上期解答與應答

情人谷的故事與登山問題解答

問題提供人: 謝聰智先生
應答人數: 36位

應　答　優　勝　榜

特優: 陳碧郁（曉明女中）；方思齊（師大附中）。——以上各贈本刊一年份及「數學教室」合訂本一本。

優良: 羅泰松、張芳淇、張文淮、梅剛成（附中）；汪治平（高雄中學）；程□□（建中）。——以上各贈本刊半年份。

良好: 張興宇、彭明正、林孚昌、吳金林、周健和、李文鎊、莊光達及蔡賢昆、蔡麟祥、周瑞航、陳之貴、吳仁傑、羅國禎、盛天予、何禮鵬、龔克峯、沈烈崗、林立域、陳立強、劉震威、林漢文、張柳祥、楊勝勳、黃　祥（附中）；程順誼（東吳數二）；謝俊輝（雄中）。——以上各贈本刊本期一本。

解答：（謝聰智先生提供）

I. 登山問題

登山問題: 甲、乙從「正規」山脈兩端同時出發，在「等高約法」下，甲、乙是否一定有辦法相會?

此中，正規山脈是指山脈兩端高度相等，其海拔爲零，而且其間山谷沒有一個低於海平面，等高約法是指甲乙翻越山嶺時必須隨時保持同樣高度。

爲以後敍述方便計，我們定義一個名詞「等高可行山脈」。甲乙能在等高約法下完成會合的山脈稱爲等高可行山脈，甲乙相會之點稱爲此山脈之相會點。**登山問題的答案是肯定的，**將它敍述爲定理如下。

定理 1: 正規山脈必定爲等高可行山脈。

II. 問題要義與數學歸納法

爲了解答登山問題各位讀者一定做過不少紙上作業，畫一個正規山脈，一隻手代表甲，另一隻手代表乙，上上下下比劃。結果發現甲乙都能遵守等高約法而成功地相會。每一次紙上作業事實上給了定理1一個實例。**實例的成立增加了肯定定理1之信心，但不能用來當作證明。**重要的是要從觀察實例中抽出一般化的特性作爲嚴格證明的依據。相信各位讀者都學過數學歸納法。我們將用它來證明定理1。歸納法常用來證明一些等式或不等式。至於一個命題亦能用數學歸納法證明，一般則比較不熟悉。我們希望借登山問題的證明引起讀者對這方面的注意。事實上，數學上很多重要定理都是巧妙地化成適合歸納法的命題而得證的。普通數學歸納法有兩種形式:

第一種形式:

對任一自然數 n，設 P_n 爲與 n 有關之命題，

如果 i) 命題 P_1 成立，且

ii) 對任一自然數 k，P_k成立$\Longrightarrow P_{k+1}$成立，

則對所有自然數 n，P_n 恆成立。

第二種形式:

對任一自然數 n，設 P_n 爲與 n 有關之命題。

如果 i) 命題 P_1 成立，且

ii) 對任一自然數 k，

$P_1, P_2 \cdots\cdots P_{k-1}$ 成立 $\Longrightarrow P_k$ 成立。

則對所有自然數 n, P_n 恆成立。

第一種形式之歸納法各位讀者都很淸楚，不在此贅述。第二種形式讀者比較不熟悉，略證如下。

設歸納法第二種形式之結論不成立。換句話說，有某些個自然數 n 使得 P_n 不成立。我們選取這種 n 中最小的一個，記爲 n_0。由 i) 得知 $n_0 > 1$。由 n_0 之選取我們知道

$P_1, P_2 \cdots\cdots P_{n_0-1}$ 成立，但 P_{n_0} 不成立。

此結論與 ii) 矛盾。因爲由 ii)，$P_1, P_2, \cdots\cdots P_{n_0-1}$ 成立可推得 P_{n_0} 亦成立。因此原先假設錯誤，從而得證第二種形式之歸納法成立。

