落河問題應答

應答優勝榜

問題提供人：鄭　本。

應答人數：8　位。

特優：王鵠農（臺大數學系畢業）——贈本刊一年份及「數學教室」合訂本一本。

優良：李嗣涔（岡山讀者）——贈本刊半年份。

解答：（本刊取王鵠農先生的答案為參考解答—編輯部）

先敍問題如下：

問題：今有一河，已知其寬度 $d=1$（單位長度），某人落於河中，適逢大霧，無法辨認河岸之方向，亦不知其本身之位置何在，僅知其游泳能耐爲 l 長度，試問彼應採何種路線游泳，方能使其在未溺斃之前抵岸的或然率增至最大。

顯然所求之最佳游泳路線與 l 之長度有關，本文將說明當 $l \leq 2d/\sqrt{3}$ 時，沿直線而游最爲上策，當 $2d/\sqrt{3} \leq l \leq 2d/\sqrt{3}+2d[\cos^{-1}(1/\sqrt{3})-\pi/6]$ 時，可任取一曲線由 O 游至 E，（見圖 1）只要該曲線與 $\overline{OE}$ 線段能夠在 $ABCE$ 區域之內圍成凸集合，如圖中斜線部分所示：

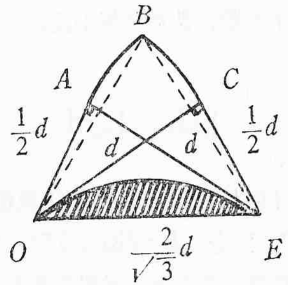


圖 1.

由 O 至 E 的路線圍成一個凸集合。$\text{dist}(OE)=2d/\sqrt{3}$, $\text{dist}(OA)=d/2=\text{dist}(CE)$

$\overline{OA}\perp\overline{AE}, \overline{OC}\perp\overline{CE}, \widehat{AB}, \widehat{BC}$ 爲圓弧，分別以 E, O 爲圓心，d 爲半徑，$\text{dist}(AE)=\text{dist}(BE)=\text{dist}(OC)=\text{dist}(OB)=d$

至於當

$$\frac{2}{\sqrt{3}}d+2d\left(\cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{\pi}{6}\right)\leq l\leq d+2d\tan^{-1}\frac{3}{4}$$

之時，筆者僅提出一些似爲最佳之路線，而無法證出後者確能使抵岸之或然率增至最大，至若續航力 $l\geq d+2d\tan^{-1}$ (3/4)，則有某種路線存焉，該人只要沿此路線而游，必獲生還。

§I. $l\leq d$

下述命題爲眞:

命題: 設平面上有彼此相距爲 d 的諸平行線將該平面分成無數細條，今任作一凸集合，其周長爲 L 而直徑不超過 d，則此凸集合與諸平行線之一相交的或然率，可證明爲 $L/\pi d$

若上述凸集合之直徑大於 d，則它能與兩條以上的平行線同時相交，但若我人將此種情況視爲兩次分別地相交，(或兩次以上，視所交之線數而定)，則前述之公式 $L/\pi d$ 仍然成立，不過此時 $L/\pi d$ 可能大於 1。

由於前文所論之溺者不知其本身之位置，亦不辨河岸之方向，故僅能任選一方向，隨卽照其預定的計畫路線游泳，顯然其生還的或然率，恰似在兩平行線間任取一起點畫弧，而此弧與其中某一平行線相交。(弧的形狀與游泳路線相似)

很容易看出弧與直線相交的充要條件乃是該弧的凸殼 (Convex hull) 亦與此直線相交，故其相交的或然率相等，由前面的命題可知，當今的工作乃是要設法使弧的凸殼的周長儘量加大，順便注意到長度爲 l 的線段亦是凸集合，其周長爲 $2l$，至此可以發現，當弧長 $l\leq d$ 時 (此條件使得弧的直徑小於 d)，沿直線游泳能使凸殼之周長大至 $2l$，而其他任意路線所展出的凸殼，其周長皆不及之。

§II. $l\geq d$

考慮長度爲 l 的任意弧，其起點 O 與終點 E 的連線段稱爲該弧的"底"，又令 $b=\text{dist}\,(OE)$，爲了使弧與線的相交機會加大，該弧必爲凸弧，意思乃是要使其凸殼的周長 $L=l+b$，今 l 既已固定，要使 L 增長惟有加大 b 的長度，不過在 $l\geq d$ 的情況下，弧的直徑可能 $\geq d$，於是它便可能與兩平行線同時相交，然則公式 $L/\pi d$ 所指出的或然率便應酌予削減，當前的工作乃是要適當地調整 b 以使相交的或然率達到極大值。

