一類共 6 個。

(iii)　'小' 正三角形類（全等於△aij 者）——這一類共 12 個。

(2)等腰三角形（但不爲正三角形）類——這又可分爲兩小類：

(i)　'大' 等腰三角形（全等於△afb 者）——這一類共 6 個。

(ii)　'小' 等腰三角形（全等於△ajb 者）——這一類共 6 個。

(3)直角三角形（但非等腰三角形）類——圖中的這一類彼此都全等，共有 12 個。

綜上所計，知共有 6 類三角形，即 $A=6$。

其總個數 $N=2+6+12+6+6+12=44$,

故選(A), (B), (E),

18.　（多選，6分）將上題圖中全等的凸五角形看作一類，設類數爲 B，凸五角形的總數爲 M，則

(A)　B 爲偶數　　(B)　M 爲 5 的倍數

(C)　M 爲 6 的倍數　　(D)　M 爲 7 的倍數

(E) M 爲 8 的倍數

答：(C, D)

討論：依下表加以分款計算，其中我們視正六角形 $abcdef$ 的六個頂點爲邊點，而將任一個凸五角形的頂點中爲這些邊點的個數叫做它的邊點數：

邊點數	對應凸五角形的		
	類數	例子	個數
0	0		0
1	1	⬠$aglmh$	6

2	2	‘大的’: $\triangle aglmb$	6
		‘小的,: $\triangle aikhb$	6
3	2	‘大的’: $\triangle aflmb$	6
		‘小的’: $\triangle afghb$	6
4	1	$\triangle aflcb$	6
5	1	$\triangle afecb$	6

合計，得 $B=1+2+2+1+1=7$

$M=6\cdot7=42$

故選(C),(D)

19. （多選，6分）注意：本題分兩段，兩段均答對者得6分，任何一段答錯者扣6/30分，不答者得零分。
在X軸上的點$x=-1.2$（公尺）處，有一光源，強度爲100（國際燭光），另在點$x=0.8$處,亦有一光源，其強度爲I。今在兩光源間放置某一儀器，使它能接受兩個光源的輻射：它所受到的輻射與光源強度成正比，但與到光源的距離平方成反比。今假定調整這儀器的位置x，使得它所受到的兩方的輻射相同，則I爲

(A) $I(x)=100\cdot\dfrac{(x+0.8)^2}{(x-1.2)^2}$

(B) $I(x)=100\cdot\dfrac{(x+1.2)^2}{(x-0.8)^2}$

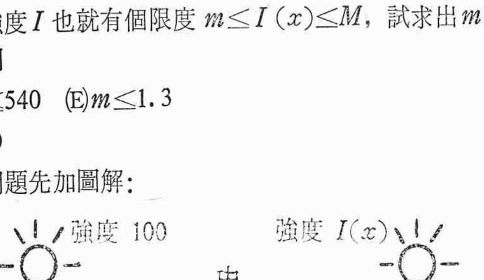
$I(x)=100\cdot\dfrac{(x-0.8)^2}{(x+1.2)^2}$

如果儀器的裝置，只允許$|x|\leq0.6$那麼它能夠量度的光源強度I也就有個限度$m\leq I(x)\leq M$，試求出m與M，則

(D)$M\leq540$ (E)$m\leq1.3$

答：（C.E）

討論：將問題先加圖解：



注意：當儀器位置x在兩個光源位置的中點時，兩光源強度應相等，此即 $I(--0,2)=100$ (1)

當儀器往右挪動，要維持兩方輻射相同，光源B所需強度$I(x)$降低（往左則增高）因此$I(x)$是x的下降函數（至少在$(-1.2, 0.8]$的範圍）。

例如 $I(0)<I(-0,2)=100$ (2)

藉(1),(2)已經可以投機地判斷(A),(B),(C)中只有(C)才可能正確,若按平常想法,自A, B接受的輻射量分別爲

$$C=\frac{100}{(x+1.2)^2} \quad 與 \quad C=\frac{I(x)}{(x-0.8)^2}$$

故 $I(x)=\dfrac{100(x-0.8)^2}{(x+1.2)^2}$，故選(C)