我們將用歸納法之第二種形式證明定理 1。其要點是將俱有 n 個山峯之正規山脈設法依甲乙進行的路徑分成數段，每一段山峯之個數小於 n，而且每一段都是正規山脈或正規山脈之平移或廻轉。因此歸納假設適合於每一分段，從而得證每一分段爲等高可行山脈。最後合成各分段的推論而得證定理 1。詳細證明請看第四節。

III. 一些簡單的觀察

由等高約法之意義很容易推得下列事實。

1. 等高可行山脈之相會點一定是山谷或山峯。
2. 若等高可行山脈僅有一最高峯，則其相會點一定是此最高峯。
3. 僅有一個山峯之正規山脈一定是等高可行山脈。

IV. 歸納假設下之推論

假定以下命題成立：

(＊) 山峯個數小於 n 之正規山脈必爲等高可行山脈。

我們將由此假設推論山峯個數等於 n 之正規山脈亦爲等高可行山脈。

一般正規山脈起起伏伏可能很複雜，但我們可以歸類成下列情形。

〔1〕正規山脈之最高峯有兩個以上。

〔2〕正規山脈之最高峯只有一個，

〔2-1〕次高峯僅在唯一高峯之一側，

〔2-2〕最高峯之兩側都有次高峯。

給定一正規山脈 M，其山峯個數爲 n。令 A_0 與 B_0 爲山脈 M 之兩端點，甲從 A_0 出發，乙從 B_0 出發。依山脈 M 之情況分下列三種情形討論。

1) M 滿足〔1〕。

令 A_1 及 B_1 分別爲最靠近 A_0 及 B_0 之最高峯。

將原來山脈 M 分成兩部份 M_1 及 M_2。(見圖 1)

M_1 之前段爲 M 中從 A_0 到 A_1 之山脈，其後段爲 M 中從 B_1 到 B_0 之山脈。前段與後段在 A_1 與 B_1 重疊處相接連。

M_2 爲 M 中從 A_1 到 B_1 之山脈。

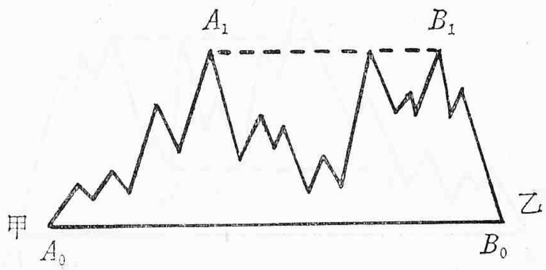

圖 1

由 M_1 之意義，很顯然知道 M_1 爲正規山脈，其山峯個數小於 n，而且 M_1 僅有一個最高峯。換言之，M_1 滿足歸納假設(＊)之前提，因此 M_1 爲等高可行山脈，其相會點爲 M_1 之最高峯，此結論放在原來山脈 M 中卽表示

(i) 在山脈 M 中，甲從 A_0，乙從 B_0 出發，在等高約法下，甲可到達 A_1，乙可到達 B_1。

將 A_1 與 B_1 之連線當作海平線，把 M_2 翻轉 180° 倒過來看，山谷視爲山峯，山峯視爲山谷。從這觀點，M_2 可視爲正規山脈，且其山峯個數小於 n。M_2 滿足(＊)之前提，故 M_2 爲等高可行山脈。此結論放在原來山脈 M 上卽表示

(ii) 在山脈 M 中，甲從 A_1，乙從 B_1 同時出發，可遵守等高約法而在 A_1 與 B_1 間的某一山谷或山峯相會合。

綜合 (i) 及 (ii) 得證

在(＊)之假設下山脈爲等高可行山脈。

2) M 滿足〔2-1〕

令 M 之最高峯爲 C。

不失一般性，可假定 A_0 與 C 間沒有次高峯。

令 B_1 爲最靠近 B_0 之次高峯。

選取 A_1 爲最高峯左側山腰與 B_1 等高之點。

令 B_2 爲 C 與 B_0 間之最低谷。

選取 A_2 爲山脈 M 在 A_0 與 A_1 間和 B_2 等高之點中最靠近 A_1 者。

考慮三個山脈 M_1, M_2 及 M_3 定義如下。(見圖 2)