爲了計算相交的或然率，我人先擇定兩參變數，用以表示弧線的位置，下述的擇取乃是週知地對測度具有不變性: 先任取兩平行線之一名爲 K_1，(另一爲 K_2)，由 O 點至 K_1 的距離以參數 p 表之，θ 則表示由 O 至 K_1 的垂線與弧線的底兩者所張的角度。(見圖 2)

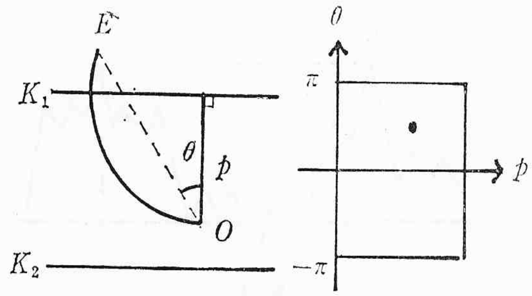


圖 2

於是弧線的位置便能用 p-θ 平面上的點表示，其中 $O\leq p\leq d$，$-\pi\leq\theta\leq\pi$，此長方形中代表與 K_1 相交諸弧的點構成某部分集合 I，同樣地對應於 K_2 亦有部分集合 I'，其形狀與 I 全等，然則所長欲求的或然率正等於 ($I\cup I'$) 的面積/長方形的面積。

舉例而言，若所論之弧乃是長度爲 b 的線段 ($b\leq d$) 則 I 卽是曲線 $p=b\cos\theta$ 所圍出的部分，而 I' 卽是曲線 $p-d=b\cos\theta$ 所圍出的部分，(見圖 3)

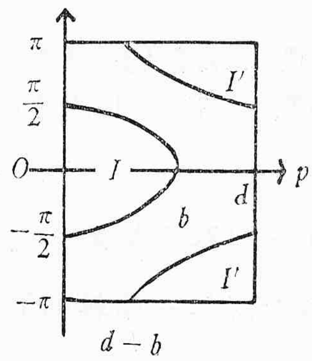


圖 3

既然 $I\cap I'=\phi$，或然率便是

$$p=(2b+2b)/2\pi d=2b/\pi d=L/\pi d$$

其中 $L=2b$ 正是線段的周長。

一般而言，當底的長度 $>d$，而弧的長度並非過於長，則 I 與 I' 的形狀大致如圖 4 所示:

其中 I 部分與上圖中的 I 差別在於曲線 $p=b\cos\theta$ 的上方多出一塊，而曲線伸出長方形的部分被截去一塊。

在適當的限制之下 (此將留待稍後再加討論)，可作兩項假設: 1) $I\cap I'=\phi$，2) 伸出長方形的部分，其邊界爲 $p=b\cos\theta$，換言之，曲線 $p=b\cos\theta$ 上端的那一塊，並不

伸出長方形之外。

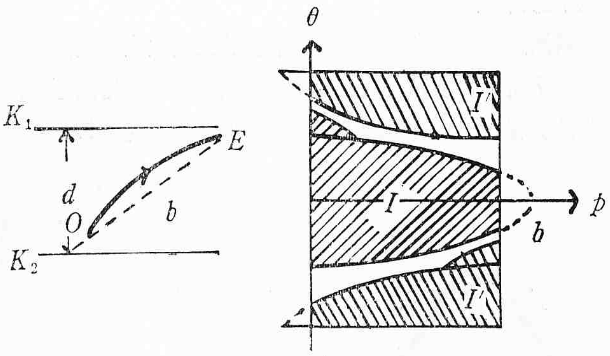


圖 4

在此二假設之下，I 的面積很容易計算，利用§I的命題，I 部分加上長方形外面的虛線部分總面積是$L=l+b$，至於長方形外面部分的面積，可由積分求出是 $2[\sqrt{b^2-d^2}-d\cos^{-1}(d/b)]$（註一）於是

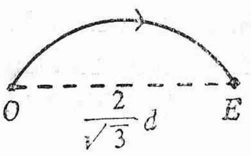
$$I\text{的面積}=l+b-2[\sqrt{b^2-d^2}-d\cos^{-1}(d/b)]$$

欲使此式在 b 的調節下取到極大值，應將之對 b 微分

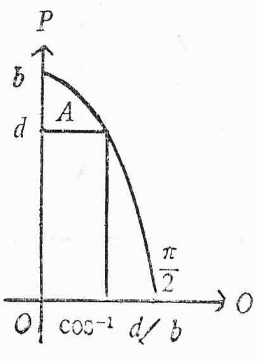
$$\frac{d(I\text{的面積})}{db}=1-2\frac{b}{\sqrt{b^2-d^2}}+2d\frac{-1}{\sqrt{1-d^2/b^2}}\cdot\frac{-d^{2}}{b^2}$$

$$=1-\frac{2}{b}\sqrt{b^2-d^2}$$

可見當 $d\le b<2d/\sqrt{3}$ 時，I 的面積隨 b 之加大而增加，直到 $b=2d/\sqrt{3}$ 時，達於極大值，於是得出結論：當 $b\le 2d/\sqrt{3}$ 時沿直線游泳仍爲最佳上策，但當 $b\ge 2d/\sqrt{3}$ 時，游泳的路線應當與長爲 $2d/\sqrt{3}$ 的底圍成一個凸集合。