然後，當儀器的位置x受到

$$|x|\leq0,6$$

的限制時，由於$I(x)$是下降函數，最大值M在左端點$x=-0.6$取得，亦即

$$M=I(-0.6)=100\cdot\frac{(-0.6-0.8)^2}{(-0.6+1.2)^2}\doteqdot544>540$$

同理最小值

$$m=I(+0.6)\doteqdot1.1<1.3$$

故選(E)，本題共選(C)與(E)。

解題所需：函數的概念（變量關係），正比，反比，簡單的加減乘除，**當堂思考問題的習慣。**

評論：本題有人指稱牽涉物理，於丙組不利。事實上，完全是數學。（姑且不論數學與物理兩門課程應否在修習時互通聲氣）。這樣的題目放在考場，所以引起學生不敢嘗試，固然與考試時間有關，最主要還是學生怕看表面上生疏的題目，很多同學讀書時，就傾向於套用「定型解法」，這樣的態度使他不敢也不能當堂思考。數學教育的原始目的因此而受到很深的斲傷。這題是好的。

20. （單選，6分）假設有144個完全相同的電燈泡，每個的電阻是 $r_1=194$（歐姆）；我們取n個串聯成一行（n是144的因數），共得$m=144/n$行；再把這m行並聯起來接到一個電源，假若這電源的電壓是$E=3590$（伏特），電阻是 $r_2=438$（歐姆），我們想定出n使得這些燈泡發出的總熱量最大。

一般地，n個相同的電阻 r_1 串聯起來，就相當於單獨一個電阻 $r_3=nr_1$，m個相同的電阻 r_3 並聯起來，就相當於單獨一個電阻 $r_4=r_3/m$，電阻 r_4 與 r_2 串聯得到整系的電阻$R=r_2+r_4$，所以電流是$I=E/R$，那麼燈泡的熱功率是$W=I^2r_4$，這當然隨n而變，現在要W爲最大，則

(A) $n=8, m=18$ (B) $n=9, m=16$

(C) $n=12, m=12$, (D) $n=18, m=8$

答：(D)

討論：如果有一點電學常識，我們知道當內外電阻一樣時熱功率爲最大。換句話說

$$內電阻\ r_2=外電阻\ r_4$$

是使得W爲最大的條件。用所求之n表示，則爲

$$438=\frac{r_3}{m}=\frac{nr_1}{m}=\frac{194n}{144/n}$$

此即

$$n^2=\frac{438\times 144}{194}$$

n 近於 18. 故選(D)

但純粹以數學來對待，也很容易得到這個結論:

$$W=I^2r_4=(\frac{E}{r_2+r_4})^2\cdot r_4$$

$$=\left(\frac{3590}{438+\frac{194n}{144/n}}\right)^2\cdot\frac{194n}{144/n}$$

$$=\left(\frac{3590}{(438/x)+x}\right)^2 \quad \left(\text{取 } x=\sqrt{\frac{194n}{144/n}}\right)$$

但 $(438/x)+x\geq 2\sqrt{(438/x)\cdot x}=2\sqrt{438}$（算幾平均不等式）其中當 $438/x=x$ 時，$(438/x)+x$ 取得最小值，相應地 W 便取得最大值。

這便是上邊的結論。因爲

$$438/x=x$$

就表示

$$438=x^2=r_4$$

（而 $r_2=438$，故得內外電阻一樣時，熱功率最大）

當然我們不須去提到電學，只繼續以數學來考慮，那麼使 W 爲最大的條件便是

$$438/x=x$$

$$438=\frac{194n}{144/n}$$

仍得 n 接近於 18，故選(D)。

而 $$m=144/18=8$$

解題所需: 一點式子的組織能力，算幾平均不等式。

評論: 這次試題最後這幾題都有「題組」的趨向，多少在測驗學生的組織能力。它們的共通點是所需的數學知識很少，也沒什麼技巧。一個學生如果正常學習數學，如果平時不以猜題爲能事，而在考場能冷靜思考，這些題目正是他們表現的好機會。可惜目前學生都傾向於抄誦定型解題，讀書不求甚解。很多同學甚且不屑於回顧一些基本內容的用意，因此一進考場只能做些已事先做過的類題，無法活用所學，無法引用所學。一看到沒碰過的題目就心慌意亂，不知從何着手；殊不知這樣的題目反而簡單，反而容易得分。

本題所測驗的「組織」能力，事實上只限於「形式上」的組織，並未涉及數學「本質上」的組織。