M_1 之前段爲 M 中從 A_0 到 A_1 之山脈，其後段爲 M 中從 B_1 到 B_0 之山脈。前段與後段在 A_1 與 B_1 重疊而連接。

M_2 之建構稍微麻煩。首先將經過 A_1 之垂線視爲平面鏡，然後將 M 中 A_2 到 A_1 之山脈對此平面鏡所得之像

記爲 I，A_2 之像記爲 A_2'。M_2 之前段爲 I，其後段爲 M 中從 B_1 到 B_2 之山脈，前段與後段在 A_2' 與 B_2 重疊而連接。

M_3 之前段爲 M 中從 A_2 到 C 之山脈，其後段爲 B_2 到 C 之山脈，前段與後段在 C 點相接連。

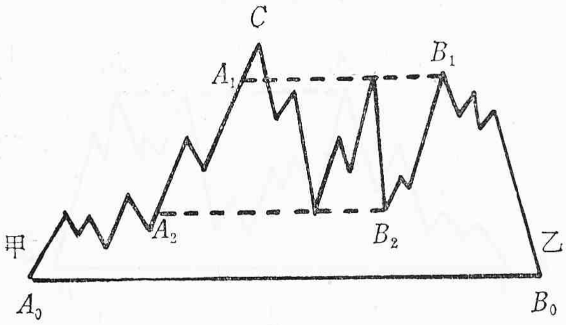

圖 2

由 M_1 之定義，知道 M_1 爲僅有一個最高峯之正規山脈，其山峯個數小於 n。由歸納假設(*)，得 M_1 爲等高可行山脈，其會合點爲最高峯 A_1 與 B_1 重疊處。此結論放在原來山脈 M 卽表示

(i) 在 M 中，甲從 A_0 出發，乙從 B_0 出發，能隨時保持同樣高度，最後甲到達 A_1，乙到達 B_1。

將 A_1 與 B_1 之連線當作海平線，把 M_2 倒轉 180° 來看，山谷視爲山峯，山峯視山谷。在此觀點下，M_2 爲正規山脈其山峯個數小於 n，且只有一個最高峯。(*)假設下之前提成立。因此 M_2 爲等高可行山脈，甲、乙之相會點爲 A_2' 與 B_2 重疊處。此結論放在原來山脈 M 卽表示

(ii) 在山脈 M 中，甲從 A_1，乙從 B_1 同時出發，在等高約法下，甲可退到 A_2，乙可前進到 B_2。

將 A_2 與 B_2 之連線視爲海平線，則 M_3 爲僅有一最高峯之正規山脈，其山峯個數小於 n。由(*)得 M_3 爲等高可行山脈。甲、乙相會點爲最高峯 C。此結論放在原來山脈 M 卽表示