〔註1〕



$$A\text{的面積}=\int_0^{\cos^{-1}\frac{d}{b}}b\cos\theta\,d\theta-d\cos^{-1}\frac{d}{b}$$

$$=b\sin\cos^{-1}\frac{d}{b}-d\cos\frac{d}{b}$$

$$=\sqrt{b^2-d^2}-d\cos^{-}\frac{d}{b}$$

§III. 成立的範圍

以上的計算是在兩個假設之下進行的 1) $I\cap I'=\phi$，2) 圖4中伸出長方形的部分，其邊界爲 $p=b\cos\theta$，此二條件在 $I\ge 2d/\sqrt{3}$ 的情況下，將會使 l 的長度受到限制，以下即就此加以說明。

條件 1) 要求弧線不與 K_1, K_2 同時相交。經過一番幾何學的思考便可看出此條件乃是限制該弧線不得超出下圖所示的邊界：（見圖5）

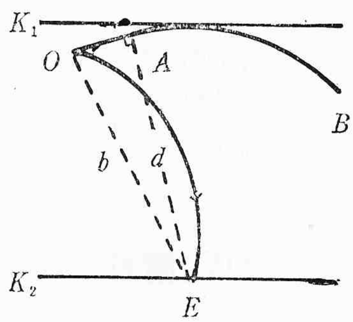


圖 5

邊界 OAB，圖中 $\overline{OA}\perp\overline{AE}$，dist$(OE)=b$，dist$(AE)=d$，$\widehat{AB}$ 爲圓弧，圓心在E，半徑爲 d

條件 2) 要求當 $p\ge d$ 時，該弧線僅在 $|\theta|\le\cos^{-1}(d/b)$ 時才與 K_1 相交，再經過一番幾何的思考又可看出，此條件亦是限制該弧線不得超出另一邊界（見圖6），此邊界與前個邊界具有某種對稱性。

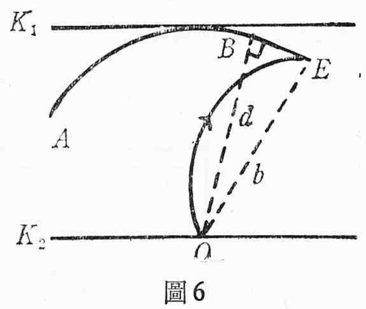


圖 6

邊界 ABE，圖中 $\overline{BE}\perp\overline{BO}$，disi$(OE)=b$，dist$(BO)=d$，$\widehat{AB}$ 爲圓弧，圓心在O，半徑爲 d

合併以上兩個條件便得出結論如下：§II 中的計算，對於下圖所示的區域內之任意弧線，均能成立（見圖7）。

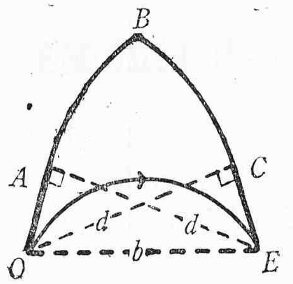


圖 7

邊界 $OABCE$，$\overline{OA}\perp\overline{AE}$，　$\overline{OC}\perp\overline{CE}$，
$\mathrm{dist}(AE)=d=\mathrm{dist}(OC)$，$\widehat{AB}$，$\widehat{BC}$ 爲圓弧，
圓心分别爲 E,O。

當 $b=2d/\sqrt{3}$時，$OABCE$ 的長度是 $2d/\sqrt{3}+2d[\cos^{-1}(1/\sqrt{3})-\pi/6]$，於是前文所預告的結果，有關 $2d/\sqrt{3}\le l\le 2d/\sqrt{3}+2d[\cos^{-1}(1/\sqrt{3})-\pi/6]$的條款，獲得證實。

§IV. 猜測

至目前爲止所得到的結果可歸納如下：對給定的一組 l 與 b，可求出 area$I$ 的極大值，若保持 l 不變，則 max(area I) 可畫成 b 的函數，只要弧線的直徑不超過 d，max(area I)都是 b 的線性函數，因此在 $l\le 2\pi d/3$ 的情況下，整個區間 $0\le b\le d$ 中都是直線，（見圖 8） 至於 $l>2\pi d/3$ 時，直線僅在 $0\le b\le 1+2\pi/3-l$ 區間中出現，對於 $d\le l\le 2d/\sqrt{3}+2d[\cos^{-1}(1/\sqrt{3})-\pi/6]$，我人尙可在區間 $d\le b\le 2d/\sqrt{3}$ 中畫出曲線圖形（見圖 9）。

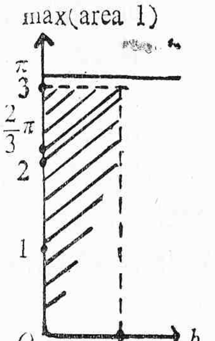


圖 8

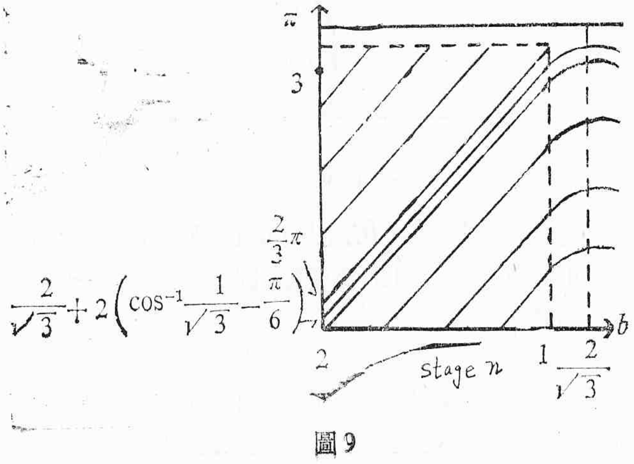


圖 9

爲了塡補圖 9 中右上角之空缺，必須對 $l>2d/\sqrt{3}+2d[\cos^{-1}(1/\sqrt{3})-\pi/6]$ 的情況再加探討，在此，筆者提出以下的猜測：

猜測： 對於給定的 b 而言，若弧的長度太大以致無法安放在圖 7 所示的邊界之內，則欲使相交的或然率增至極大，應將此弧線按下圖所示的方法，向外伸展。（見圖10）

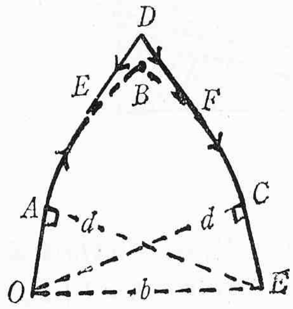


圖10

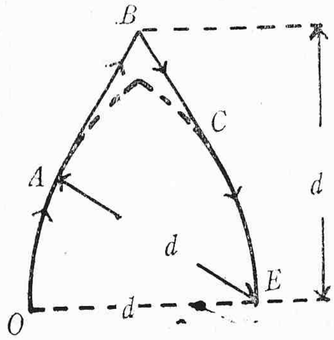


圖11

$\overline{DE}$ 與 $\overline{DF}$ 分别與 $\widehat{AB}$ 弧及 $\widehat{BC}$ 弧相切，
$\mathrm{dist}(DF)=\mathrm{dist}(DE)$

倘此臆說不謬，則可計算 $l>2d/\sqrt{3}+2d[\cos^{-1}(1/\sqrt{3}-\pi/6]$ 情況的相交或然率，先定義。

$a=\mathrm{dist}(OA)=\mathrm{dist}(CE)$，$c=\mathrm{dist}(DE)=\mathrm{dist}(DF)$ 而 h 表 D 與底之間的距離，經過一番計算後得：欲使相交的或然率最大，b 應滿足下式：

$$1+\frac{2a}{b}=4d\frac{a+c}{bd+2hc}$$

b_{max} 的值隨 l 之增大而減小，當最後 $l=d+2d\tan^{-1}(3/4)$ 時，$b_{max}=d$，而相交的或然率已達到百分之百，此時的弧線所展成的凸殼，在各個方向的寬度都$\ge d$（見圖 11），因此得以確保該溺者必致生還，下圖將圖 9 之空缺完全補足。

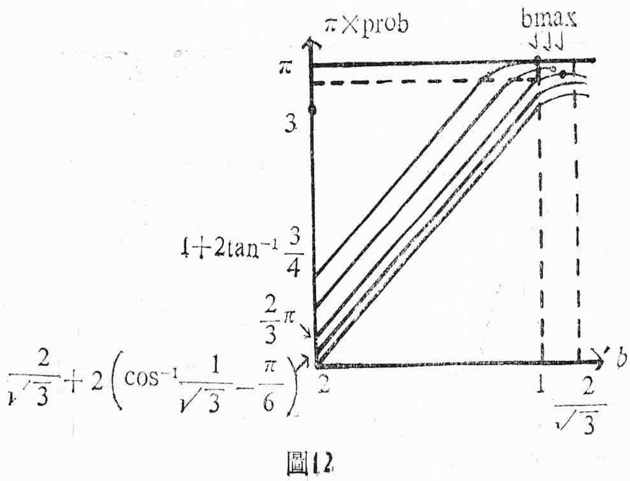


圖12