(iii) 在山脈 M 中，甲從 A_2，乙從 B_2 出發，可隨時保持同樣高度而最終在最高峯 C 相會。

綜合 (i),(ii) 及 (iii) 得

在(*)之假設下，山脈 M 爲等高可行山脈，其相會點爲最高峯 C。

3) M 滿足〔2-2〕

與情形〔2-1〕的處理情形約略相同，我們要從 M 建構三個山脈 M_1, M_2 及 M_3，惟對於 A_1, B_1, A_2 及 B_2 之選取略有不同。

令 C 爲 M 之最高峯。

令 A_1 及 B_1 分別爲最靠近 A_0 及 B_0 之次高峯。

不失一般性可假定至少有一 A_1 與 B_1 間之最低谷在最高峯 C 之右側。

選取 B_2 爲 A_1 與 B_1 間之最低谷中最靠近 B_1 者。

選取 A_2 爲 A_0 與 A_1 間之山脈與 B_2 等高之點中最靠近 A_1 者。

在 A_1, B_1, A_2, B_2 及 C 如上面選取下，與 2) 中一樣的定義建構 M_1, M_2 及 M_3 三個山脈。跟 2) 同樣的理由可得證

在(*)之假設下，山脈 M 脈等高可行山脈。

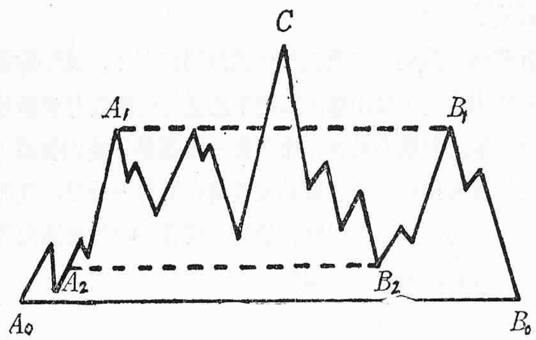

圖 3

總結 1),2) 及 3) 我們得證

若山峯個數小於 n 之正規山脈爲等高可行山脈，則山峯個數等於 n 之正規山脈亦是等高可行山脈。

事實上，到此爲止，定理 1 已完全得證。但爲便讀者更容易看清楚歸納法之應用，我們重述以上的結論成爲數學歸法的第二種形式。

V. 完整的證明

設 P_n 表示「山峯個數爲 n 的正規山脈必定爲等高可行山脈」。

前兩節我們證明了，

i) P_1 成立。

ii) 對任一自然數 $n, P_1, P_2, \cdots\cdots P_{n-1}$ 都成立 $\Longrightarrow P_n$ 成立。

由歸納法第二種形式，我們得知

P_n 恆成立。

換言之，任一正規山脈，不論其山峯個數多少，一定是等高可行山脈。此卽表示定理 1 成立。

VI. 關於非正規山脈

一般非正規山脈不一定是等高可行山脈。但非正規山脈

加上了某種適當的條件可成爲等高可行山脈。

定理 2: 設 M 爲非正規山脈，但M兩端之高度相同。若 M 有兩個最高峯而且 M 中低於 M 兩端之山谷都在兩最高峯之間（圖 4），則 M 爲等高可行山脈。

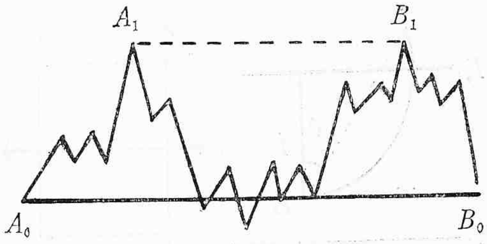

圖 4

證明: 設 A_0 及 B_0 爲 M 之兩端點。設 A_1 及 B_1 爲兩最高峯。將 M 分爲兩個山脈 M_1 及 M_2。

M_1 之前段爲 M 中從 A_0 到 A_1 之山脈，其後段爲 B_1 到 B_0 之山脈。將 A_1 及 B_1 平移使得 A_1 及 B_1 重疊。M_2 爲 M 中從 A_1 到 B_1 之山脈。則 M_1 爲正規山脈。由定理 1，M_1 爲等高可行山脈，其相會點爲 M_1 之最高峯，即 A_1 及 B_1重疊處。放在原來山脈 M 即表示: (i) 甲，乙從 A_0 及 B_0 分別出發可隨時保持同樣高度，甲可到達A_1，乙到達 B_1。將 A_1 至 B_2 之連線當作海平線，把 M_2 轉 180°，翻轉來看，在這觀點 M_2 亦爲正規山脈。由定理 1 得知 M_2 爲等高可行山脈。因此 (ii) 甲從 A_1，乙從 B_1 出發，可隨時保持同樣高度而最終相會。綜合 (i) 及 (ii) 得 M 爲等高可行山脈。

事實上從定理 1 可導出一般非正規山脈成爲等高可行山脈的充分必要條件，惟敍述太過複雜在此從略，留給有興趣的讀者想一想。